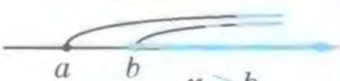
Таблица квадратов двузначных чисел

Десятки \ Единицы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	[illegible]64	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	26[illegible]	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	[illegible]	[illegible]056	7225	[illegible]96	7569	[illegible]44	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

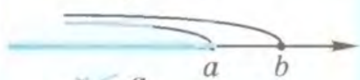
Системы линейных неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant a \\ x \geqslant b \end{cases}$$



$x \geqslant b$

$$\begin{cases} x \leqslant a \\ x \leqslant b \end{cases}$$

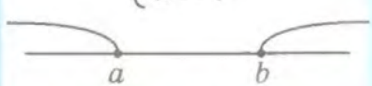


$x \leqslant a$

$$\begin{cases} x \geqslant a \\ x \leqslant b \end{cases}$$

$a \leqslant x \leqslant b$

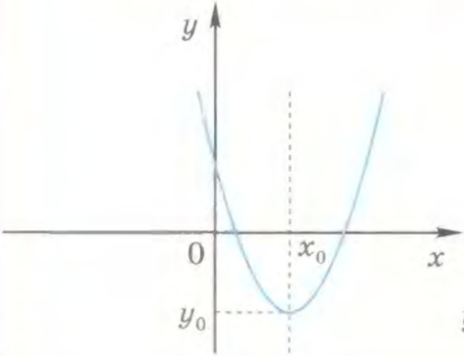
$$\begin{cases} x \leqslant a \\ x \geqslant b \end{cases}$$



нет решений

График функции $y = ax^2 + bx + c$

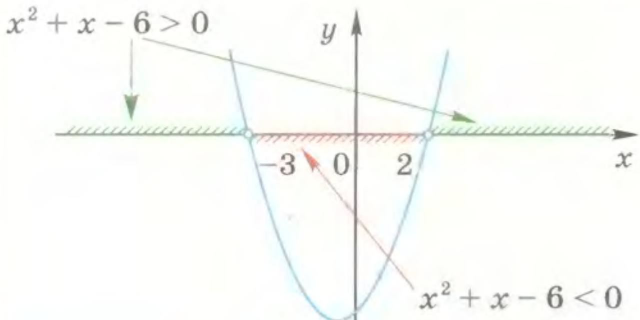
Координаты вершины параболы



$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Квадратные неравенства



Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Академический школьный учебник

АЛГЕБРА

9 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

Под редакцией Г. В. Дорофеева

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

5-е издание

Москва
«Просвещение»
2010

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Серия «Академический школьный учебник» основана в 2005 году

Проект «Российская академия наук, Российская академия образования, издательство «Просвещение» — российской школе»

Руководители проекта: вице-президент РАН акад. *В. В. Козлов*, президент РАО акад. *Н. Д. Никандров*, генеральный директор издательства «Просвещение» чл.-корр. РАО *А. М. Кондаков*

Научные редакторы серии: акад.-секретарь РАО, д-р пед. наук *А. А. Кузнецов*, акад. РАО, д-р пед. наук *М. В. Рыжаков*, д-р экон. наук *С. В. Сидоренко*

Авторы: *Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева*

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 2-10106-5215/1418 от 25.10.06)
и Российской академии образования (№ 01-76/5/7д от 12.07.06)

Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений /
А45 [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». — 5-е изд. — М. : Просвещение, 2010. — 304 с. : ил. — (Академический школьный учебник). — ISBN 978-5-09-023431-3.

Учебник соответствует федеральным компонентам Государственного стандарта общего образования. Учебно-методический комплект по алгебре для 9 класса под редакцией Г. В. Дорофеева включает учебник, рабочие тетради, тематические тесты, дидактические материалы, книгу для учителя и контрольные работы для 7—9 классов. В оформлении заставок учебника использованы мотивы рисунков М. Эшера.

Глава 1

Неравенства

1.1 Действительные числа

Изучая математику, вы осваиваете одно из ее основных понятий — *число*. Именно это понятие самым непосредственным образом связывает математику с жизнью. Уже в первом классе вы познакомились с *натуральными числами*, которые используются для определения количества отдельных предметов. Множество натуральных чисел имеет специальное обозначение, собственное имя — N. Его происхождение легко понять, если знать, что *natura* — это природа. Можно сказать, что натуральные числа заложены самой природой и человеку оставалось только открыть их.

Однако, как вы знаете, для решения практических задач, связанных с делением целого на части, натуральных чисел недостаточно, и поэтому появились дроби. Далее вы познакомились с отрицательными числами. Интересно, что отрицательные числа абсолютно «ненатуральные» — это чистое изобретение математиков, в природе отрицательных чисел нет. И хотя, например, при измерении температуры воздуха мы все время встречаемся с отрицательными числами, это связано только с условным выбором начала отсчета температуры — 0 °C. В то же время отрицательные числа оказались очень удобными для обозначения величин, изменяющихся в противоположных направлениях. А самое главное, без них невозможно было бы развитие аппарата решения уравнений: имея отрицательные числа, мы можем не задумываться о том, какое число получится при переносе слагаемого из одной части уравнения в другую.

Натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и число 0 составляют *множество целых чисел*. А целые и дробные числа (положительные и отрицательные) — множество рациональных чисел. Эти множества также имеют собственные имена — соответственно $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$. Обозначение множества рациональных чисел легко объяснить: $\boldsymbol{Q}$ — это первая буква французского слова *quotient*, что в переводе означает «частное», а всякое рациональное число, как вам известно, можно представить в виде отношения (т. е. частного) двух целых чисел. Обозначение $\boldsymbol{Z}$ происходит, скорее всего, от немецкого слова *Zahl* — число.

Каждое рациональное число мы можем изобразить геометрически — точкой на координатной прямой, при этом мы называем это число *координатой* соответствующей точки. Если представить себе, что все рациональные числа нанесены на координатную прямую, то некоторые точки прямой (а на самом деле очень многие) все же окажутся свободными, не имеющими координат. Отложим, например, от точки O отрезок OA — диагональ квадрата со стороной 1 (рис. 1.1). Как вы знаете из курса 8 класса, длина этого отрезка не выражается рациональным числом, поэтому этой точки A не будет среди отмеченных. Это открытие примерно две с половиной тысячи лет назад сделали древнегреческие математики, и оно послужило основанием для изобретения иррациональных чисел, первым примером которых оказался знаменитый $\sqrt{2}$. Это число и является координатой только что построенной точки A.

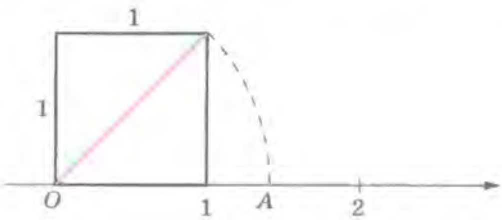


Рис. 1.1

Разумеется, вслед за этим как из рога изобилия «посыпались» и другие иррациональные числа — это и квадратные корни из натуральных чисел, не являющихся точными квадратами, и их всевозможные арифметические комбинации, и многие-многие другие, вовсе не связанные с извлечением корня. Иррациональным оказалось и число π, однако доказать это математики смогли через десятки веков — только в XIX веке!

Рациональные и иррациональные числа вместе составляют *множество действительных чисел*. Рациональные числа — это такие действительные числа, которые можно записать в виде отношения $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа, а иррациональные — это действительные числа, которые в таком виде представить нельзя.

Множество действительных чисел принято обозначать буквой $\boldsymbol{R}$ — от французского *réel* (по-английски *real*) — реальный, настоящий, действительный.

Действительных чисел оказалось уже достаточно, чтобы заполнить всю координатную прямую, т. е. *каждой точке прямой соот-*

ветствует некоторое действительное число. И наоборот: *каждое действительное число можно изобразить точкой на координатной прямой.* Как говорят, между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует взаимно однозначное соответствие.

Изобретение действительных чисел создало в математике два равноправных языка — алгебраический и геометрический. Можно сказать, например, «точка 7», имея в виду при этом точку с координатой 7.

Вся практическая деятельность человека, связанная с измерениями, обеспечивается действительными числами. Именно они используются для измерения реальных, прежде всего геометрических и физических, величин — длины, площади, объема, скорости, массы, плотности, силы и т. д. Благодаря введению иррациональных чисел можно говорить не только о точной длине любого отрезка, но и о точной массе любого тела, точной скорости движения и т. п.

Еще недавно действительные числа называли (а иногда и теперь называют) *вещественными*, подчеркивая их связь с измерением величин. Название же «действительные» связано с тем, что действительные числа в математике противопоставляются так называемым *мнимым числам*, о которых вы узнаете, обучаясь в старшей школе.

Обозначения числовых множеств, с которыми вы познакомились, приведены в таблице.

Обозначение (имя)	Что означает имя
$\boldsymbol{N}$	Множество натуральных чисел
$\boldsymbol{Z}$	Множество целых чисел
$\boldsymbol{Q}$	Множество рациональных чисел
$\boldsymbol{R}$	Множество действительных чисел

Используя обозначения числовых множеств, мы можем кратко записывать некоторые часто употребляемые выражения математического языка. Для этого нам понадобится еще один математический знак — *знак принадлежности* $\in$. Утверждение $a \in A$ означает, что a принадлежит множеству A. Например, запись $2 \in \boldsymbol{N}$ можно прочитать так: «Число 2 принадлежит множеству натуральных чисел» или, говоря проще, «2 — натуральное число».

Универсальным именем-обозначением для всех рациональных чисел является дробь вида $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа. А как дать универсальное имя действительным числам? Изобрести здесь общее правило не так уж просто: что объединяет, например, символы $\frac{5}{11}$, $\sqrt{2}$ и π? Однако общий способ представления действительных чисел существует, и связан он с десятичной записью.

Вы знаете, что некоторые дробные числа могут быть записаны в виде десятичных дробей. Например:

$$\frac{9}{20}=0{,}45;\ \ -2\frac{13}{40}=-2{,}325;\ \ 11\frac{7}{16}=11{,}4375.$$

Чтобы получить эти десятичные дроби, достаточно в каждом случае разделить числитель дроби на знаменатель (уголком или с помощью калькулятора). Если же мы возьмем, например, дробь $\frac{5}{11}$, которую нельзя представить в виде десятичной дроби, и будем делить ее числитель на знаменатель, то этот процесс никогда не закончится и в частном возникнет запись 0,454545... .

Многоточие здесь означает, что, продолжая деление, мы можем в принципе узнать любую цифру частного. Такие записи, по очевидной аналогии, называют *бесконечными десятичными дробями*. Иными словами, число $\frac{5}{11}$ записывается в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\frac{5}{11}=0{,}454545\ldots .$$

Вообще всякое дробное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби (так мы теперь будем говорить для противопоставления), либо в виде бесконечной десятичной дроби. Однако к любой конечной десятичной дроби и к любому целому числу можно приписать справа «хвост» из бесконечной последовательности нулей. Например:

$$0{,}38=0{,}380000\ldots ,$$
$$54=54{,}00000\ldots .$$

Поэтому можно считать, что

> любое рациональное число изображается бесконечной десятичной дробью.
> Всякое иррациональное число также изображается бесконечной десятичной дробью.

Возьмем, например, число $\sqrt{2}$. Как начинается бесконечная десятичная дробь, изображающая это число?

Будем рассматривать приближенные значения числа $\sqrt{2}$ с недостатком.

Так как $1^2 < 2 < 2^2$, то $1 < \sqrt{2} < 2$, поэтому $\sqrt{2} \approx 1$.

Так как $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$, то $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, поэтому $\sqrt{2} \approx 1{,}4$. Точно так же:

$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$, поэтому $\sqrt{2} \approx 1{,}41$;

$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$, поэтому $\sqrt{2} \approx 1{,}414$;

$1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2$, поэтому $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$.

Чтобы найти еще несколько приближений $\sqrt{2}$ с недостатком, можно воспользоваться калькулятором, на котором есть клавиша со значком $\sqrt{\ }$. На экране появится запись 1,4142135, которая позволит продолжить цепочку приближенных равенств:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421; \qquad \sqrt{2} \approx 1{,}414213; \qquad \sqrt{2} \approx 1{,}4142135.$$

Если мысленно представить приближенные значения числа $\sqrt{2}$ на координатной прямой, то получим точки:

1; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; 1,4142135; ... .

Эти точки все ближе и ближе «подкрадываются» слева к точке $\sqrt{2}$, однако ни одна из них не попадет ровно в точку $\sqrt{2}$ — в противном случае число $\sqrt{2}$ оказалось бы рациональным. Таким образом, процесс нахождения приближенных значений этого числа может продолжаться бесконечно, и мы будем получать все новые и новые цифры бесконечной десятичной дроби, которую и считают другим, новым именем для $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots .$$

При использовании более мощного калькулятора можно было бы получить, например, такой результат:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373\ldots ,$$

однако следует понимать, что это просто более «полное» имя числа $\sqrt{2}$.

Точно так же можно написать, что $\pi = 3{,}14\ldots$, или $\pi = 3{,}1415926536\ldots$. А с помощью компьютера для числа π особыми математическими приемами подсчитаны миллионы десятичных знаков!

Таким образом:

любое действительное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби.

Верно и обратное:

всякая бесконечная десятичная дробь представляет некоторое действительное число.

Зная это, вы сами можете сконструировать сколько угодно действительных чисел. Например:

$$1{,}525225222\ldots,\ \ 4{,}28666\ldots,\ \ 0{,}1234567\ldots\ .$$

Однако бесконечная десятичная дробь как математический объект имеет один существенный недостаток: ее нельзя выписать полностью. Поэтому, чтобы ее считать заданной, надо знать, как именно находятся десятичные знаки, обозначенные многоточием.

Вам уже приходилось сравнивать действительные числа, причем в зависимости от того, в каком виде были представлены числа, вы применяли тот или иной способ сравнения.

Положительные действительные числа, записанные в виде бесконечных десятичных дробей, как и конечные десятичные дроби, сравнивают поразрядно. Например:

$$1{,}023023\ldots < 1{,}023024\ldots\ .$$

Однако распространение этого правила на бесконечные десятичные дроби приводит к тому, что из рассмотрения приходится исключить дроби, в которых, начиная с некоторого разряда, содержится только цифра 9 (например, такие, как 0,59999...). С чем это связано, вы можете узнать, прочитав п. 1.7 («*Для тех, кому интересно*»).

Действительные числа любого знака сравнивают по тем же правилам, что и рациональные числа.

Из двух различных действительных чисел меньшим считается то, которое на координатной прямой расположено левее, и бо́льшим то, которое расположено правее; всякое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа.

А

1. Выберите из чисел

$$-1;\ 0;\ \sqrt{3};\ 2{,}38;\ \pi;\ \frac{1}{84};\ -\sqrt{7};\ 100;\ -3\pi;\ \sqrt{2}+\sqrt{3};\ -\frac{2}{7};\ 0{,}001:$$

а) натуральные числа;
б) целые числа;
в) рациональные числа;
г) отрицательные иррациональные числа;
д) положительные действительные числа.

2. Верно ли утверждение:
а) всякое натуральное число является целым;
б) всякое целое число является натуральным;
в) всякое целое число является рациональным;
г) всякое иррациональное число является действительным;
д) всякое действительное число является рациональным?

3. Приведите пример числа, которое:
а) является рациональным, но не является целым;
б) является целым, но не является натуральным;
в) является действительным, но не является рациональным;
г) является действительным, но не является иррациональным.

4. Прочитайте следующие утверждения и определите, верны ли они (догадайтесь, что означает знак $\notin$):
а) $-10 \in \boldsymbol{Z}$, $-10 \in \boldsymbol{Q}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \boldsymbol{R}$;
б) $\frac{\pi}{2} \in \boldsymbol{Z}$, $\frac{\pi}{2} \notin \boldsymbol{Q}$, $\frac{\pi}{2} \in \boldsymbol{R}$;
в) $-\frac{1}{7} \in \boldsymbol{Z}$, $-\frac{1}{7} \notin \boldsymbol{R}$, $-\frac{1}{7} \in \boldsymbol{Q}$.

5. Запишите на символическом языке следующие утверждения:
а) 2 — целое число;
б) -100 — рациональное число;
в) 0,3 — действительное число;
г) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ — иррациональное число;
д) $\frac{2}{9}$ не является целым числом;
е) -3 не является натуральным числом.

6. Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ включается в множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$. На языке символов это записывается так: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ и читается: «Всякое натуральное число является целым». Схематически соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$ показано на рисунке 1.2. Прочитайте и изобразите с помощью схемы соотношение:

$$\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R},$$
$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}.$$

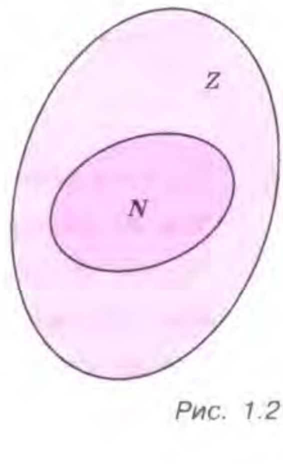


Рис. 1.2

7. Изобразите на координатной прямой заданный промежуток и укажите какое-нибудь принадлежащее ему рациональное число; иррациональное число. Ответ запишите с помощью знака $\in$ (например, $2{,}3 \in [1; 4]$):
а) $[1; 4]$; б) $(-2; 0)$; в) $[-3; +\infty)$.

8. Найдите объединение и пересечение множеств A и B, если:

а) $A = [-6;\ 2]$, $B = [0;\ 4]$;
б) $A = [-6;\ 2)$, $B = [2;\ 4]$;
в) $A = [-6;\ 2]$, $B = (0;\ 2)$.

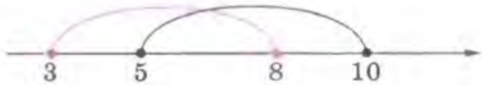


Рис. 1.3

Образец. Пусть $A = [3;\ 8]$, $B = [5;\ 10]$. Тогда $A \cup B = [3;\ 10]$, $A \cap B = [5;\ 8]$ (рис. 1.3).

9. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют данному условию, и запишите его на символическом языке:

а) $|x - 4| \leqslant 1$; в) $|x + 5| < 2$; д) $|x| \leqslant 6$;
б) $|x - 4| \geqslant 1$; г) $|x + 5| > 2$; е) $|x| \geqslant 3$.

Образец. 1) $|x - 6| \leqslant 2$ — расстояние от точки x до точки 6 не превосходит 2 (рис. 1.4, *а*);
2) $|x - 6| > 2$ — расстояние от точки x до точки 6 больше 2 (рис. 1.4, *б*).

10. Используя циркуль и линейку, отметьте на координатной прямой числа: $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2} - 1$; $1 - \sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$. Запишите данные числа в порядке возрастания.

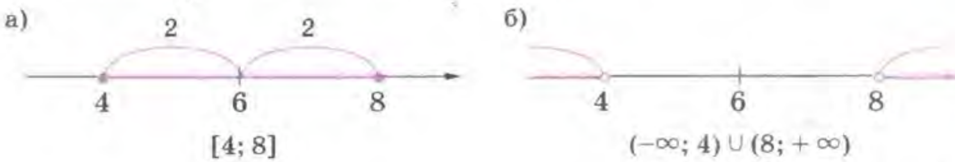


Рис. 1.4

Рис. 1.5

11. На координатной прямой (рис. 1.5) точками A и B отмечены два из следующих чисел: $\frac{1}{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$.

Какое число соответствует точке A и какое — точке B?

12. На координатной прямой (рис. 1.6) точками C и D отмечены два из следующих чисел: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$.

Какое число соответствует точке C и какое — точке D?

Рис. 1.6

13. Выберите верные утверждения:
а) каждому рациональному числу соответствует точка координатной прямой;
б) каждой точке координатной прямой соответствует рациональное число;
в) каждому иррациональному числу соответствует точка координатной прямой;
г) каждой точке координатной прямой соответствует иррациональное число;
д) каждому действительному числу соответствует точка координатной прямой;
е) каждой точке координатной прямой соответствует действительное число.

14. Решите уравнение и укажите, рациональными или иррациональными числами являются его корни. Найдите приближенные значения иррациональных корней с одним знаком после запятой:

а) $25x^2 = 4$; б) $6x^2 = 3$; в) $0{,}6x^2 = 4{,}8$; г) $1{,}5x^2 = 0{,}96$.

15. В окружность с центром O и радиусом, равным 1, вписан треугольник (рис. 1.7, *а*, *б*). Рациональным или иррациональным числом выражается длина каждой стороны треугольника?

16. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $(\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)$; г) $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot 3 \cdot \sqrt{15}$;

б) $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 2)$; д) $3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$;

в) $(1 - 2\sqrt{5})^2$; е) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{6\sqrt{10}}$.

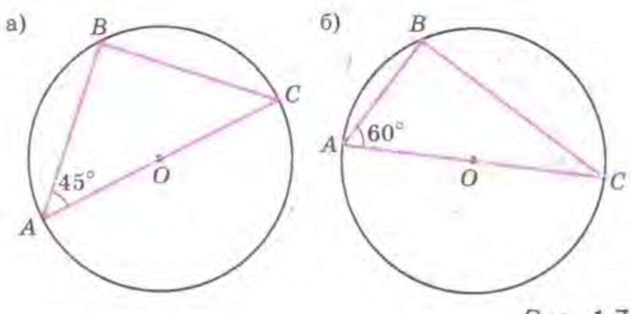


Рис. 1.7

17. На рисунке 1.8 построены прямые $y = \sqrt{2x}$, $y = -\sqrt{2x}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ и $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Соотнесите каждую прямую с ее уравнением. Для каждой прямой определите: ординату точки, абсцисса которой равна 1; абсциссу точки, ордината которой равна 4.

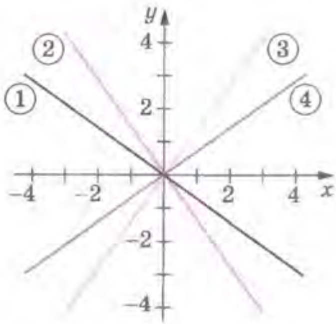


Рис. 1.8

18. а) Постройте график функции $y = \frac{2}{x}$. Найдите точки графика, у которых абсцисса и ордината равны. Рациональными или иррациональными являются координаты этих точек?

б) Постройте график функции $y = -\frac{6}{x}$. Определите координаты точек этого графика, у которых абсцисса и ордината являются противоположными числами. Рациональными или иррациональными являются координаты этих точек?

19. Как начинается бесконечная десятичная дробь, представляющая данное число:

а) $\frac{3}{11}$; б) $\frac{23}{32}$; в) $\sqrt{126}$; г) $\sqrt{2{,}36}$?

20. Принадлежит ли отрезку $[1{,}57; 1{,}58]$ число:

а) 1,57001; б) 1,581; в) $1\frac{4}{7}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{2{,}5}$; е) $\sqrt{2{,}48}$; ж) $\frac{\pi}{2}$?

(При необходимости используйте калькулятор.)

21. Округлите до сотых число:

а) 2,3561; г) 3,166166...; ж) 3,785;
б) 0,0724; д) 5,919119111...; з) 0,895;
в) 12,1818...; е) 0,07891011...; и) 2,996.

22. Сравните числа:

а) $\frac{2}{9}$ и 0,23; в) $\sqrt{40}$ и 6,4; д) 0,53247... и 0,53147...;

б) $\frac{3}{7}$ и 0,428; г) $1\frac{5}{7}$ и $\sqrt{3}$; е) −1,15 и −1,1485... .

23. Определите знак числа:

а) $2\sqrt{5} - 3$; в) $3\sqrt{2} - 5$; д) $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$;

б) $1 - \sqrt{3}$; г) $4 - 2\sqrt{3}$; е) $2\sqrt{15} - 3\sqrt{7}$.

24. Если при выполнении какой-нибудь арифметической операции с любыми двумя числами из некоторого множества получается число из этого же множества, то говорят, что данное множество чисел *замкнуто* относительно этой операции. Например, множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ замкнуто относительно сложения и не замкнуто относительно вычитания. Заполните таблицу, используя знак «+», если множество замкнуто относительно указанной операции, и знак «−», если оно не замкнуто:

Операция / Множество	Сложение	Вычитание	Умножение	Деление
$\boldsymbol{N}$	+	−		
$\boldsymbol{Z}$				
$\boldsymbol{Q}$				
$\boldsymbol{R}$				

Почему говорят, что арифметика целых чисел «богаче», чем арифметика натуральных чисел? арифметика рациональных чисел «богаче», чем арифметика целых чисел?

25. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел (кроме случая деления на 0) есть число рациональное.

Образец. Докажем, что сумма двух рациональных чисел есть число рациональное. Возьмем два рациональных числа $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$, где p, q, r, s — целые числа, и найдем их сумму:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}.$$

Числа $ps + qr$ и qs — целые (объясните почему), следовательно, число $\frac{ps + qr}{qs}$, которое является их частным, есть число рациональное.

26. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное рационального числа b и иррационального числа β есть число иррациональное.
Указание. Примените способ рассуждения от противного и воспользуйтесь результатами предыдущего упражнения.

27. Приведите примеры, показывающие, что сумма, разность, произведение и частное двух иррациональных чисел может быть как иррациональным, так и рациональным числом. Замкнуто ли множество иррациональных чисел относительно какой-либо арифметической операции?

28. Сравните:

а) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$,
$-\sqrt{3}$ и $-\sqrt{5}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}}$,
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{5}}$;

в) $1 - \sqrt{3}$ и $1 - \sqrt{5}$,
$\frac{1}{1-\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{1-\sqrt{5}}$;

г) $\sqrt{3} - 1$ и $\sqrt{5} - 1$,
$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$.

29. 1) Какое из равенств верно:

$$|2 - \sqrt{5}| = 2 - \sqrt{5} \text{ или } |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2?$$

2) Запишите без знака модуля:

а) $|3 - \sqrt{10}|$; б) $|\sqrt{18} - 4|$; в) $|\pi^2 - 10|$.

3) Упростите, используя равенство $\sqrt{a^2} = |a|$:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$;

б) $\sqrt{(\sqrt{20}-4)^2}$;

в) $\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{15})^2}$;

г) $\sqrt{(3-\pi)^2}$.

30. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$;

б) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$;

в) $\frac{\sqrt{8}-3}{2\sqrt{2}+3} + \frac{\sqrt{8}+3}{2\sqrt{2}-3}$;

г) $2 - \sqrt{3} + \frac{8}{2+\sqrt{3}}$;

д) $\sqrt{(2-3\sqrt{2})^2} - 2\sqrt{2}$;

е) $2\sqrt{5} - \sqrt{(1-2\sqrt{5})^2}$.

31. Постройте график функции $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$.

а) Проходит ли график этой функции хотя бы через одну точку, обе координаты которой — рациональные числа?
б) Найдите координаты точек графика, у которых абсцисса и ордината равны.

32. Постройте график функции $y = -\frac{1}{\sqrt{2}x}$.

а) Проходит ли график этой функции хотя бы через одну точку, обе координаты которой являются рациональными числами?
б) Найдите координаты точек графика, у которых абсцисса и ордината являются противоположными числами.

33. Заполните таблицы сложения, вычитания, умножения для множества, состоящего из трех чисел: −1; 0; 1. В каждом случае укажите, замкнуто ли относительно этой операции данное множество.

+	−1	0	1
−1			
0			
1			

−	−1	0	1
−1			
0			
1			

×	−1	0	1
−1			
0			
1			

34. (*Задача-исследование.*) Установите, относительно каких арифметических операций замкнуто данное множество:
а) 2^1; 2^2; 2^3; ...; 2^n; ..., где n — натуральное число;
б) множество четных чисел;
в) множество нечетных чисел;
г) множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа.

1.2 Общие свойства неравенств

Неравенства являются важной частью математического аппарата, применяющегося для решения задач теории и практики. Еще в детстве вы познакомились со словами «меньше» и «больше» и узнали знаки $<$ и $>$, с помощью которых записываются соответствующие отношения между числами. Кроме того, в жизни вы часто встречаетесь с выражениями «не меньше» и «не больше» и прекрасно понимаете их. Например, если кто-то решил иметь *не больше* двух троек в четверти, то он выполнит свое намерение, если у него не будет ни одной тройки или он получит одну или две тройки. Его намерение не будет выполнено, если число троек будет больше двух. В этом и состоит обычный смысл выражения «не больше».

В математическом языке для отрицаний *«не меньше»* и *«не больше»* имеются специальные знаки: $\geqslant$ и $\leqslant$, с которыми вы также знакомы. Они читаются так: *«больше или равно»* и *«меньше или равно»*. Словосочетание «меньше или равно» означает в точности то же самое, что и «не больше» (отрицание «больше»), а «больше или равно» — то же, что и «не меньше» (отрицание «меньше»). Таким образом,

неравенство $a \leqslant b$ верно, если $a < b$ или $a = b$;

неравенство $a \geqslant b$ верно, если $a > b$ или $a = b$.

Так, верными являются неравенства $5 \leqslant 8$, $5 \leqslant 5$, а неравенство $5 \leqslant 4$ неверное.

Знаки $<$ и $>$ называются знаками строгого неравенства, а знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ — знаками нестрогого неравенства.

Для работы с неравенствами нужно знать их свойства. Эти свойства, по сути, являются правилами перехода от одних неравенств к другим. Они напоминают свойства равенств, но есть и существенные различия.

Преобразуя выражения, вы всегда записываете цепочку равенств. При этом вы основываетесь на очевидном свойстве равенств: если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$. Оно имеет специальное название — *свойство транзитивности*.

Неравенства также обладают свойством транзитивности:

если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

В справедливости этого свойства легко убедиться, прибегнув к координатной прямой (рис. 1.9): если точка a лежит левее точки b, а точка b — левее точки c, то точка a лежит левее точки c.

Для равенств справедливо также следующее свойство: если $a = b$, то $a + c = b + c$ — прибавив к равным числам одно и то же число, мы опять получим равные числа.

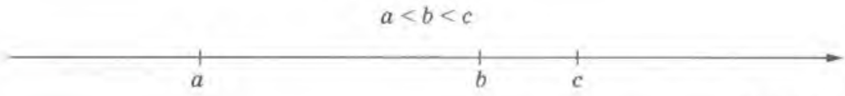


Рис. 1.9

Аналогичное свойство имеет место и для неравенств:

если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.

В самом деле, если точка a расположена левее точки b, то при перемещении этих точек на одно и то же расстояние — влево или вправо — их взаимное расположение не изменится (рис. 1.10).

$a < b$ и $a + c < b + c$

Рис. 1.10

Это свойство неравенств читают так:

к обеим частям неравенства можно прибавить одно и то же число.

Слово «можно» здесь означает, что при таком преобразовании неравенства верное неравенство остается верным, а неверное — неверным. Например, неравенства $5 < 8$ и $5 + 2 < 8 + 2$ оба верные, а неравенства $5 > 8$ и $5 + 2 > 8 + 2$ оба неверные.

Разумеется также, что

из обеих частей неравенства можно вычесть любое число.

Из рассмотренного свойства легко получить полезное следствие:

любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный.

В самом деле, возьмем неравенство $a < b + c$ и прибавим к обеим его частям число $-b$ (или вычтем из его обеих частей число b). Получим $a - b < b + c - b$, т. е. $a - b < c$.

Далее: если $a = b$, то $ac = bc$ — умножив равные числа на одно и то же число, мы опять получим равные числа. А можно ли так поступать с неравенствами, т. е. верно ли, что если $a < b$, то $ac < bc$?

Воспользуемся геометрическим примером. Допустим, a и b — это основания двух прямоугольников с одинаковой высотой c (рис. 1.11). Естественно, площадь прямоугольника с основанием a меньше площади прямоугольника с основанием b, т. е. в этом случае $ac < bc$.

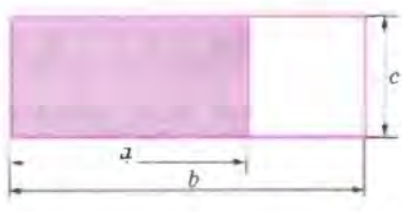


Рис. 1.11

Однако длины сторон прямоугольников всегда положительны. Значит,

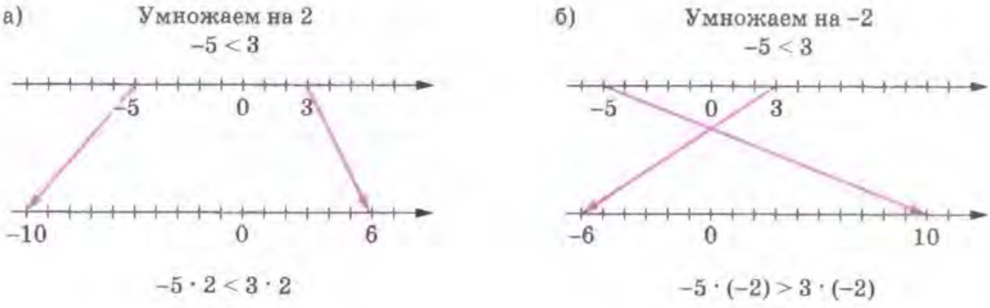


Рис. 1.12

наше геометрическое рассуждение вполне убедительно для положительных чисел a, b и c. А как обстоит дело, если среди них будут и отрицательные числа? Поэкспериментируем на числовых примерах.

Возьмем неравенство $-5 < 3$ и умножим обе его части сначала на 2, а потом на -2. Оказывается, результат зависит от знака множителя: в первом случае неравенство $-5 \cdot 2 < 3 \cdot 2$ верное (рис. 1.12, *а*), а во втором случае верным будет неравенство противоположного знака: $-5 \cdot (-2) > 3 \cdot (-2)$ (рис. 1.12, *б*).

Вообще

если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$;
если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.

Итак:

обе части неравенства можно умножить (или разделить) на одно и то же положительное число, оставив знак неравенства без изменения;
обе части неравенства можно умножить (или разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Вы уже знаете, что равенства можно почленно складывать: если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$. Так же и для неравенств:

если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

В самом деле, каждое слагаемое первой суммы меньше соответствующего слагаемого второй, поэтому первая сумма меньше второй. Таким образом,

если сложить почленно неравенства одного знака, то получим неравенство того же знака.

Например, сложив почленно верные неравенства $-8 < -3$ и $5 < 10$, опять получим верное неравенство $-8 + 5 < -3 + 10$, т. е. $-3 < 7$.

Наконец,

неравенства одного знака с положительными членами можно почленно перемножать:

если $a < b$ и $c < d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$.

Для убедительности воспользуемся геометрической иллюстрацией (рис. 1.13): если a и c — основание и высота первого прямоугольника, а b и d — основание и высота второго, то понятно, что площадь первого прямоугольника меньше площади второго.

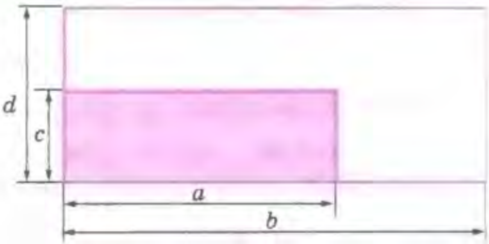


Рис. 1.13

Для отрицательных чисел это свойство не выполняется. Достаточно привести хотя бы один пример: $-2 < 3$ и $-4 < 2$ — верные неравенства, а неравенство $-2 \cdot (-4) < 3 \cdot 2$ неверное.

В заключение заметим, что все свойства были сформулированы для неравенств со знаком $<$. Понятно, однако, что аналогичные свойства справедливы и для других знаков неравенства: $>$, $\leqslant$, $\geqslant$.

A

35. На координатной прямой отмечены числа a, b, c, d (рис. 1.14). Сравните указанную пару чисел и ответ запишите с помощью разных знаков неравенства: а) a и c; б) d и b; в) a и d.

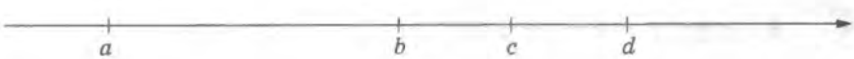


Рис. 1.14

36. Известно, что $a < c$, $b > c$, $d > b$. Сравните: a и b, a и d, c и d.

37. Известно, что $m > 0$, $k < 0$, $m < n$. Сравните: m и k, k и n, n и 0.

38. Можно ли сделать вывод о соотношении между числами a и c, если известно, что:

а) $a > b$, $b = c$; в) $a < b$, $c \geqslant b$; д) $a = b$, $c \leqslant b$;
б) $a > b$, $b \leqslant c$; г) $a \leqslant b$, $b < c$; е) $a \leqslant b$, $c \geqslant b$?

39. Известно, что $c \leqslant a \leqslant b$. Можно ли сравнить числа a и d, если:

а) $b < d$; б) $c < d < b$; в) $d \leqslant c \leqslant a$; г) $d \leqslant b$?

40. Что можно сказать о числах a и b, если выполняются сразу два неравенства: $a \geqslant b$ и $a \leqslant b$?

Расположите в порядке возрастания числа (**41—42**):

41. а) 2,353; 0,353; –3,353; 2,3503; –0,3533; –0,353;

б) 0,2; 0,3; 0,4; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$;

в) 0,41238...; 0,41; 0,041; 0,41222...;
г) –0,3; –0,33; –0,34; –0,333... .

42. а) 7; $\sqrt{50}$; $4\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{\pi}$;

б) $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{3}$; 3,5; 3,555...; г) 9; $4\sqrt{5}$; 3π.

43. Запишите с помощью букв следующие свойства неравенств для знаков $>$, $\leqslant$, $\geqslant$:
а) о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа;
б) об умножении обеих частей неравенства на одно и то же не равное нулю число.

44. Известно, что $a > b$. Запишите неравенство, которое получится, если:
а) к обеим частям данного неравенства прибавить число 10; –17; m; $b + c$; $-b$;
б) из обеих частей данного неравенства вычесть число 6; –9; q; $b - c$; a.

45. Известно, что $a + 8 \leqslant b + 8$. Объясните, почему верно неравенство:
а) $a \leqslant b$; б) $a + 6 \leqslant b + 6$; в) $a - 1 \leqslant b - 1$; г) $a - b \leqslant 0$.

46. Запишите несколько неравенств, которые можно получить из неравенства $x + y - 3 > z + 5$ переносом слагаемых из одной части в другую.

47. Дано неравенство $a + 1 - c < p - q - 6$. С помощью переноса слагаемых из одной части этого неравенства в другую получите неравенство, в котором:
а) все буквы собраны в левой части, а числа — в правой;
б) нет слагаемых со знаком «минус».

48. Известно, что $a < b$. Запишите верное неравенство, которое получится, если:

а) обе части данного неравенства умножить на 25; на -1; на $-\frac{1}{2}$;

б) обе части данного неравенства разделить на 2; на -3; на $\frac{1}{9}$.

49. Известно, что $\frac{3}{7}m > \frac{3}{7}n$. Верно ли неравенство:

а) $3m > 3n$; б) $m < n$; в) $-m > -n$; г) $-6m < -6n$; д) $\frac{7}{3}m > \frac{7}{3}n$?

50. Запишите с помощью букв следующие свойства неравенств для знаков $>$, $\leqslant$, $\geqslant$:

а) о почленном сложении неравенств;

б) о почленном умножении неравенств.

51. Верно ли, что:

а) если $x > 2$ и $y > 10$, то $x + y > 12$; $x + y > 10$; $x + y > 20$;

б) если $x < \frac{1}{2}$ и $y < \frac{1}{2}$, то $x + y < 1$; $x + y < 0$; $x + y < 3$?

52. Не вычисляя значения суммы, сравните:

а) $0{,}7541 + 0{,}521$ и 1;

б) $298 + 275 + 361$ и 1000;

в) $0{,}204 + 0{,}205 + 0{,}215 + 0{,}218 + 0{,}209$ и 1.

Образец. Сравним $2{,}48 + 2{,}37 + 2{,}45 + 2{,}5$ и 10:
$2{,}48 + 2{,}37 + 2{,}45 + 2{,}5 < 2{,}5 + 2{,}5 + 2{,}5 + 2{,}5 = 10$.
Значит, данная сумма меньше 10.

53. Сравните $a + b + c$ и $p + q + r$, если:

а) $a < p$, $b > q$, $c = r$;

б) $a \geqslant p$, $b \geqslant q$, $c > r$;

в) $a = p$, $b = q$, $c \leqslant r$.

54. Верно ли, что:

а) если $x > 10$ и $y > 20$, то $xy > 200$; $xy > 100$; $xy > 300$;

б) если $0 < x < 2$ и $0 < y < 5$, то $xy < 10$; $xy < 12$; $xy < 9$;

в) если $x < 3$ и $y < 2$, то $xy < 6$?

55. Сравните ac и bd, где a, b, c, d — положительные числа, если:

а) $a < b$, $c = d$; б) $a > b$, $c \geqslant d$; в) $a \leqslant b$, $c \leqslant d$; г) $a = b$, $c > d$.

56. Известно, что $2{,}1 < a < 2{,}2$ и $3{,}4 < b < 3{,}5$. Оцените:

а) $3a$; б) $-2a$; в) $5 + a$; г) $1 - b$; д) $a + b$; е) ab; ж) $2(a + b)$; з) $3ab$.

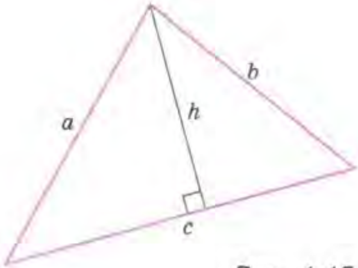


Рис. 1.15

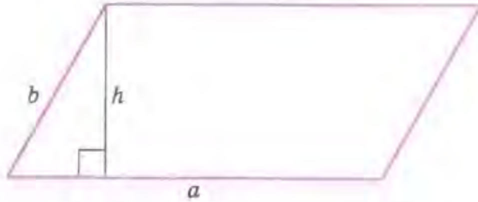


Рис. 1.16

57. Зная, что $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, оцените:

а) 2π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) -10π; г) $-\frac{\pi}{3}$.

58. Известно, что $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$ и $3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$. Найдите границы значения выражения:

а) $\sqrt{6} + \sqrt{10}$; б) $2\sqrt{15}$; в) $2\sqrt{6} + 3\sqrt{10}$; г) $-\sqrt{60}$.

59. Оцените площадь и периметр треугольника, изображенного на рисунке 1.15, если известны границы длин его сторон и одной из высот, выраженные в сантиметрах:

$4 < a < 5,\ \ 3 < b < 4,\ \ 4 < c < 5,\ \ 2 < h < 3.$

60. Оцените площадь и периметр параллелограмма, если известны границы длин его сторон и одной из высот, выраженные в сантиметрах (рис. 1.16):

$10 < a < 11,\ \ 5 < b < 6,\ \ 3 < h < 4.$

61. Оцените площадь и периметр прямоугольника со сторонами a см и b см, указав их границы с одним знаком после запятой, если:

а) $1{,}6 \leqslant a \leqslant 1{,}7$; $3{,}2 \leqslant b \leqslant 3{,}3$;

б) $2{,}5 \leqslant a \leqslant 2{,}6$; $1{,}7 \leqslant b \leqslant 1{,}8$.

62. Николай договорился о встрече в метро в 10 часов. На дорогу от дома до метро у Николая уходит от 10 до 15 мин, а на поездку в метро до места встречи — от 18 до 20 мин. Успеет ли он к назначенному времени, если выйдет из дома:
а) в 9 ч 20 мин; б) в 9 ч 40 мин; в) в 9 ч 30 мин?

63. Трехтомную энциклопедию и десятитомное собрание сочинений хотят разместить на книжной полке длиной 80 см. Возможно ли это, если толщина тома энциклопедии (a см) и толщина тома собрания сочинений (b см) находятся в границах $6{,}5 < a < 7{,}4$; $2{,}9 < b < 4{,}3$?

64. Можно ли сравнить a и d, если известно, что:
а) $a = b$, $b < c$, $c \leqslant d$;
б) $a \geqslant c$, $b = c$, $d \leqslant b$;
в) $a < b$, $c \geqslant b$, $c \geqslant d$;
г) $a \leqslant b$, $c > b$, $c \leqslant d$?

Не пользуясь калькулятором, расположите в порядке возрастания данные числа (**65—66**):

65. а) $\frac{2}{3}$; $\sqrt{0{,}5}$; 0,66; 0,666; $\sqrt{0{,}3}$;

б) $\frac{1}{6}$; $\sqrt{0{,}02}$; $\sqrt{0{,}046}$; 0,16; 0,166.

66. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $2\sqrt{\frac{1}{20}}$; $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\frac{1}{6}$;
б) $\frac{\sqrt{7}}{7}$; $\frac{7}{\sqrt{7}}$; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{0{,}1}$.

67. Положительным или отрицательным является число a, если:
а) $a - 2 < b - 2$ и $b < -1$;
б) $\frac{1}{5}a > \frac{1}{5}b$ и $b \geqslant 100$;
в) $-4a > -4b$ и $b \leqslant 0$;
г) $1 - a < 1 - b$ и $b > 1$?

68. Известно, что $a \geqslant b$. Сравните, если возможно:
а) $a + 2$ и $b + 1$;
б) $a + 10$ и $b - 1$;
в) $3a - 1$ и $3b + 10$;
г) $1 - 2a$ и $3 - 2b$.

69. Определите, можно ли перевезти на автомобиле, грузоподъемность которого 5 т, одновременно 2 м^3 бука и 3 м^3 ясеня, если известны границы плотности ρ (в г/см^3) бука ($0{,}7 < \rho < 0{,}9$) и ясеня ($0{,}6 < \rho < 0{,}8$).

70. Оцените площадь и периметр прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\sqrt{3}$ см и $\sqrt{2}$ см. (Границы в ответе запишите в виде десятичных дробей с одним знаком после запятой.)

71. а) Докажите, что периметр выпуклого четырехугольника больше суммы длин его диагоналей.
б) Докажите, что периметр выпуклого пятиугольника больше полусуммы длин его диагоналей.

72. Оцените разность $x - y$, если:
а) $3 < x < 4$, $10 < y < 11$;
б) $20 < x < 21$, $35 < y < 36$.

73. (*Задача-исследование.*)
1) Дано: $m > n$. Поэкспериментируйте с числами и сделайте вывод о неравенствах, связывающих числа $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$. (Рассмотрите случаи: $m > 0$ и $n > 0$; $m < 0$ и $n < 0$; $m > 0$ и $n < 0$.)

2) Дано: $m > n$, $p > m$, $q < n$ и все эти числа положительные. Расположите в порядке возрастания числа: $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$.

3) Оцените $\frac{1}{y}$ и $\frac{x}{y}$, если $9 < x < 10$, $2 < y < 3$.

1.3 Решение линейных неравенств

Рассмотрим неравенство $2x - 7 > 5$. При одних значениях переменной x оно обращается в верное числовое неравенство, а при других нет. Так, если вместо x подставить число 10, то получится верное неравенство $2 \cdot 10 - 7 > 5$, а если вместо x подставить число 3, то получится неверное неравенство $2 \cdot 3 - 7 > 5$. Говорят, что число 10 является *решением неравенства* $2x - 7 > 5$. Число 3 его решением не является. Неравенство имеет и другие решения, например: 7,5; 12; 43,5. И вообще у него бесконечно много решений.

Решить неравенство с одной переменной — это значит найти все значения переменной, при которых данное неравенство верно, или убедиться, что таких значений нет.

Неравенства решают почти так же, как и уравнения.

■ Пример 1. Решим уравнение $3x + 8 = 11$ и неравенства $3x + 8 > 11$ и $3x + 8 < 11$:

$3x + 8 = 11$	$3x + 8 > 11$	$3x + 8 < 11$
$3x = 11 - 8$	$3x > 11 - 8$	$3x < 11 - 8$
$3x = 3$	$3x > 3$	$3x < 3$
$x = 1$	$x > 1$	$x < 1$

Сначала мы в каждом случае перенесли слагаемое 8 в правую часть, изменив его знак на противоположный, затем упростили правую часть и, наконец, разделили обе части уравнения и каждого из неравенств на число 3 (знаки неравенств оставили прежними, так как делили на положительное число).

Корнем уравнения $3x + 8 = 11$ является число 1 (рис. 1.17). Множество решений неравенства $3x + 8 > 11$ — все числа, расположенные справа от 1. Это множество можно записать по-разному: в виде числового промежутка $(1; +\infty)$ или в виде неравенства

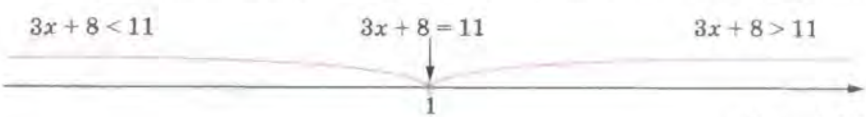


Рис. 1.17

$x > 1$, задающего этот промежуток. Множество решений неравенства $3x + 8 < 11$ — все числа, лежащие слева от 1, т. е. промежуток $(-\infty; 1)$.

В процессе решения мы заменяли одно уравнение или неравенство другим, имеющим те же решения. Так, неравенство $3x + 8 > 11$ имеет те же решения, что и неравенство $3x > 11 - 8$. В самом деле, пусть при каком-либо значении x первое неравенство верно. Тогда на основании известного свойства неравенств можно утверждать, что при этом значении x верно и второе неравенство. Если же при каком-то значении x первое неравенство неверно, то неверно и второе. Таким образом, неравенства $3x + 8 > 11$ и $3x > 11 - 8$ верны или неверны при одних и тех же значениях x. Значит, их множества решений совпадают.

Уравнения (или неравенства), у которых множества решений совпадают, называют *равносильными*.

Заметим, что уравнения (неравенства), не имеющие решений, тоже считают равносильными.

Правила, которыми вы пользуетесь при решении уравнений, — о переносе слагаемого из одной части в другую, об умножении обеих частей уравнения на неравное нулю число — позволяют заменять одно уравнение другим, ему равносильным.

Соответствующие правила применяются и при решении неравенств. Они вытекают из свойств неравенств и позволяют выполнять преобразования, приводящие к равносильному неравенству.

Неравенство, равносильное данному, получится, если:
1) перенести слагаемое из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный;
2) умножить (или разделить) обе части неравенства на одно и то же положительное число, оставив при этом знак неравенства без изменения;
3) умножить (или разделить) обе части неравенства на одно и то же отрицательное число, заменив при этом знак неравенства на противоположный.

■ Пример 2. Решим неравенство $27 - 2(5x + 1) \geqslant 0$:

$27 - 10x - 2 \geqslant 0$	— раскрыли скобки;
$25 - 10x \geqslant 0$	— упростили выражение, стоящее слева;
$-10x \geqslant -25$	— перенесли слагаемое 25 в правую часть, изменив знак на противоположный;
$x \leqslant 2,5$	— разделили обе части неравенства на -10 и одновременно поменяли знак равенства на противоположный.

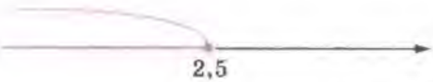


Рис. 1.18

Множество решений неравенства показано на рисунке 1.18.

О т в е т. $(-\infty;\ 2{,}5]$.

■ П р и м е р 3. Решим неравенство $\frac{x}{3} + \frac{5 - 3x}{6} < 1$.

Как и при решении уравнения, сначала избавимся от дробей, умножив обе части неравенства на 6:

$$2x + 5 - 3x < 6,$$
$$-x < 1,$$
$$x > -1.$$

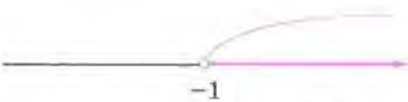


Рис. 1.19

Множество решений неравенства показано на рисунке 1.19.

О т в е т. $(-\infty;\ -1)$.

■ П р и м е р 4. Решим неравенство $4(3x - 5) > 3(1 + 4x)$. Раскрыв скобки, получим

$$12x - 20 > 3 + 12x,$$
$$12x - 12x > 3 + 20,$$
$$0x > 23.$$

Неравенство $0x > 23$ при любых значениях x обращается в неверное числовое неравенство $0 > 23$. Значит, рассматриваемое неравенство решений не имеет. В таких случаях говорят и по-другому: множество решений неравенства пусто. Для *пустого множества* есть специальный знак: $\varnothing$. Поэтому ответ можно записать словами «решений нет» или символически: $\varnothing$.

Заметим, что если бы мы решали неравенство

$$4(3x - 5) < 3(1 + 4x),$$

то пришли бы к неравенству $0x < 23$. Это неравенство при любых значениях x обращается в верное числовое неравенство $0 < 23$, а значит, его решением является любое число. Множество решений неравенства символически можно записать так: $(-\infty;\ +\infty)$.

Каждое из рассмотренных выше неравенств с помощью преобразований сводилось к неравенству вида $ax > b$ (или $ax < b$), где x — переменная, a и b — некоторые числа.

Такое неравенство, как и уравнение вида $ax = b$, называется *линейным неравенством*.

И при решении линейного уравнения, и при решении линейного неравенства в зависимости от коэффициентов a и b возможны разные случаи, причем тут есть определенная аналогия.

Уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$. Если $a = 0$, а $b \neq 0$, то уравнение корней не имеет. (Объясните, почему, например, не имеет корней уравнение $0x = 3$.) Если $a = 0$ и $b = 0$, т. е. уравнение имеет вид $0x = 0$, то его корнем служит любое число.

Множеством решений неравенства $ax > b$ при $a \neq 0$ служит открытый луч $x > \frac{b}{a}$ (если $a > 0$) или $x < \frac{b}{a}$ (если $a < 0$). Если $a = 0$, т. е. неравенство имеет вид $0x > b$, то при $b \geqslant 0$ оно не имеет решений, а при $b < 0$ его решением служит любое число. (Объясните, почему, например, неравенство $0x > 3$ не имеет решений, а множеством решений неравенства $0x > -3$ служит промежуток $(-\infty; +\infty)$.)

А

74. Какие из чисел -3; -1; 0; 1, 2; 3 являются решениями данного неравенства, а какие не являются:

а) $2x + 8 < 12$;
б) $y < 3y + 1$;
в) $z^2 \leqslant z$;
г) $\frac{4}{a-2} > 0$?

75. Подберите какие-нибудь два числа, являющиеся решениями данного неравенства, и два числа, не являющиеся его решениями:

а) $x < 5x$; б) $\frac{1}{y} > y$; в) $a > -a^2$.

76. Объясните, как из первого неравенства получить второе, ему равносильное:

а) $x - 2 < 3$; $x < 5$;
б) $3u \leqslant 12$; $u \leqslant 4$;
в) $\frac{y}{3} < 2$; $y < 6$;
г) $-y > 8$; $y < -8$;
д) $-7y \geqslant 2$; $y \leqslant -\frac{2}{7}$;
е) $-\frac{t}{5} \leqslant 0{,}1$; $t \geqslant -0{,}5$;
ж) $\frac{x+2}{4} < 1$; $x < 2$;
з) $2u + 1 \leqslant 5$; $u \leqslant 2$.

77. Решите неравенство и изобразите множество решений на координатной прямой:

а) $x - 15 \geqslant -5$; г) $12y > 6$; ж) $-y > 3$;
б) $z + 10 < -6$; д) $7u \leqslant 35$; з) $-2z \leqslant -9$;
в) $8 + x < 0$; е) $\frac{x}{6} < -2$; и) $-\frac{u}{2} \geqslant 12$.

78. Составьте пять неравенств, множеством решений каждого из которых служит промежуток $x > -3$.

Решите неравенство (**79—83**):

79. а) $5x + 2 \geqslant 7$; д) $-2y + 6 < -4$; и) $-1 - 3z \leqslant -1$;
б) $2y - 3 < 11$; е) $-12u - 2 > 14$; к) $-\frac{1}{3}z + 7 < 3$;
в) $2 + \frac{u}{2} \leqslant -1$; ж) $-3 \geqslant 5x - 7$; л) $15 - \frac{2}{3}x \leqslant 16$;
г) $\frac{z}{3} - 1 > -5$; з) $16 > 3y - 5$; м) $1 \geqslant 1 - \frac{u}{8}$.

80. а) $3y + 7 \leqslant 1 - 5y$; д) $\frac{3}{4}z - \frac{1}{2} \geqslant z + \frac{1}{4}$;
б) $4x + 1 < 2x - 3$; е) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} \leqslant \frac{2}{3} - x$;
в) $5 - 4u > 2u - 4$; ж) $-\frac{x}{4} - 3 < \frac{x}{8} - 1$;
г) $1 - 2y \geqslant 2y - 3$; з) $1 - z > \frac{z}{2} + 1$.

81. а) $14 \leqslant 2 - 2(x - 1)$; д) $6(x + 12) \geqslant 3(x - 4)$;
б) $-3(z + 3) + 20 > 5$; е) $4(y - 2) < 5(y - 3)$;
в) $\frac{1}{2}(3x - 1) > 10$; ж) $(3y + 2) - 3(2y + 3) > 12$;
г) $\frac{2}{3}(4x + 7) < 8$; з) $5(4y + 3) - 7(3y - 4) \leqslant 10$.

82. а) $\frac{2y}{3} - \frac{y}{6} < 1$; г) $\frac{4x + 1}{2} > \frac{7x - 30}{6}$;
б) $\frac{12 - 2x}{3} > \frac{3x - 1}{4}$; д) $\frac{y + 17}{4} < \frac{3(10 + y)}{5}$;
в) $\frac{2z + 9}{5} \geqslant \frac{1 - 3z}{7}$; е) $\frac{2(z - 2)}{9} \leqslant \frac{3 + z}{7}$.

83. а) $12 - y < \frac{5(y-1)}{6}$; г) $10z - \frac{9(3z+7)}{4} > 33$;

б) $\frac{3(4x+3)}{5} > 4x - 3$; д) $\frac{1+8x}{11} \geqslant 10 - \frac{3x+2}{2}$;

в) $\frac{3z+6}{5} - \frac{3z-8}{4} \geqslant 2$; е) $\frac{y-4}{3} - 2 < \frac{y}{2}$.

84. Определите, при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения и при каких — отрицательные значения:

а) $y = 3x - 2$; в) $y = x + 5$;

б) $y = -4x - 1$; г) $y = -0{,}5x$.

В каждом случае проиллюстрируйте свое решение с помощью графиков функции.

85. Определите, при каких значениях аргумента график функции $y = f(x)$ расположен выше графика функции $y = g(x)$, а при каких — ниже (выполните задание двумя способами: решив неравенство и построив в одной системе координат графики данных функций):

а) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -2x + 1$; б) $f(x) = 0{,}5x$, $g(x) = 3 - x$.

86. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2x}$; в) $\sqrt{3x - 10}$; д) $\frac{2}{\sqrt{1-x}}$;

б) $\sqrt{-x}$; г) $\sqrt{\frac{2x-6}{3}}$; е) $\sqrt{4 - 10x}$?

87. Решите задачу, составив по ее условию неравенство:

а) В регионе X фермер перевозит картофель в мешках по 40 кг в грузовике, масса которого без груза равна 4500 кг. Какое количество мешков может находиться в грузовике, чтобы он мог переехать через ручей по мосту, выдерживающему груз в 7 т?

б) В гостинице города Z за номер с телефоном надо доплачивать 15 р. в сутки плюс 30 к. за каждую минуту разговора. Турист останавливается в гостинице на 7 дней. Сколько минут он может говорить по телефону, если он планирует заплатить за переговоры не больше 120 р.?

88. Длины сторон треугольника обозначены буквами x, y, z. Определите, какую длину может иметь третья сторона треугольника, если известны длины двух других его сторон:

а) $x = 12$ см, $y = 10$ см; б) $y = 21$ см, $z = 16$ см.

89. а) Дом Татьяны находится на расстоянии 800 м от школы и 500 м от дома Наташи. На каком расстоянии от школы может находиться дом Наташи?
б) Дорога от дома до стадиона занимает у Николая 20 мин, а от дома до школы — 12 мин. Сколько минут может занять у него дорога от школы до стадиона?
Указание. Изобразите на рисунке все дороги отрезками.

Б

90. Объясните, почему неравенство не имеет решения или почему его решением является любое число:
а) $x < x + 5$; в) $2x - 3 < 2x + 4$; д) $x^2 + 1 \geqslant 0$;
б) $x > x - 1$; г) $x^2 < 0$; е) $|x + 10| < 0$.

91. Решите неравенство:
а) $5(7 - 2x) + 15 \geqslant 6(x - 5)$;
б) $9(z + 4) - 2(6z - 8) > 2z$;
в) $7(1 - z) + 15z \leqslant -2(z - 5) - 1$;
г) $2(x - 4) - (x - 5) \leqslant 1 - 7(2 - x)$.

92. Приведите неравенство к виду $0x \leqslant b$ и укажите множество его решений:
а) $3x - (x - 1) \leqslant \frac{1}{3}(6x + 3)$;
б) $7\left(x + \frac{3}{2}\right) - x \leqslant 6x - 19$;
в) $2(3x + 1) + x - 2 \leqslant 4x + 5 - 3(1 - x)$;
г) $(2x + 1)^2 + (x - 2)^2 \leqslant 5(x + 1)(x - 1)$.

93. Решите неравенство:
а) $\frac{2 - x}{6} + \frac{x + 7}{15} < \frac{8 - x}{2}$;
б) $\frac{2z + 1}{18} - \frac{z + 2}{9} > \frac{z - 6}{6}$;
в) $\frac{19}{4} - \frac{5y + 16}{3} \leqslant \frac{3y + 1}{4} - 2y$;
г) $\frac{z - 3}{8} + \frac{3z - 37}{2} \leqslant \frac{25 - z}{4} + 3$;
д) $\frac{5y - 9}{10} - \frac{5 - 6y}{5} \geqslant \frac{10y - 9}{14} - \frac{3 - 4y}{7}$;
е) $\frac{x + 5}{5} - \frac{x + 4}{3} + \frac{x - 1}{2} > x - 4$;

ж) $\frac{y-4}{2} - \frac{y-3}{3} \leqslant \frac{2(y-2)}{3} - \frac{y+1}{2}$;

з) $3z + \frac{3-2z}{2} \geqslant z - \frac{1-5z}{5}$.

94. а) Найдите наименьшее целое число, при котором разность многочленов $-x^2 + x - 7$ и $12 + 6x - x^2$ отрицательна.
б) Найдите наибольшее целое число, при котором разность квадратов выражений $2(x - 3)$ и $2x - 1$ положительна.

95. Найдите все положительные решения неравенства:

а) $\frac{x}{2} - 3 < \frac{x}{3} - 1$; б) $2x + \frac{1}{4} < \frac{x}{2} + 4$.

96. Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

а) $\frac{2x-1}{2} > \frac{1+5x}{8} - 1$, $[-2; 3]$;

б) $\frac{(2x+1)^2}{3} - \frac{2x+1}{2} \leqslant \frac{4x^2}{3} - 1$, $[-3; -1]$;

в) $\frac{x+2}{20} - \frac{1-2x}{5} \leqslant \frac{3x}{20} - \frac{1}{10}$, $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;

г) $\frac{3x-2}{5} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{4x+1}{5} - \frac{1}{2}$, $[-15; 15]$.

97. а) Найдите все целые положительные решения неравенства $2x < \sqrt{20}$.
б) Найдите все целые отрицательные решения неравенства $-3x < \sqrt{40}$.

98. При каких значениях a корень уравнения является числом положительным:

а) $3x = a + 12$; б) $6(x + 1) = 2a + 5$; в) $ax - 4 = x + 8$?

В каждом случае возьмите какое-нибудь значение a из найденного множества и решите уравнение.

99. При каких значениях c уравнение не имеет корней:

а) $2x^2 - 10x + c = 0$; б) $-3x^2 + 2x + c = 0$?

В каждом случае ответьте, имеет ли уравнение корни при c, равном $-0{,}5$; $-0{,}1$; 0; $12{,}5$; $15{,}7$.

100. При каких значениях a уравнение имеет два корня:

а) $ax^2 + 2x + 6 = 0$; б) $ax^2 - 3x - 4 = 0$?

101. Найдите все целые положительные значения c, при которых квадратный трехчлен $2x^2 + 8x + c$ можно разложить на множители.

102. Найдите все целые отрицательные значения c, при которых квадратный трехчлен $5x^2 - 10x - c$ можно разложить на множители.

1.4 Решение систем линейных неравенств

Возьмем выражение $\sqrt{3x-9} + \sqrt{10-2x}$. Подставим вместо x какое-нибудь число, например 2. Получим выражение $\sqrt{-3} + \sqrt{6}$, которое не имеет смысла, так как в первом слагаемом под знаком корня оказалось отрицательное число.

Подставим вместо x число 6. Получим выражение $\sqrt{9} + \sqrt{-2}$, которое также не имеет смысла. Теперь отрицательное число содержится под знаком корня во втором слагаемом.

Попробуем подставить вместо x число 4. Получим выражение $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Оно имеет смысл, так как в каждом случае под знаком корня записано положительное число.

Выбрав случайным образом число 4, мы путем непосредственной подстановки убедились, что при этом значении переменной выражение $\sqrt{3x-9} + \sqrt{10-2x}$ имеет смысл. А как найти все такие значения переменной? Иными словами, как найти множество допустимых значений переменной для этого выражения?

Понятно, что выражение $\sqrt{3x-9} + \sqrt{10-2x}$ имеет смысл при тех и только тех значениях переменной, при которых одновременно выполняются два условия: $3x - 9 \geqslant 0$ и $10 - 2x \geqslant 0$.

Решив первое неравенство, получим, что $x \geqslant 3$. Решив второе неравенство, получим, что $x \leqslant 5$. Теперь нужно найти значения переменной x, которые удовлетворяют одновременно двум этим неравенствам. Для этого с помощью координатной прямой найдем общую часть, или, как говорят, *пересечение*, числовых промежутков, соответствующих неравенствам $x \geqslant 3$ и $x \leqslant 5$. Получим отрезок с концами в точках 3 и 5 (рис. 1.20). Таким образом, множеством допустимых значений переменной x в выражении

$$\sqrt{3x-9} + \sqrt{10-2x}$$

служит промежуток [3; 5].

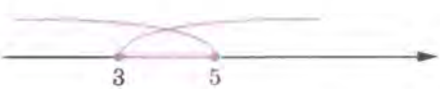


Рис. 1.20

В тех случаях, когда требуется найти множество значений переменной, удовлетворяющих одновременно двум или нескольким неравенствам, говорят, что нужно *решить систему неравенств*. Систему неравенств, как и систему уравнений, символически обозначают уже знакомым вам знаком — фигурной скобкой. Так, при нахождении множества допустимых значений переменной в выражении $\sqrt{3x-9} + \sqrt{10-2x}$ нам фактически пришлось решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - 9 \geqslant 0 \\ 10 - 2x \geqslant 0. \end{cases}$$

Множеством решений рассмотренной системы служит отрезок. Однако при решении систем неравенств возможны и другие случаи. Приведем примеры.

■ Пример 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 8x - 5 > 11 \\ 7 + 2x > 4. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство отдельно, а затем найдем множество их общих решений.

Имеем

1) $8x - 5 > 11$, $8x > 16$, $x > 2$;

2) $7 + 2x > 4$, $2x > -3$, $x > -1{,}5$.

Изобразим на координатной прямой множество решений каждого из неравенств (рис. 1.21). Из рисунка видно, что общей частью (пересечением) этих двух лучей служит множество чисел, больших 2, т. е. промежуток $(2; +\infty)$.

Ответ. $(2; +\infty)$.

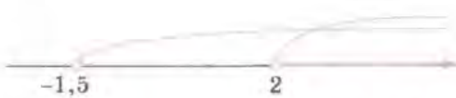


Рис. 1.21

■ Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 > 3 \\ 2x + 4 < x + 7. \end{cases}$$

Решение этой системы оформим следующим способом: будем последовательно переходить от одной системы к другой, равносильной ей, решая параллельно сразу оба неравенства.

Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} > 2 \\ 2x - x < 7 - 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x < 3. \end{cases}$$

Рис. 1.22

Чтобы найти множество решений системы, обратимся к координатной прямой (рис. 1.22). Мы видим, что неравенства $x > 4$ и $x < 3$ общих решений не имеют. Таким образом, система решений не имеет.

Ответ. $\varnothing$.

■ Пример 3. Решим двойное неравенство

$$11 < 3 + 4x < 23.$$

Нужно найти такие значения переменной, при которых

$$3 + 4x > 11 \text{ и } 3 + 4x < 23,$$

т. е. нужно решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3 + 4x > 11 \\ 3 + 4x < 23. \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} 4x > 8 \\ 4x < 20; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x < 5. \end{cases}$$

Рис. 1.23

Множество решений системы, а значит, и заданного двойного неравенства изображено на рисунке 1.23.

Ответ. (2; 5).

Заметим, что запись решения можно вести и с помощью двойных неравенств. В этом случае она будет выглядеть так:

$$11 < 3 + 4x < 23,$$
$$11 - 3 < 4x < 23 - 3,$$
$$8 < 4x < 20,$$
$$2 < x < 5.$$

A

103. Соотнесите систему неравенств с соответствующим ей числовым промежутком:

а) $\begin{cases} x < 1 \\ x \leqslant 3; \end{cases}$

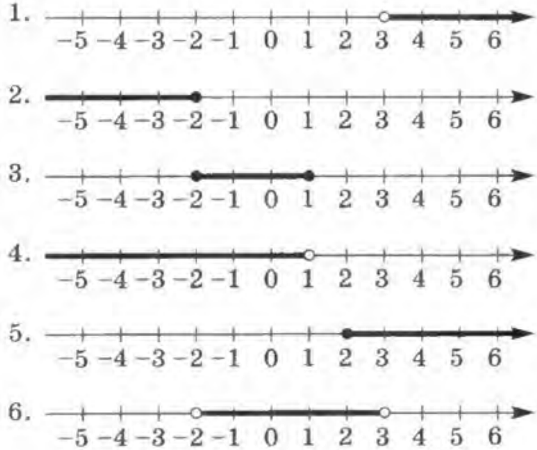
б) $\begin{cases} x \leqslant -2 \\ x < 1; \end{cases}$

в) $-2 < x < 3;$

г) $\begin{cases} x > 1 \\ x > 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant -2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \geqslant 2. \end{cases}$



104. Изобразите на координатной прямой каждое из заданных множеств (если оно не пусто):

а) $\begin{cases} x > 1,5 \\ x < 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < 2 \\ x > 3; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x < 7 \\ x < 1,5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x > 4 \\ x > 6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x > 4 \\ x \geqslant -7; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x \leqslant -4 \\ x \geqslant -1,7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ x \leqslant -0,5; \end{cases}$ е) $-2 \leqslant x \leqslant 5;$ и) $-3 \leqslant x < 1.$

105. Решите систему неравенств и ответьте на вопрос, сколько целых решений имеет эта система:

а) $\begin{cases} x - 2 > -1 \\ x + 5 < 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5 - z < 2 \\ 4 + z > 7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x - 1 \leqslant -1 \\ 2x - 1 \geqslant -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - 3 < 2 \\ y + 2 \geqslant -6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1 + y \leqslant -3 \\ y - 2 \geqslant -8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 9 - 2z > 11 \\ 3z - 4 < 5. \end{cases}$

Решите систему неравенств (**106—108**):

106. а) $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 2 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 10 - 5z > 0 \\ 2z - 1 < 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2 - 6x > 0 \\ 2 - 4x < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3y - 12 < 0 \\ 2y + 3 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1 - 2y \geqslant 0 \\ 4y - 1 \geqslant 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2 + 3z < 0 \\ 1 + 3z < 0. \end{cases}$

107. а) $\begin{cases} 7x - 12 \geqslant 13x \\ 1 - 4x > 13; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 6y - 1 < 3y + 14 \\ 8 - y > 3y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2z - 9 \geqslant 3z - 3 \\ 3z + 4 \geqslant z + 10; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 6 - 4x \geqslant 4 - 3x \\ 7 - 3x \geqslant 6 - 4x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5y < 2y + 9 \\ 8 - 2y > 10; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 3z + 2 \geqslant 7 + 4z \\ 4z - 1 < 2z + 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2z + 6 > 3z - 1 \\ 5z - 1 \geqslant 2z + 8; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2y + 8 \leqslant y + 4 \\ 2y + 8 \geqslant y - 1. \end{cases}$

108. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{5} > 3 \\ 21 - x > 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2y > -3 \\ \dfrac{y}{8} - \dfrac{y}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{z-1}{2} > 1 \\ z + 3 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{z}{3} + z < 2 \\ 2z - 4 < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 4 > 4 \\ \dfrac{x}{5} - x \geqslant 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{2y-2}{2} \leqslant -\dfrac{1}{3} \\ 1 - 4y \geqslant 0. \end{cases}$

Решите двойное неравенство (**109—110**):

109. а) $3 < 3x < 18$; г) $0 < z + 8 < 28$;
б) $4 \leqslant -2y \leqslant 10$; д) $14 \leqslant x - 1 < 15$;
в) $-1 < 3z < 12$; е) $-2{,}5 < y - 2{,}5 \leqslant 3$.

110. а) $-3 < 2x + 1 < 15$; г) $-3 < 1 + 4x < 0$;
б) $1 \leqslant 10 - z \leqslant 9$; д) $\dfrac{1}{3} < -2 - y < \dfrac{1}{2}$;
в) $-14 \leqslant 1 - 3y \leqslant -11$; е) $-5 \leqslant 5z - 3 < 7$.

111. Какая из следующих ситуаций возможна, а какая невозможна?
а) Один класс за 4 тетради по 20 р. и 12 шариковых ручек заплатил меньше 200 р., а другой — за одну такую же тетрадь и 15 таких же шариковых ручек заплатил больше 200 р.
б) Один покупатель за 3 кг огурцов по 30 р. за килограмм и 2 кг моркови заплатил больше 150 р., а другой — за 4 кг таких же огурцов и один килограмм моркови заплатил меньше 160 р.

112. а) Задумали целое положительное число. Если к нему прибавить 7, то сумма окажется меньше утроенного задуманного числа. Если же к нему прибавить 10, то сумма будет больше удвоенного числа. Какое число могли задумать?
б) Два ученика играли в игру «Задумай число». Первый говорит: «Я задумал целое число. Прибавив к нему 20, я получу больше, чем если бы умножил это число на 8, но меньше,

чем если бы умножил его на 9. Какое число я задумал?» Подумав, второй сказал, что этого не может быть. Докажите это.

113. Стороны треугольника выражаются различными целыми числами. Какую длину может иметь одна из его сторон, если:
а) длины двух других сторон 5 см и 4 см, а периметр не превосходит 15 см;
б) длины двух других сторон 8 см и 5 см, а периметр не превосходит 20 см?

Б

114. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3-\dfrac{z-1}{2}>1 \\ 2z+\dfrac{z}{3}<7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5}-1\leqslant 2 \\ \dfrac{x}{5}-2\geqslant x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2(3y-1)-4(2y+3)<10 \\ \dfrac{y-3}{2}-\dfrac{y+4}{3}<0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{y+1}{4}-\dfrac{y+1}{6}<\dfrac{y+1}{3} \\ \dfrac{y-3}{4}+y<2y-\dfrac{y-3}{8}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 1-\dfrac{2x+3}{3}>2-\dfrac{x+1}{4} \\ 5(x-4)-8>6(2x-1)-1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{2z-1}{4}+\dfrac{z+1}{2}\leqslant 3z+1 \\ \dfrac{z-3}{2}+2(z-1)\leqslant z+5. \end{cases}$

115. Решите двойное неравенство:

а) $-8<2x-4<1;$ г) $0\leqslant\dfrac{1-2x}{3}<3;$

б) $-1\leqslant\dfrac{3x-4}{5}\leqslant 1;$ д) $2<\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}\leqslant 10;$

в) $-5\leqslant\dfrac{1-x}{2}\leqslant 0;$ е) $-3<1-\dfrac{2-x}{3}<3.$

Решите систему неравенств **(116—117)**:

116. а) $\begin{cases} x>-3 \\ x>-1 \\ x<0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-5<0 \\ x+3\geqslant 1 \\ 1-3x<4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 10-5x>0 \\ 2+x\geqslant 0 \\ -x<5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y<-0{,}5 \\ y<-\dfrac{1}{3} \\ y<-0{,}6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -7y\geqslant 14 \\ \dfrac{y}{3}>-1 \\ 3(y-1)<6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} z-4<0 \\ -\dfrac{z}{7}>1 \\ 3z+1\geqslant 4. \end{cases}$

117. а) $\begin{cases} -2 < x < 7 \\ \frac{x}{5} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -15 \leqslant 3z \leqslant -1 \\ \frac{1-z}{2} \geqslant 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -2 \leqslant y - 1 \leqslant 0 \\ 1 - 2y < 3 - 2y. \end{cases}$

118. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} \sqrt{10} - x > 0 \\ 2x - 3 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + \sqrt{12} > 0 \\ 3x - 1 < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sqrt{2} + 2x < 0 \\ 3x + 10 > 0. \end{cases}$

119. При каких значениях c система неравенств

$$\begin{cases} 2x - 17 \geqslant 0 \\ x - c \leqslant 0 \end{cases}$$

а) имеет решения; б) не имеет решений; в) имеет только одно решение?

120. 1) Найдите промежуток, на котором функции $y = -2x + 4$ и $y = \frac{1}{2}x + 2$ одновременно принимают положительные значения. Начертите в одной системе координат графики этих функций и отметьте на оси x соответствующий промежуток.
2) Укажите какое-нибудь значение аргумента, не принадлежащее отмеченному промежутку, и определите знак каждой из функций при этом значении.
3) Существуют ли значения аргумента, при которых обе функции отрицательны? Проверьте свой ответ, решив систему неравенств.

121. Для функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ найдите множество значений аргумента, на котором обе функции отрицательны; одна из них отрицательна, а другая положительна; обе положительны. Проиллюстрируйте свое решение с помощью графиков.

а) $f(x) = 2x + 1,\ g(x) = x - 3;$

б) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1,\ g(x) = \frac{1}{2}x - 2.$

122. Определите, при каких значениях a данное выражение имеет смысл. Укажите по три значения переменной a, при которых данное выражение имеет смысл и при которых оно не имеет смысла:

а) $\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1};$ в) $\sqrt{-3a} \cdot \sqrt{a+3};$

б) $\sqrt{3a+2} - \sqrt{1-2a};$ г) $\dfrac{\sqrt{2-\frac{a}{3}}}{\sqrt{1-\frac{a}{2}}}.$

1.5 Доказательство неравенств

В математике часто встречаются общие утверждения, в которых речь идет о неравенствах. В этом пункте вы познакомитесь с алгебраическими приемами доказательства таких утверждений. Однако прежде нам надо дать алгебраическую трактовку соотношений «больше» и «меньше» между числами.

Возьмем два различных числа a и b. Предположим, что $a > b$. Тогда на координатной прямой точка a расположена правее точки b. В этом случае разность чисел a и b положительна, т. е. $a - b > 0$ (рис. 1.24).

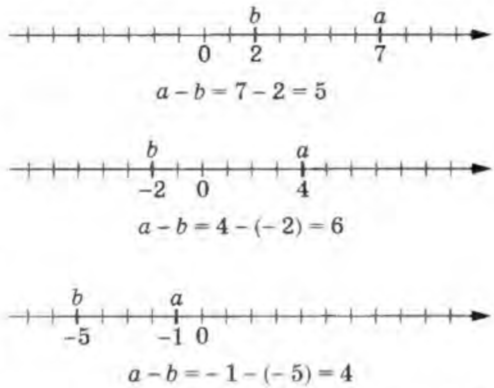


Рис. 1.24

Верно и обратное: если $a - b > 0$, то на координатной прямой точка a расположена правее точки b, т. е. $a > b$.

Эти два утверждения можно объединить в одно:

> $a > b$ в том и только в том случае, когда разность $a - b$ положительна.

Точно так же:

> $a < b$ в том и только в том случае, когда разность $a - b$ отрицательна.

В пункте 1.2 мы рассмотрели некоторые свойства неравенств. Используя сформулированные утверждения, эти свойства можно доказать алгебраически. Покажем это на двух примерах.

■ Пример 1. Докажем, что если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Сравним с нулем разность $a - c$. Для этого преобразуем ее, воспользовавшись приемом «прибавить — вычесть».

$$a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c).$$

Так как $a < b$, то $a - b < 0$; так как $b < c$, то $b - c < 0$. Сумма двух отрицательных чисел отрицательна, значит, $a - c < 0$. А это означает, что $a < c$.

■ Пример 2. Докажем, что если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Чтобы прийти к требуемому результату, нужно показать, что при $a > b$ и $c > d$ разность $(a + c) - (b + d)$ положительна.

Перегруппируем слагаемые в выражении $(a + c) - (b + d)$:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Так как $a > b$, то $a - b > 0$; так как $c > d$, то $c - d > 0$. Сумма положительных чисел $a - b$ и $c - d$ есть число положительное. Значит, разность $(a + c) - (b + d)$ также положительна, поэтому $a + c > b + d$.

Приведем еще одно доказательство этого свойства, основанное на транзитивности неравенств.

Прибавим к обеим частям неравенства $a > b$ число c; получим неравенство $a + c > b + c$. Теперь прибавим к обеим частям неравенства $c > d$ число b; получим неравенство $b + c > b + d$.

Так как $a + c > b + c$ и $b + c > b + d$, то $a + c > b + d$.

■ Пример 3. Докажем, что если a и b — положительные числа, то $a^2 > b^2$ в том и только в том случае, когда $a > b$.

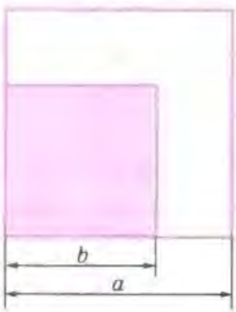


Рис. 1.25

Этот факт вам уже известен. Его легко проиллюстрировать геометрически (рис. 1.25). Приведем теперь его алгебраическое доказательство. Оно состоит из двух частей.

1) Сначала докажем, что если $a > b > 0$, то $a^2 > b^2$.

Рассмотрим разность $a^2 - b^2$:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Так как

$$a - b > 0 \text{ и } a + b > 0,$$

то $a^2 - b^2 > 0$, значит, $a^2 > b^2$.

2) Теперь докажем обратное утверждение: если $a > 0$, $b > 0$ и $a^2 > b^2$, то $a > b$.

Неравенство $a^2 > b^2$ означает, что $a^2 - b^2 > 0$. Отсюда $(a - b)(a + b) > 0$. Но так как a и b — числа положительные, то $a + b > 0$. Значит, и второй множитель $a - b$ положителен, т. е. $a - b > 0$. Следовательно, $a > b$.

Заметим, что доказательство первой части можно провести иначе. В самом деле, перемножив почленно два одинаковых неравенства с положительными членами $a > b$ и $a > b$, получим неравенство $a \cdot a > b \cdot b$, т. е. $a^2 > b^2$.

Утверждение, доказанное в примере 3, имеет широкое применение. В частности, его используют для сравнения чисел.

■ Пример 4. Сравним числа $\sqrt{99}+\sqrt{101}$ и 20.

Запишем наугад какое-либо неравенство, связывающее данные числа, например $\sqrt{99}+\sqrt{101}>20$. Мы не знаем, верно оно или нет. Для наших рассуждений это несущественно, но зато мы сможем пользоваться «алгеброй неравенств» и в результате сумеем избавиться от корней. При этом истинное неравенство будет заменяться истинным, а ложное — ложным.

Возведем обе части неравенства в квадрат:	$\left(\sqrt{99}+\sqrt{101}\right)^2>20^2$,
применим формулу $(a+b)^2$:	$99+101+2\sqrt{99}\cdot\sqrt{101}>400$,
«уединим» радикалы:	$2\sqrt{99}\cdot\sqrt{101}>200$,
разделим обе части неравенства на 2:	$\sqrt{99}\cdot\sqrt{101}>100$,
возведем обе части неравенства в квадрат:	$\left(\sqrt{99}\cdot\sqrt{101}\right)^2>100^2$,
пришли к неравенству:	$99\cdot101>100\cdot100$.

В результате получилось неверное неравенство. В самом деле, $99\cdot101=99\cdot100+99=9999<10\,000$. Значит, мы ошиблись, когда вначале поставили знак $>$. Понятно, что если бы мы поставили знак $<$ и провели те же самые преобразования, то получили бы верное неравенство $99\cdot101<100\cdot100$. Таким образом,

$$\sqrt{99}+\sqrt{101}<20.$$

В математике есть ряд важных неравенств, которые чрезвычайно полезны и часто используются при доказательстве других неравенств. Рассмотрим одно из них.

■ Пример 5. Докажем, что для положительных чисел a и b

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

Вы знаете, что $\frac{a+b}{2}$ — это *среднее арифметическое* чисел a и b. А выражение $\sqrt{ab}$ называют их *средним геометрическим*. Таким образом, нам надо доказать, что

> среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

Для доказательства можно составить разность и сравнить ее с нулем (сделайте это самостоятельно). Однако мы приведем другое доказательство. Будем заменять одно неравенство другим, пока не получим очевидное неравенство:

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ — исходное неравенство;

$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ — умножили обе части неравенства на 2;

$(a+b)^2 \geqslant 4ab$ — возвели в квадрат обе части неравенства с положительными членами;

$a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab$ — преобразовали выражение $(a+b)^2$;

$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geqslant 0$ — перенесли слагаемое $4ab$ в левую часть, изменив его знак на противоположный;

$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$ — привели подобные члены;

$(a-b)^2 \geqslant 0$ — получили неравенство, верное при любых a и b, в том числе и при положительных.

Таким образом, исходное неравенство было верным, значит, неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ доказано.

Существуют различные геометрические интерпретации доказанного неравенства. Рассмотрим одну из них. На рисунке 1.26 изображен прямоугольный треугольник ABC:

$CD = \sqrt{ab}$ (так как $CD^2 = ab$);

$CO = \frac{a+b}{2}$ (так как CO — радиус окружности).

Понятно, что $CO \geqslant CD$ (эти отрезки совпадают, если треугольник ABC равнобедренный). А значит, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

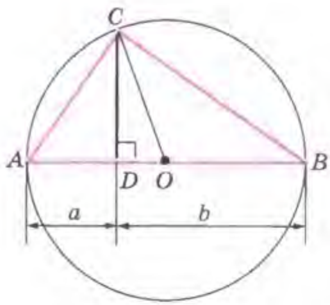


Рис. 1.26

Покажем, как рассмотренное неравенство можно использовать для доказательства других неравенств.

■ **Пример 6.** Докажем, что если a, b и c — положительные числа, то $a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$.

Запишем неравенства, связывающие среднее арифметическое и среднее геометрическое положительных чисел a и b, b и c, a и c:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},\ \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc},\ \frac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ac}.$$

Сложим эти три неравенства почленно:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac},$$

$$\frac{2a+2b+2c}{2} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac},$$
$$a+b+c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}.$$

Таким образом, неравенство доказано.

A

123. Сравните a и b, если известно, что:

а) $a - b = 0{,}1$; г) $b - a = \frac{1}{3}$; ж) $a - b = m$, $m > 0$;

б) $a - b = -8$; д) $a - b = 1 - \sqrt{5}$; з) $b - a = q$, $q \leqslant 0$.

в) $b - a = 0$; е) $b - a = \sqrt{3} - 2$;

124. Поставьте вместо многоточия такой знак неравенства, чтобы получившееся утверждение было верным:
а) если $x \leqslant y$, то $x - y \ldots 0$;
б) если $a > c$, то $a - c \ldots 0$;
в) если $a - b < 0$, то $a \ldots b$;
г) если $x - y \geqslant 0$, то $x \ldots y$;
д) если $a > b$, то $b - a \ldots 0$;
е) если $c - y \leqslant 0$, то $y - c \ldots 0$.

125. Поставьте вместо многоточия такой знак неравенства, чтобы получившееся утверждение было верным при любых значениях переменных:

а) $x^2 + y^2 \ldots 0$; д) $x^2 \ldots 0$; и) $\frac{1}{x^2+1} \ldots 0$;

б) $(x + y)^2 \ldots 0$; е) $-x^2 \ldots 0$; к) $-\frac{1}{x^2+1} \ldots 0$.

в) $(x - y)^2 \ldots 0$; ж) $x^2 + 1 \ldots 0$;
г) $-(x + y)^2 \ldots 0$; з) $-x^2 - 1 \ldots 0$;

126. Докажите свойства неравенств:
а) если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$;
б) если $a > b$, то $a + c > b + c$;
в) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;
г) если $a \leqslant b$ и $c < 0$, то $ac \geqslant bc$.

127. Докажите, что для любых чисел a и b:

а) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$; в) $a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab$; д) $\frac{a^2+1}{2} \geqslant a$;

б) $(a + b)\,b \geqslant ab$; г) $a(a - b) \geqslant b\,(a - b)$; е) $\frac{a}{a^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

128. а) Пусть a и b — положительные числа и $a < b$. Сравните $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$.

б) Пусть a и b — отрицательные числа и $a < b$. Сравните $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$.

129. Докажите, что если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Сформулируйте словами доказанное свойство и конкретизируйте его примерами.

130. Известно, что $x > 2$. Сравните с нулем:

а) $x - 2$, $2 - x$, $x - 1$, $1 - x$;

б) $x(2 - x)$, $(x - 1)(x - 2)$, $(2 - x)(x - 1)$.

131. Сравните с нулем значение выражений $(y - 3)(y - 5)$, $(3 - y)(y - 5)$, $(5 - y)(3 - y)$, если известно, что:

а) $y < 3$; б) $y > 5$; в) $3 < y < 5$.

132. Известно, что a, b и c — длины сторон треугольника. Определите, положительным или отрицательным числом является значение выражения:

а) $a + b - c$; б) $a - b - c$; в) $a + c - b$; г) $c - a - b$.

133. Докажите, что полупериметр треугольника больше любой из его сторон.

Б

134. Докажите разными способами свойство неравенств: если $a > b$ и $c > d$ и a, b, c, d — числа положительные, то $ac > bd$.

Указание.

1) Сравните разность $ac - bd$ с нулем:

$$ac - bd = ac - bd + bc - bc = \ldots .$$

2) Воспользуйтесь свойством транзитивности неравенств.

135. Докажите, что для положительных чисел p и q:

а) $p^3 + q^3 \geqslant p^2q + pq^2$; б) $p^4 - q^4 \geqslant p^3q + pq^3$.

136. Докажите неравенство:

а) $a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2\,(a + b)$;

б) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant 2\,(a + b + c)$.

137. Докажите разными способами, что:
а) если $a > b > 0$, то $a^2 + a > b^2 + b$;
б) если $a > 1$ и $b > 0$, то $ab + a > b + 1$.

138. Проиллюстрируйте геометрически следующий факт: если a и b — положительные числа, то $a^3 > b^3$ в том и только в том случае, когда $a > b$. Докажите этот факт алгебраически.

139. Пусть a, b, c и d — положительные числа. Докажите, что $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ в том и только в том случае, когда $ad - bc \leqslant 0$. Пользуясь этим фактом, сравните дроби: $\frac{5}{18}$ и $\frac{6}{17}$; $\frac{8}{19}$ и $\frac{7}{22}$.

140. Докажите, что если a, b, c и d — положительные числа, такие, что $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$, то

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d}.$$

141. а) Докажите, что если $a < b$, то $a < 0{,}17a + 0{,}83b < b$.
б) Докажите, что если $a < b$ и m и n — положительные действительные числа, сумма которых равна 1, то $a < am + bn < b$.

142. Сравните:

а) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ и $\sqrt{2} + \sqrt{6}$;
б) $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{8}$;
в) $\sqrt{15} + \sqrt{17}$ и 8;
г) 16 и $\sqrt{65} + \sqrt{63}$;
д) $\sqrt{8} - \sqrt{2}$ и $\sqrt{10} - \sqrt{3}$;
е) $\sqrt{17} - \sqrt{6}$ и $\sqrt{12} - \sqrt{3}$;
ж) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$;
з) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{14}}{3}$ и $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{13}}{3}$.

143. а) Докажите неравенство $\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, где a и b — любые действительные числа.
б) Докажите неравенство $\frac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, где a и b — любые положительные числа.
В каждом случае определите, при каком условии выполняется равенство.

144. 1) Разберите, как доказано неравенство $\frac{2}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, где $a > 0$ и $b > 0$.

Доказательство. Представим дробь $\frac{2}{a+b}$ в виде суммы дробей: $\frac{2}{a+b} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b}$. Но $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a}$ и $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{b}$. Поэтому $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Таким образом, неравенство $\frac{2}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ доказано.

2) Пользуясь этим же приемом, докажите неравенство $\frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

145. Докажите, что при положительных значениях переменных:

а) $\frac{x+y}{x} + \frac{x+y}{y} \geqslant 4$; б) $\frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} \geqslant 9$.

Указание. Докажите двумя способами: 1) составив разность левой и правой частей; 2) выделив из дроби целую часть и воспользовавшись неравенством, доказанным в упражнении **129**.

146. Докажите, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ верно неравенство $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

Указание. Примените неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

147. а) В каком случае турист пройдет одно и то же расстояние быстрее: если он будет идти по горизонтальной дороге с постоянной скоростью или же если половину пути он будет идти в гору со скоростью, на 1 км/ч меньшей, чем его скорость по горизонтальной дороге, а половину пути — с горы со скоростью, на 1 км/ч большей, чем по горизонтальной дороге?
б) Саша и Даша отправляются из одного дома к школе, расстояние до которой 2 км. Саша первую половину пути бежит со скоростью a км/ч, а вторую половину пути идет со скоростью b км/ч. Даша первую половину времени бежит со скоростью a км/ч, а вторую половину времени идет со скоростью b км/ч. Кто из них доберется до школы раньше?

148. Пользуясь неравенством $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, где $a > 0$ (задание **129**), докажите, что:

а) $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$; б) $\frac{x^2}{1+x^4} \leqslant \frac{1}{2}$.

Указание. б) Разделите числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части, на x^2.

149. (*Задача-исследование.*)
1) а) С помощью числовых примеров выясните, как меняется — увеличивается или уменьшается — значение правильной дроби при прибавлении к ее числителю и знаменателю одного и того же положительного числа. (Напомним, что числитель и знаменатель правильной дроби — натуральные числа и числитель меньше знаменателя.)
б) Запишите в буквенном виде установленную закономерность. Докажите записанное неравенство.
2) Проведите такое же исследование для неправильной дроби.

1.6 Что означают слова «с точностью до...»

Вам наверняка приходилось встречаться с данными различных социологических исследований. Они всегда приводятся с той или иной степенью достоверности. Например, в информационной программе по телевизору вы могли услышать, что 28% избирателей собираются на выборах отдать свои голоса за кандидата A. При этом комментатор добавляет, что погрешность этого результата не превосходит 3%. Это означает, что в действительности процент избирателей, собирающихся голосовать за A, может отличаться от 28% в ту или иную сторону не более чем на 3% (рис. 1.27), т. е. он содержится в промежутке от 25 до 31%.

Результаты опроса можно записать по-разному. Если обозначить неизвестный нам точно процент избирателей, предпочитающих кандидата A, через x, то

$$x = 28\% \pm 3\%, \text{ или } 25\% \leqslant x \leqslant 31\%.$$

Эти записи задают один и тот же промежуток. Вам известно, как прочитать вторую из них, т. е. двойное неравенство. Первая же часто читается с использованием слова «точность»: x равен 28% с точностью до 3%.

Легко перейти от первой записи ко второй. Чтобы найти нижний конец промежутка, используем знак «−»: $28\% - 3\% = 25\%$. Чтобы найти верхний конец промежутка, используем знак «+»: $28\% + 3\% = 31\%$.

А как перейти от двойного неравенства к записи с помощью знака «±»? Для этого надо взять середину данного промежутка и найти расстояние от середины до его концов.

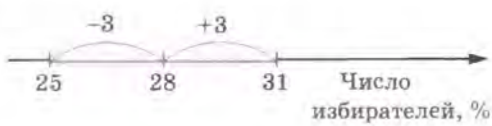


Рис. 1.27

Середина промежутка — это среднее арифметическое его концов: $\frac{25+31}{2} = 28$. А «удаление» этого среднего значения до концов равно $31 - 28 = 3$.

Из приведенного примера ясно, что слова «с точностью до...» говорят о максимальном отклонении приближенного значения от истинного значения величины. Точность приближенного значения может быть указана явно с помощью записи в форме $a \pm h$. Если, например, на рулоне обоев написано, что его длина равна $10 \pm 0{,}25$ м, то это значит, что длина указана с точностью до 0,25 м и в этом рулоне не менее 9,75 м и не более 10,25 м.

Однако есть и другие способы указания точности приближенного значения величины. Вам наверняка не раз приходилось находить значение той или иной физической величины в справочнике или по таблице. Значения величин в справочной и технической литературе указываются таким образом, что по записи можно судить о точности приближения. Например, из таблицы плотности металлов можно узнать, что плотность меди ρ равна 8,96 г/см^3. Последним в записи числа 8,96 является разряд сотых. Это означает, что приближенное значение плотности меди указано с точностью до 0,01 и $\rho = 8{,}96 \pm 0{,}01$ г/см^3. Таким образом, если приближенное значение записано в виде десятичной дроби, то можно считать, что точность приближения составляет единицу последнего разряда.

Если же приближенное значение записано в виде произведения $a \cdot 10^n$, где n — целое число, то информацию о точности такого приближения можно получить по записи множителя a. Например, из справочника можно узнать, что масса Земли m равна $5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг. Это означает, что

$$m = (5{,}976 \pm 0{,}001) \cdot 10^{24} \text{ кг} = 5{,}976 \cdot 10^{24} \pm 10^{21} \text{ кг}.$$

Поэтому масса Земли указана с точностью до 10^{21} кг.

Есть еще одна важная характеристика приближенного значения величины — *относительная точность*. Она позволяет судить о качестве приближения.

Рассмотрим такой пример. Известны результаты измерения толщины d человеческого волоса и расстояния l от Земли до Луны:

$$d = 0{,}15 \pm 0{,}01 \text{ мм и } l = 384\,000 \pm 500 \text{ км}.$$

Погрешность первого из них микроскопична — всего 0,01 мм, а погрешность второго представляется громадной — 500 км! Однако сейчас вы увидите, что качество второго измерения выше.

В самом деле, 0,01 мм составляет значительно большую часть от 0,15 мм, чем 500 км от 384 000 км. Найдем соответствующие отношения и выразим их в процентах:

$$\frac{0{,}01}{0{,}15} \approx 0{,}067 \ (6{,}7\%), \ \frac{500}{384\,000} \approx 0{,}001 \ (0{,}1\%).$$

Говорят, что первое приближение получено с относительной точностью до 6,7%, а второе — с относительной точностью до 0,1%.

А

150. 1) Запишите с помощью двойного неравенства:

а) $x = 19 \pm 0,5$; в) $y = 112 \pm 5$;
б) $a = 5,3 \pm 0,3$; г) $c = 900 \pm 10$.

2) Задайте интервал в виде $a \pm h$:

а) $12 \leqslant a \leqslant 16$; в) $10 \leqslant a \leqslant 100$;
б) $7,5 \leqslant a \leqslant 8,5$; г) $12,4 \leqslant a \leqslant 12,6$.

151. Прочитайте предложение, используя слова «с точностью до...». Изобразите на координатной прямой и запишите интервал, в котором находится значение измеряемой величины:
а) в бутылке содержится 900 ± 10 г сока;
б) за кандидата A предполагают голосовать $37\% \pm 5\%$ избирателей;
в) в банке содержится $3 \pm 0,01$ кг краски;
г) длина рулона обоев равна $10,05 \pm 0,05$ м;
д) температура воздуха в холодильной камере равна $8 \pm 0,5$ °C;
е) во флаконе содержится 30 ± 1 мл духов.

152. а) Известно, что длина листа бумаги равна 24 см с точностью до 0,5 см. Может ли точное значение длины листа быть равным: 24,3 см; 24,8 см; 23,8 см; 23,3 см; 25 см?
б) Известно, что масса молока в пакете равна 1 кг с точностью до 20 г. Может ли точное значение массы молока быть равным: 990 г; 950 г; 985 г; 1050 г; 1010 г; 1100 г?

153. Запишите результат каждого измерения с указанием его точности (т. е. в форме $a \pm h$) и в виде двойного неравенства:

а) $l \approx 15,4$ см; д) $S \approx 27,30$ м^2;
б) $V \approx 18$ л; е) $\rho = 0,7$ г/см^3;
в) $t \approx 21,7$ с; ж) $T = 36,6$ °C;
г) $l \approx 0,8430$ м; з) $I \approx 1,5$ А.

154. Определите, имеют ли данные промежутки общую часть и если да, то укажите ее:

а) $x = 5 \pm 1$, $y = 7 \pm 2$;
б) $a = 12,3 \pm 0,5$, $b = 12,6 \pm 0,1$;
в) $m = 24 \pm 5$, $n = 26 \pm 5$;
г) $x = 0,85 \pm 0,05$, $y = 0,65 \pm 0,05$.

155. Как вы думаете, позволяют ли приведенные данные опроса с достаточной уверенностью прогнозировать победу кандидата A на выборах, если:

а) за кандидата A высказалось $57\% \pm 5\%$ избирателей, а за кандидата $Б$ — $55\% \pm 5\%$;

б) за кандидата A высказалось $28\% \pm 4\%$ избирателей, а за кандидата $Б$ — $17\% \pm 4\%$;

в) за кандидата A высказалось $31\% \pm 3\%$ избирателей, а за кандидата $Б$ — $26\% \pm 3\%$?

156. Известны результаты испытаний на всхожесть семян одного и того же вида, подготовленных к посеву фирмами A и $Б$. Можно ли утверждать, что всхожесть семян какой-либо из этих двух фирм выше?

а) фирма A: $80\% \pm 2\%$, фирма $Б$: $90\% \pm 5\%$;
б) фирма A: $60\% \pm 3\%$, фирма $Б$: $52\% \pm 3\%$;
в) фирма A: $87\% \pm 5\%$, фирма $Б$: $85\% \pm 5\%$;
г) фирма A: $74\% \pm 4\%$, фирма $Б$: $81\% \pm 3\%$.

Б

157. Укажите, с какой точностью приведены в справочнике следующие данные:

а) площадь Мирового океана Земли равна $366{,}1 \cdot 10^6$ км^2;

б) территория России составляет $1{,}27 \cdot 10^7$ км^2;

в) масса электрона равна $0{,}91 \cdot 10^{-24}$ г;

г) диаметр молекулы воды равен $2{,}8 \cdot 10^{-7}$ мм;

д) расстояние от планеты Марс до Солнца равно 228,0 млн км;

е) площадь поверхности Земли равна 510,2 млн км^2.

158. При измерении толщины одной и той же металлической детали штангенциркулем и микрометром полученные результаты записали соответственно в виде: $l \approx 2{,}5$ мм и $l \approx 2{,}48$ мм. В каждом случае укажите промежуток, в котором находится точное значение этой величины, и относительную точность измерения.

159. На токарном станке вытачивают круглые пластины диаметром $d = 5 \pm 0{,}1$ см. Относительную точность изготовления детали удалось повысить на 1%. В каком промежутке теперь заключается точное значение диаметра детали?

1.7 Периодические и непериодические бесконечные десятичные дроби

(Для тех, кому интересно)

Множество действительных чисел, как вы уже знаете, состоит из рациональных и иррациональных чисел, и притом каждое действительное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби. Однако десятичное представление рациональных чисел принципиально отличается от десятичной записи иррациональных чисел. Чтобы разобраться в этом, начнем с деления уголком.

Возьмем дробь $\frac{1}{3}$. Деление уголком 1 на 3 приводит к очень простой бесконечной десятичной дроби, в которой после запятой содержится только цифра 3, т. е. $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$. А при делении 40 на 33 на первом шаге в частном получится 1 и остаток 7, затем в частном получится 2, а остаток будет равен 4, затем снова в частном будет 1 и остаток 7, снова в частном 2 и остаток 4 и т. д.

Поэтому $\frac{40}{33} = 1{,}212121\ldots$.

$$
\begin{array}{l|l}
-40 & 33 \\
\underline{33} & \overline{1{,}21212} \\
\quad -70 & \\
\quad \underline{66} & \\
\qquad -40 & \\
\qquad \underline{33} & \\
\qquad\quad -70 & \\
\qquad\quad \underline{66} & \\
\qquad\qquad -40 & \\
\qquad\qquad \underline{33} & \\
\qquad\qquad\quad -70 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{66} & \\
\qquad\qquad\qquad 4 &
\end{array}
$$

Вообще деление уголком числителя обыкновенной дроби на знаменатель всегда приводит к бесконечному повторению одной и той же группы цифр (если, конечно, оно не закончится на каком-либо шаге).

Иногда, правда, чтобы получить повторяющуюся группу цифр, выполнять деление приходится несколько дольше, чем в предыдущем примере. Возьмем, к примеру, дробь $\frac{2}{7}$. Сделав даже четыре шага, мы получим, что $\frac{2}{7} = 0{,}2857\ldots$, и не увидим повторяющихся цифр. Но если при делении мы сделаем шесть шагов, то получим в частном $0{,}285714\ldots$, и при этом повторится остаток.

А далее начнут повторяться цифры в частном. В этом можно убедиться «руками», выполнив деление уголком 2 на 7, но можно и «головой» — как только один остаток повторился, то повторяется и цифра частного, а тогда повторяются и второй остаток, и цифра частного и т. д.

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{2} & 7 \\
-20 & \overline{0{,}285714} \\
\underline{14} & \\
\quad -60 & \\
\quad \underline{56} & \\
\qquad -40 & \\
\qquad \underline{35} & \\
\qquad\quad -50 & \\
\qquad\quad \underline{49} & \\
\qquad\qquad -10 & \\
\qquad\qquad \underline{\ \ 7} & \\
\qquad\qquad\quad -30 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{28} & \\
\qquad\qquad\qquad 2 &
\end{array}
$$

В результате мы получим равенство

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714...,$$

где в бесконечной дроби нетрудно заметить повторение группы цифр 285714.

Бесконечные десятичные дроби, в которых есть повторяющаяся группа цифр, называют *периодическими*, а саму эту группу называют, естественно, *периодом* дроби.

Ясно, что

всякое рациональное число $\frac{p}{q}$ представляется в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

В самом деле, мы видели, что при делении уголком цифры частного начинают повторяться, когда повторяется остаток. Но остатков при делении на число q имеется всего лишь q — это 0, 1, 2, ..., $q - 1$. Так что рано или поздно они начнут повторяться. (Если на каком-то шаге получится остаток 0, то получится конечная десятичная дробь, т. е. бесконечная десятичная дробь с периодом 0.)

Оказывается, что справедливо обратное утверждение: **всякая бесконечная периодическая дробь представляет рациональное число.**

Для периодических дробей существует специальная краткая форма записи — период не повторяют, а берут в скобки. Например:

$$\frac{1}{3} = 0{,}(3), \ \ \frac{40}{33} = 1{,}(21), \ \ \frac{2}{7} = 0{,}(285714).$$

Заметим, что период дроби необязательно начинается сразу же после запятой — например, дробь 5,4201010101... имеет период 01: 5,4201010101... = 5,42(01). Кстати, группа 10 также является периодом этой дроби — этот период начинается после третьего десятичного знака, и дробь можно записать в виде 5,420(10). Более того, у каждой бесконечной десятичной периодической дроби бесконечное число периодов. Например:

$$5{,}4201010101... = 5{,}42(01) = 5{,}420(10) = 5{,}42(0101) =$$
$$= 5{,}420\,(1010) = ...$$

Конечно, всегда следует стремиться рассматривать период с наименьшим числом цифр, как говорят, *наименьший период*.

Покажем на примере, как можно от бесконечной периодической дроби перейти к равной ей обыкновенной дроби. Возьмем действительное число $\alpha = 0{,}(41)$. Тогда $100\alpha = 41{,}(41)$. Вычтем из второго равенства первое:

$$100\alpha - \alpha = 41{,}(41) - 0{,}(41), \ 99\alpha = 41.$$

Отсюда $\alpha = \frac{41}{99}$, т. е. α — рациональное число.

Так можно поступать всегда, когда заданная периодическая дробь чистая, т. е. ее период начинается сразу же после запятой. Несколько сложнее обстоит дело, когда дробь смешанная, т. е. ее период начинается не сразу после запятой. Но и в этом случае с помощью двух умножений можно получить дроби, при вычитании которых пропадает бесконечный «хвост».

Рассмотрим, например, бесконечную десятичную дробь $\alpha = 0{,}3(18)$. Имеем

$$10\alpha = 3{,}(18),\ 1000\alpha = 318{,}(18),$$
$$1000\alpha - 10\alpha = 318{,}(18) - 3{,}(18),$$
$$990\alpha = 315,$$
$$\alpha = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}.$$

В рассмотренных примерах целая часть бесконечной десятичной периодической дроби равнялась нулю. Если же целая часть отлична от нуля, то в таких случаях сначала нужно отдельно «работать» с правильной дробью, а затем добавить целую часть.

Например, так как $0{,}3(18) = \frac{7}{22}$, то $5{,}3(18) = 5\frac{7}{22}$.

Таким образом, если число рациональное, то оно представляется периодической дробью, и обратно, если оно представляется периодической дробью, то оно рациональное. Ясно, что для иррациональных чисел остается единственная возможность — быть *непериодическими дробями*. Поэтому, например, сколько ни выписать знаков в бесконечной десятичной дроби $1{,}4142... = \sqrt{2}$, период в этой дроби не появится — вы знаете, что это число иррациональное.

Рассмотрим действительное число

$$0{,}12345678910111213 14...99100101... ,$$

в котором после запятой подряд выписываются все натуральные числа. Докажем, что оно иррациональное, т. е. что данная бесконечная десятичная дробь не имеет периода.

В самом деле, предположим, что она имеет период и n — длина этого периода. По очевидному правилу построения данной дроби «где-то далеко» встретится число $1000...00$, содержащее $2n$ нулей. Но на этом отрезке из $2n$ нулей обязательно должен встретиться и период, т. е. получается, что период состоит из одних нулей. А это невозможно, так как такой период имеют только конечные десятичные дроби.

Выше мы говорили о том, что две бесконечные десятичные дроби сравнивают так же, как конечные десятичные дроби. Казалось бы, все действительно просто, но на самом деле это правило сравнения может привести... к неверному результату. Так, по этому правилу мы получаем, например, неравенство $0,19999... < 0,2$. Однако если мы переведем бесконечную периодическую дробь $\alpha = 0,19999... = 0,1(9)$ в обыкновенную, то получим, что $\alpha = 0,2$ (проверьте это самостоятельно).

Таким образом, 0,19999... и 0,2 — это две записи одного и того же числа, и написанное нами неравенство неверно!

Вообще рассматриваемое правило сравнения приводит к неверному результату для дробей с периодом 9, которые являются другой формой записи конечных десятичных дробей или целых чисел. Поэтому обычно такие дроби «запрещают», т. е. говорят только о десятичных дробях, у которых нет бесконечного «хвоста» из одних девяток. В этом случае правило ни к каким противоречиям не приводит и применяется для сравнения любых действительных чисел, заданных в виде бесконечных десятичных дробей.

160. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{6}{11}$; в) $\frac{7}{13}$; г) $\frac{5}{6}$; д) $\frac{7}{22}$; е) $\frac{11}{40}$.

161. Разверните запись в бесконечную десятичную дробь, указав десять знаков после запятой:

а) 0,(31); б) 2,(5); в) 3,6(05); г) 1,0(286).

В каждом случае укажите несколько периодов дроби.

162. Сравните:

а) 0,(52) и 0,(523); б) 2,(619) и 2,6(19).

163. Придумайте какую-нибудь периодическую дробь, заключенную между числами:

а) 0,(6) и 0,(16); в) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$;

б) 0,(30) и 0,(300); г) $\frac{10}{11}$ и $\frac{12}{11}$.

164. Представьте в виде обыкновенной дроби следующую десятичную периодическую дробь (проверьте себя, выполнив деление):

а) 0,(6); в) 0,(12); д) 0,2(36);

б) 0,5(0); г) 0,(135); е) 0,31(4).

165. Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) 0,111...; б) 0,101010...; в) 0,010101... .

166. В старых учебниках арифметики формулировалось специальное правило перевода периодической дроби в обыкновенную дробь:

чтобы перевести чистую периодическую дробь в обыкновенную, надо в ее числителе записать период, а в знаменателе столько девяток, сколько цифр в периоде (например, $0,(13) = \frac{13}{99}$);

чтобы перевести смешанную периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и разделить полученную разность на число, состоящее из стольких девяток, сколько цифр в периоде, и стольких нулей, сколько цифр после запятой до первого периода (например, $0,5(13) = \frac{513-5}{990} = \frac{508}{990} = \frac{254}{495}$).

Пользуясь этим правилом, представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 0,(72); б) 0,(123); в) 0,1(11); г) 0,24(06).

167. По какому правилу составлена следующая бесконечная десятичная дробь:

а) 0,12112111211112...;
б) 0,12212212212 2...;
в) 0,10203040...90100110...;
г) 0,248163264...;
д) 0,135791113...;
е) 0,1357913579...?

Является ли эта дробь периодической или нет?

168. Укажите два рациональных и два иррациональных числа, заключенные между числами 3 и 3,01.

169. Может ли сумма двух периодических дробей быть непериодической?

170. Может ли сумма двух непериодических дробей быть периодической?

171. Может ли сумма двух непериодических дробей быть непериодической?

1.8 Еще о средних

(Для тех, кому интересно)

■ Задача. Из A в B автомобиль выехал со скоростью 90 км/ч, а возвращался из B в A со скоростью 60 км/ч. Какова была средняя скорость автомобиля?

Часто такие задачи решают автоматически, не задумываясь всерьез над условием: раз $v_1 = 90$, а $v_2 = 60$, то по формуле среднего арифметического получаем $v_{ср} = \frac{90+60}{2} = 75$.

Но давайте посмотрим, можно ли в данном случае использовать формулу для среднего арифметического. Вспомним сначала, что средняя скорость движения — это отношение пройденного пути ко времени движения: $v_{ср} = \frac{s}{t}$, где s — весь пройденный путь, а t — все время движения.

Если расстояние от A до B обозначить через p, тогда весь пройденный путь s будет равен $2p$. Понятно, что время движения от A до B есть $t_1 = \frac{p}{v_1}$, а время движения от B до A есть $t_2 = \frac{p}{v_2}$. Тогда все время движения

$$t = t_1 + t_2 = \frac{p}{v_1} + \frac{p}{v_2}.$$

Теперь найдем $v_{ср}$: $v_{ср} = \dfrac{2p}{\dfrac{p}{v_1} + \dfrac{p}{v_2}}$. После преобразований получим $v_{ср} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$. Поэтому на самом деле

$$v_{ср} = \frac{2 \cdot 90 \cdot 60}{90+60} = 72 \text{ (км/ч)}.$$

Формулу, по которой мы в данном случае нашли среднюю скорость движения, называют *формулой среднего гармонического.*

Среднее гармоническое двух положительных чисел a и b равно отношению удвоенного произведения этих чисел к их сумме.

Если среднее гармоническое положительных чисел a и b обозначить буквой h, то можно записать формулу $h = \frac{2ab}{a+b}$.

Иногда эту формулу записывают так: $\frac{1}{h}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$. Из такой записи видно, что величина, обратная среднему гармоническому a и b, есть среднее арифметическое величин, обратных a и b. Это трудно произнести, но легко понять, если посмотреть на формулу.

Среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое были хорошо знакомы еще математикам Античности, создавшим теорию пропорций, на основе которой строилась геометрическая теория чисел, теория площадей и даже древнегреческое учение о музыке.

Вы уже знакомы с геометрической интерпретацией неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел. Среднее гармоническое тоже имеет красивый геометрический образ.

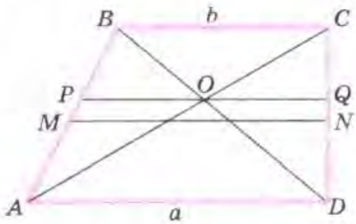


Рис. 1.28

Рассмотрим трапецию с основаниями a и b (рис. 1.28). Тогда по известной из курса геометрии теореме о средней линии трапеции отрезок MN, параллельный основаниям и соединяющий середины боковых сторон трапеции, равен среднему арифметическому оснований: $MN = \frac{a+b}{2}$.

А отрезок PQ, параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, равен среднему гармоническому оснований: $PQ = \frac{2ab}{a+b}$.

Действительно, из подобия соответствующих треугольников следует, что $\frac{PO}{a}=\frac{BP}{AB}$; $\frac{PO}{b}=\frac{PA}{AB}$. Значит,

$$\frac{PO}{a}+\frac{PO}{b}=\frac{BP}{AB}+\frac{PA}{AB}=\frac{AB}{AB}=1.$$

Отсюда $\frac{PO(a+b)}{ab}=1$ и $PO=\frac{ab}{a+b}$.

Точно так же можно показать, что $OQ=\frac{ab}{a+b}$. А это значит, что $PQ=\frac{2ab}{a+b}$, т. е. PQ — среднее гармоническое оснований. Понятно (докажите самостоятельно, это нетрудно), что отрезок PQ всегда расположен ближе к меньшему основанию, чем средняя линия, а значит, будет выполняться неравенство $\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$.

Поскольку в трапеции основания не равны, то полученное неравенство верно для $a \neq b$. Если же $a = b$, то среднее арифметическое этих чисел и их среднее гармоническое равны (проверьте это), т. е. имеет место равенство $\frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b}$. Следовательно, для всех положительных значений a и b выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$. (Попробуйте доказать это неравенство алгебраически.)

Помимо рассмотренных средних, в математике используется понятие *среднего квадратичного*:

для двух положительных чисел a и b среднее квадратичное равно $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Все средние связаны неравенствами:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Знак равенства достигается лишь в том случае, когда $a = b$.

Если вы решите самостоятельно задачи **172** и **173**, эта красивая цепочка неравенств будет доказана полностью.

172. Докажите, что среднее геометрическое двух положительных чисел всегда не меньше среднего гармонического этих чисел.

173. Докажите, что среднее квадратичное двух положительных чисел всегда не меньше среднего арифметического этих чисел.

174. На тренировке гонщик трижды проехал кольцевую трассу. Первый круг гонщик проехал со скоростью 150 км/ч, второй круг — со скоростью 175 км/ч, а третий — со скоростью 180 км/ч. Какова средняя скорость гонщика на всей дистанции?

175. Покажите, что в трапеции $ABCD$ отрезок, параллельный основаниям и делящий трапецию на две трапеции, подобные между собой, равен среднему геометрическому оснований.

176. Покажите, что в трапеции $ABCD$ отрезок, параллельный основаниям и делящий трапецию на две трапеции равной площади, равен среднему квадратичному оснований.

ДЗ Дополнительные задания к главе 1

Числа рациональные и иррациональные

177. Сравните числа:

а) $\frac{9}{11}$ и $\frac{5}{13}$; в) $\frac{5}{6}$ и 0,835; д) $\sqrt{3}$ и 1,7;

б) 4,75043 и 4,7506; г) $\sqrt{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; е) $\frac{22}{7}$ и π.

178. Какое из чисел больше:

а) −0,48 или −0,845; в) $-\frac{1}{3}$ или $-\frac{1}{7}$; д) $-\frac{17}{20}$ или −0,9;

б) −1,05 или −0,049; г) $-\frac{3}{13}$ или $-\frac{4}{11}$; е) −0,8 или $-\frac{5}{6}$?

179. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $(-1{,}5)^2$; $-1{,}5$; $(-1{,}5)^3$; б) $(-0{,}5)^2$; $-0{,}5$; $(-0{,}5)^3$.

180. На координатной прямой отмечено число a (рис. 1.29). Расположите в порядке возрастания числа a, $\frac{1}{a}$ и a^2.

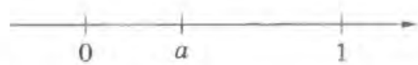


Рис. 1.29

181. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; в) $3 - \sqrt{2} + \frac{5}{3-\sqrt{2}}$;

б) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; г) $\sqrt{(3-4\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{3}$.

182. Решите уравнение:

а) $x^2 = 8$; в) $x^4 - 6x + 9 = 0$;

б) $x^2 - 5 = 11$; г) $x^3 - 2x = 0$.

Какое из уравнений имеет как рациональные, так и иррациональные корни?

183. Составьте какое-нибудь уравнение с рациональными коэффициентами, одним из корней которого является число:

а) $2\sqrt{3}$; б) $2 + \sqrt{3}$; в) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

184. Между какими соседними целыми числами заключено выражение:

а) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$?

185. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$; г) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$;

б) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$; д) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$; е) $\sqrt{4\sqrt{5}+9} + \sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

Указание. б), в) Представьте подкоренное выражение в виде квадрата двучлена, например:

$$11 - 4\sqrt{7} = 7 - 2\cdot 2\cdot \sqrt{7} + 4 = (\sqrt{7} - 2)^2;$$
$$8 + 2\sqrt{15} = 5 + 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} + 3 = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2.$$

Решение неравенств и систем неравенств

186. а) Найдите наименьшее целое значение x, при котором разность дробей $\dfrac{2x-7}{2}$ и $\dfrac{6-x}{3}$ положительна.

б) Найдите наибольшее целое значение x, при котором разность дробей $\dfrac{x-4}{2}$ и $\dfrac{1-3x}{5}$ отрицательна.

187. а) При каких целых неотрицательных значениях x верно неравенство

$$3x - \frac{9x+8}{4} < \frac{1}{2}?$$

б) При каких целых отрицательных значениях x верно неравенство

$$x + \frac{1-x}{3} \geqslant \frac{x-12}{6}?$$

Решите неравенство (**188—189**):

188. а) $2(x - 1) \geqslant 4(x + 1) - 2(x + 3)$;

б) $(6x + 2) - 3(x - 4) < 3x - 5$;

в) $6 - 4(x - 4) \leqslant (x + 2) - 5(x - 4)$;

г) $7(x - 3) - (3x - 5) \geqslant 4(6 + x)$.

189. а) $(3 - \sqrt{7})(x - 1) \leqslant 0$; в) $\sqrt{5}x - 2\sqrt{3}x > 0$;

б) $(1 - \sqrt{2})(2x - 5) > 0$; г) $3x - 2\sqrt{2}x < 0$.

190. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{x-4}}{2x-16}$; в) $\dfrac{\sqrt{2x}}{x^2+1}$;

б) $\dfrac{\sqrt{5-x}}{3x+15}$; г) $\dfrac{\sqrt{-3x}}{x^2-1}$?

191. Дано неравенство $3x - 7 > 5x - a$, где x — переменная, a — некоторое число. При каком a множеством решений неравенства является:

а) множество всех отрицательных чисел;

б) множество чисел, меньших 1;

в) множество чисел, меньших -10?

192. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{7x}{3} \geqslant \dfrac{4x}{5} \\ -3 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -9x < 5 + 2x < 5 \\ \dfrac{x+4}{2} < 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{2x}{5} \geqslant \dfrac{3x}{2} \\ -1 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 2(2x - 3) \geqslant 3x \\ -3 \leqslant x - 2 \leqslant 3. \end{cases}$

193. Сколько целых решений имеет система неравенств:

а) $\begin{cases} x\sqrt{2} < \dfrac{\sqrt{18}}{2} \\ 1 - \dfrac{4-3x}{5} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{x+2}{3} < 0 \\ -x + \sqrt{27} < \sqrt{12}? \end{cases}$

194. При каких значениях a уравнение $3(x + 2) = a - 4$ имеет:

а) положительный корень, меньший 10;

б) отрицательный корень, больший -10?

Вопросы для повторения к главе 1

1. Какие числа образуют множество действительных чисел? Приведите примеры чисел каждого вида.
2. Покажите схематически соотношения между множествами натуральных, целых, рациональных и действительных чисел. Вставьте знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получилось верное высказывание:

$$-3 \dots \boldsymbol{N}, \quad -3 \dots \boldsymbol{Z}, \quad -3 \dots \boldsymbol{R},$$
$$10 \dots \boldsymbol{N}, \quad 10 \dots \boldsymbol{Z}, \quad 10 \dots \boldsymbol{R},$$
$$\sqrt{2} \dots \boldsymbol{N}, \quad \sqrt{2} \dots \boldsymbol{Z}, \quad \sqrt{2} \dots \boldsymbol{R}.$$

3. Что является «универсальным именем» для действительных чисел? Выпишите пять цифр бесконечной десятичной дроби, представляющей число $\sqrt{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{12}$. (При необходимости воспользуйтесь калькулятором.)
4. Приведите пример строгого числового неравенства, нестрогого числового неравенства. Прочитайте разными способами неравенство и определите, верно ли оно: $34 \leqslant 100$; $12 \geqslant 12$; $10 \leqslant 7$.
5. Сформулируйте и запишите с помощью букв свойство транзитивности неравенств. Приведите числовые примеры, иллюстрирующие это свойство.
6. Сформулируйте и запишите с помощью букв свойство о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа. Запишите неравенство, которое получится, если к обеим частям неравенства $p < q$ прибавить число 8, число -6.
Сформулируйте следствие о переносе слагаемых из одной части неравенства в другую. Получите с помощью этого следствия какое-либо неравенство из неравенства $a > b + c$.
7. Сформулируйте и запишите с помощью букв свойство об умножении обеих частей неравенства на одно и то же положительное число; на одно и то же отрицательное число. Проиллюстрируйте это свойство примерами.
8. Сформулируйте и запишите с помощью букв свойства о почленном сложении и почленном умножении неравенств и проиллюстрируйте их числовыми примерами.
9. Укажите несколько чисел, являющихся решениями неравенства $2x + 10 < 3$, и несколько чисел, не являющихся его решениями.
10. Какие уравнения называют равносильными? Объясните, почему равносильны уравнения:

$3x + 7 = 1$ и $3x = -6$; $\quad \frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{4}x$ и $2x - 12 = x$.

11. Какие неравенства называют равносильными? Сформулируйте правила, позволяющие переходить от одного неравенства к другому, ему равносильному. Объясните каждый шаг в решении неравенства:

$$2 - 5x < 7, \quad -5x < 5, \quad x > -1.$$

12. Покажите на примерах систем $\begin{cases} x < 2 \\ x < 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases}$, как с помощью координатной прямой находят множество решений системы неравенств.
13. Измерив расстояние S по шоссе между пунктами A и B, получили, что оно равно 250 км, при этом погрешность измерения не превосходит 5 км. Как можно выразить эту мысль иначе, используя слова «с точностью до...»? Запишите результат с помощью знака «$\pm$» и в виде двойного неравенства.
14. Как вычислить относительную точность измерения в предыдущем задании?

Задания для самопроверки к главе 1

(Обязательные результаты обучения)

1. Выберите из чисел 0,57; $-\frac{1}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $-\sqrt{2}$; 5; $1-\sqrt{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{3}$; -18:

   а) положительные рациональные числа;
   б) иррациональные числа;
   в) отрицательные действительные числа.
2. Сравните числа:

   а) $1\frac{3}{7}$ и 1,429; б) 1,5 и $\frac{\pi}{2}$.
3. Соотнесите числа $2\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{0,5}$; 3,5 с точками на координатной прямой (рис. 1.30).

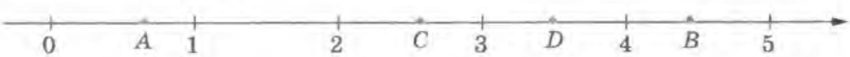


Рис. 1.30

4. Расположите в порядке возрастания:

   а) $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{7}$ и 0,717; б) $\frac{7}{6}$, 1,16 и 1,1655... .
5. Оцените площадь и периметр участка прямоугольной формы со сторонами a м и b м, если $20 \leqslant a \leqslant 21$, $30 \leqslant b \leqslant 31$.

Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой **(6—7)**:

6. а) $3x - 8 \leqslant 7$; в) $5 > -3x + 5$;
б) $1 - 5x > -4$; г) $2x + 7 < 0$.

7. а) $4 - 3x \geqslant x + 16$; б) $7x + 1 > 2x - 9$.

8. Решите неравенство:
а) $2x - 5(x - 3) < 16 - 6x$; б) $3(x + 1) > 2x - 5(x - 1)$.

9. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 18 < 0 \\ 5x < 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 6 > 3 \\ 1 - 2x < 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 1 \geqslant 5x - 1 \\ 9x + 15 \geqslant 5 - x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7 - x > 0 \\ x + 2 < 3x - 16. \end{cases}$

10. Решите двойное неравенство:
а) $2 < 5x - 3 < 7$; б) $0 \leqslant 4 - x \leqslant 5$.

11. Докажите, что для любых чисел x и y

$$x\ (x + y) \geqslant y\ (x - y).$$

12. Докажите, что для положительных чисел a и b

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

13. Масса молока в пакете равна 500 г с точностью до 10 г. Запишите это с помощью знака «±» и с помощью двойного неравенства.

14. Запишите промежуток $20 \leqslant x \leqslant 21$ с помощью знака «±».

Тест к главе 1

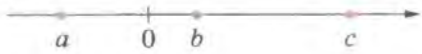
1. Какое из утверждений неверно?
А. $-7 \in \boldsymbol{R}$. **Б.** $-7 \in \boldsymbol{Z}$. **В.** $-7 \in \boldsymbol{Q}$. **Г.** $-7 \in \boldsymbol{N}$.

2. В каком случае правильно указано соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$?
А. $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{N}$. **Б.** $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{N}$. **В.** $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{Z}$. **Г.** $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

3. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{2}{9}$?
А. [0,1; 0,2]. **Б.** [0,2; 0,3]. **В.** [0,3; 0,4]. **Г.** [0,4; 0,5].

4. Укажите наибольшее из чисел 0,4; 0,6; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{9}$.
А. 0,4. **Б.** 0,6. **В.** $\frac{3}{7}$. **Г.** $\frac{5}{9}$.

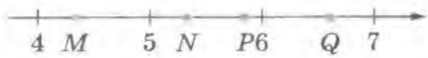
5. На координатной прямой отмечены числа a, b и c.



Какое из приведенных утверждений неверно?
А. $ab < 0$. **Б.** $abc < 0$. **В.** $a + b < 0$. **Г.** $a + c < 0$.

6. При каком x значение выражения $\sqrt{3-2x}$ является числом рациональным?
А. При $x = 6$. **Б.** При $x = 0$. **В.** При $x = -2$. **Г.** При $x = -3$.

7. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{34}$. Какая это точка?



А. M. **Б.** N. **В.** P. **Г.** Q.

8. Какое из неравенств является верным при любых значениях a и b, удовлетворяющих условию $a > b$?
А. $b - a > 0$. **Б.** $b - a > 1$. **В.** $a - b > -2$. **Г.** $a - b > -3$.

9. О числах a и c известно, что $a < c$. Какое из неравенств неверно?

А. $a - 3 < c - 3$. **В.** $\frac{1}{4}a < \frac{1}{4}c$.

Б. $a + 5 < c + 5$. **Г.** $-\frac{a}{2} < -\frac{c}{2}$.

10. Решите неравенство $3 - x \geqslant 3x + 5$.
А. $(-\infty; -0{,}5]$. **Б.** $[-0{,}5; +\infty)$. **В.** $[-2; +\infty)$. **Г.** $(-\infty; -2]$.

11. Для каждой системы неравенств укажите множество ее решений.

1) $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ 3 - x \geqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x + 3 \leqslant 0; \end{cases}$

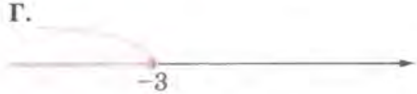
3) $\begin{cases} x \geqslant -3 \\ 1 - x \leqslant 0. \end{cases}$

А.

Б.

В.

Г.



Ответ. 1) ________;
2) ________;
3) ________

12. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5x \geqslant 2x + 9 \\ 10 - 2x \leqslant 8. \end{cases}$$

Ответ. ____________________

13. Решите двойное неравенство

$$-5 < 1 - \frac{2 - x}{3} < 5.$$

А. Решений нет. **В.** $-14 < x < 16$.
Б. $-16 < x < 14$. **Г.** $-6 < x < 4$.

14. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3x \leqslant x - 5 \\ 4x + 6 \leqslant 0 \\ x + 1 \geqslant 3x + 5. \end{cases}$$

Ответ. ____________________

15. Укажите целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{3} > 0 \\ 3x - 8 < 0. \end{cases}$$

Ответ. ____________________

16. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} 4x \leqslant 10 \\ x - a \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет решения?

Ответ. ____________________

17. На банке с краской имеется надпись $m = 5 \pm 0{,}05$ кг, где m — масса краски. Как это условие можно записать в виде двойного неравенства?

А. $4{,}5 \leqslant m \leqslant 5{,}5$. **В.** $4{,}95 \leqslant m \leqslant 5{,}05$.
Б. $5 \leqslant m \leqslant 5{,}05$. **Г.** $4{,}99 \leqslant m \leqslant 5{,}01$.

18. Сравните числа $\sqrt{8} + \sqrt{10}$ и 6.

Ответ. ____________________

Глава 2

Квадратичная функция

2.1 Какую функцию называют квадратичной

В 8 классе вы познакомились с линейной функцией и функцией, которую называют обратной пропорциональностью; узнали, что представляют собой их графики, каковы их свойства. Теперь нам предстоит подробное изучение *квадратичной функции*.

В сущности, с квадратичной функцией вам уже приходилось иметь дело при работе с некоторыми формулами на уроках геометрии и физики. Так, формула $S = \pi r^2$ задает площадь круга S как квадратичную функцию его радиуса r; формула $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ задает высоту, на которой находится тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью v_0, как квадратичную функцию времени движения t.

Определение

Квадратичной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Правая часть формулы $y = ax^2 + bx + c$ — это хорошо знакомый вам квадратный трехчлен. Он, как вы знаете, необязательно должен состоять из трех слагаемых. Главное, чтобы присутствовало слагаемое, содержащее квадрат независимой переменной.

В 7 классе вы познакомились с графиком простейшей квадратичной функции $y = x^2$. Линию — график этой функции — мы

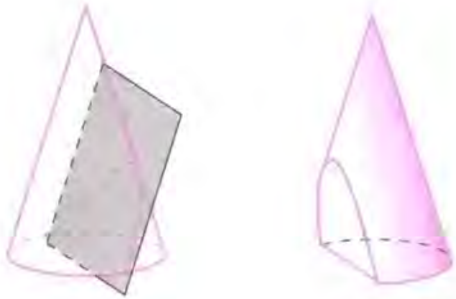


Рис. 2.1

назвали *параболой*. На самом деле параболой является график любой квадратичной функции.

«Увидели» параболу еще математики Древней Греции, когда, занимаясь геометрией, изучали конические сечения. Если конус рассечь плоскостью, параллельной образующей, то в сечении получится парабола (рис. 2.1).

Параболу вы часто можете наблюдать в реальной жизни как траекторию движения какого-либо тела. Баскетболист бросает мяч в корзину, который летит почти по параболе. Струя фонтана «рисует» линию, близкую к параболе. Ныряльщик, прыгающий со скалы в море, описывает в воздухе линию, близкую к параболе.

Посмотрите на параболы — графики квадратичных функций, изображенные на рисунке 2.2. Эти параболы по-разному расположены на координатной плоскости. У одних ветви направлены вверх, у других — вниз. Каждая парабола имеет *ось симметрии* и *вершину*. Ось симметрии — прямая, параллельная оси y, или сама ось y; вершина — это точка, в которой ось симметрии пересекает параболу. Вершина — самая верхняя или самая нижняя точка параболы (в зависимости от того, куда направлены ее ветви). Различаются эти параболы не только направлением ветвей, но и степенью «крутизны». Самая «пологая» из них — график 1 (функция $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$); самая «крутая» — график 4 (функция $y = -2x^2 + 8x - 6$).

Построим график функции $y = x^2 - 2x - 3$. Для этого вычислим координаты нескольких точек этого графика:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	12	5	0	−3	−4	−3	0	5	12

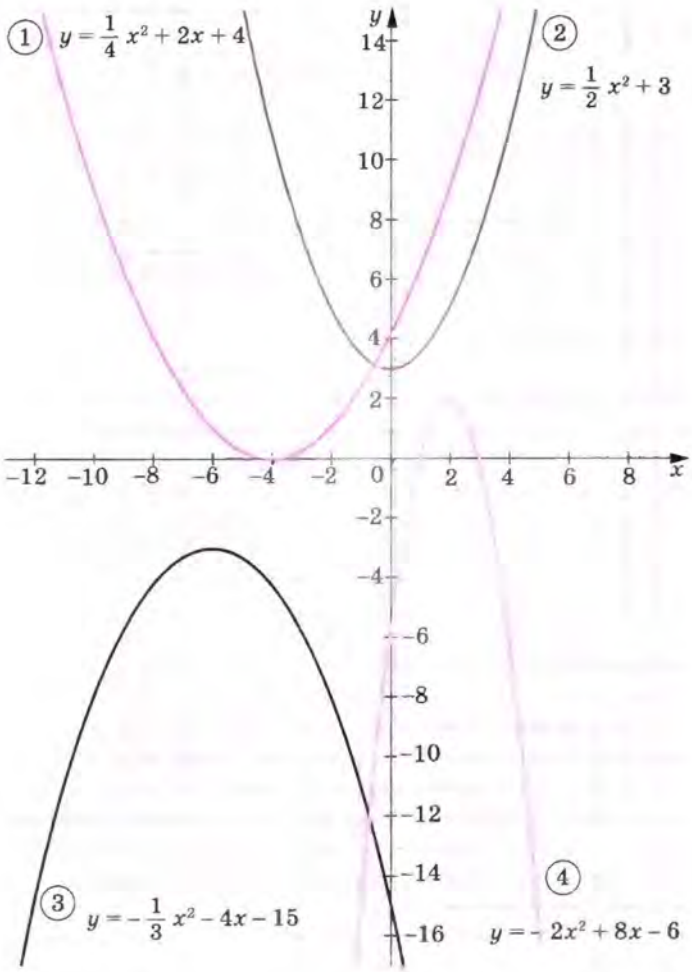


Рис. 2.2

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице (рис. 2.3), и соединим их плавной линией (рис. 2.4). Получим параболу, которая и является графиком функции $y = x^2 - 2x - 3$.

Осью симметрии построенной параболы служит вертикальная прямая $x = 1$, а вершиной — точка с координатами $x = 1$, $y = -4$. В вершине парабола касается горизонтальной прямой $y = -4$. Точка $(1; -4)$ — самая нижняя точка параболы. Переходя на алгебраический язык, можно сказать, что при $x = 1$ функция $y = x^2 - 2x - 3$ принимает наименьшее значение, равное -4: $y_{\min} = -4$.

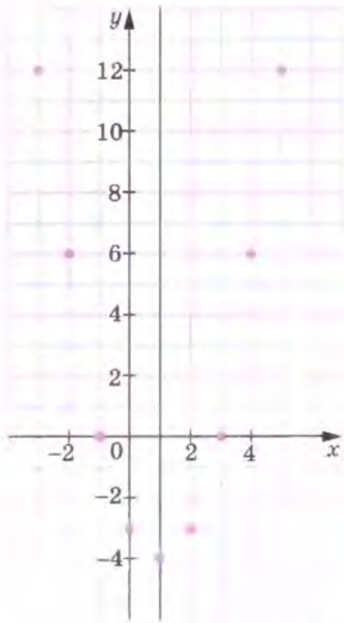


Рис. 2.3

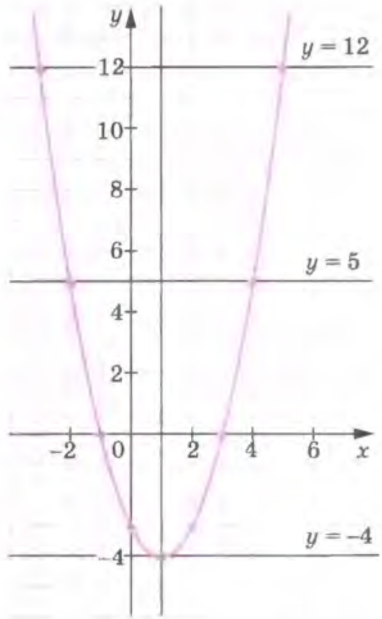


Рис. 2.4

Ветви параболы $y = x^2 - 2x - 3$ неограниченно уходят вверх. Они пересекают любую горизонтальную прямую, расположенную выше прямой $y = -4$, в двух точках, симметричных относительно прямой $x = 1$. Так, парабола пересекает ось x в точках $(-1;\ 0)$ и $(3;\ 0)$, прямую $y = 5$ в точках $(-2;\ 5)$ и $(4;\ 5)$, прямую $y = 12$ в точках $(-3;\ 12)$ и $(5;\ 12)$. (Заметьте: у симметричных точек параболы одинаковые ординаты.)

Эти точки мы непосредственно видим на графике. А как доказать, что парабола $y = x^2 - 2x - 3$ пересекает, к примеру, прямую $y = 1596$? Иными словами, как доказать, что функция $y = x^2 - 2x - 3$ принимает значение, равное 1596?

Для этого решим уравнение

$$x^2 - 2x - 3 = 1596,$$

т. е. $x^2 - 2x - 1599 = 0$. Имеем

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1 + 1599 = 1600;$$

$$x = \frac{1 \pm 40}{1};\ \ x_1 = -39,\ x_2 = 41.$$

Таким образом, функция $y = x^2 - 2x - 3$ принимает значение, равное 1596, дважды — при $x = -39$ и $x = 41$. Значит, график этой функции пересекает прямую $y = 1596$ в точках (–39; 1596) и (41; 1596). Все значения, которые принимает функция, образуют *область значений функции*. Из сказанного ясно, что областью значений рассмотренной функции является промежуток $[-4; +\infty)$.

Областью определения любой квадратичной функции служит множество всех действительных чисел. В то же время, если формула $y = ax^2 + bc + c$ описывает какой-либо реальный процесс, то область определения такой функции может быть у́же, и тогда ее графиком служит не вся парабола, а только ее часть.

Рассмотрим такой пример. Пусть мяч подбросили вертикально вверх с высоты 1,5 м, придав ему начальную скорость 10 м/с. Тогда высота h (в м), на которой находится мяч, есть квадратичная функция времени полета t (в с). Если считать, что $g \approx 10$ м/с^2, то функцию $h = f(t)$ можно описать формулой $h = 1{,}5 + 10t - 5t^2$. График этой функции — часть параболы, изображенной на рисунке 2.5. По графику видно, что мяч взлетел примерно на 6,5 м и после двух секунд полета упал на землю.

Подчеркнем, что кривая на рисунке 2.5 — это не траектория полета. Мяч движется прямолинейно. Часть параболы на рисунке 2.5 показывает изменение высоты мяча над поверхностью земли по мере его подъема вверх и падения вниз.

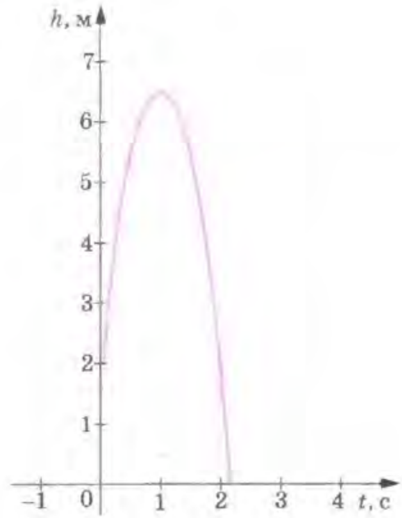


Рис. 2.5

В заключение поговорим об одном важном свойстве параболы. Представьте себе, что парабола вращается вокруг собственной оси. Получается фигура, которую называют *параболоидом*.

Если сделать внутреннюю поверхность параболоида зеркальной и вдоль его оси направить на это зеркало свет, то лучи, отражаясь от поверхности, соберутся в одной точке — *фокусе*.

Это свойство широко используется в технике, в параболических зеркалах, которые можно рассматривать как часть параболоида, получаемую отсечением его «бесконечной части» плоскостью, перпендикулярной его оси. Если такое параболическое зеркало направить на солнце, то температура в фокусе окажется столь вы-

сокой, что можно будет, например, расплавить свинец, вскипятить воду. Кстати, слово «фокус» в переводе с латыни означает «очаг».

Около любого аэродрома можно увидеть параболические антенны. Их используют для того, чтобы собирать в одну точку сигналы радиолокатора, отраженные от самолета.

А

195. Какие из следующих функций являются квадратичными:
$y = 2x^2 - 5x + 1$; $y = (x - 4)^2$; $y = -2x + 3$; $y = 1 - 2x + x^2$; $y = \frac{x^2}{10}$; $y = \frac{10}{x^2}$; $y = x^3 + 3x^2 + x$; $y = \sqrt{x^2}$; $y = -0{,}5x^2$?

196. Для каждой параболы, изображенной на рисунке 2.2, укажите:
а) направление ветвей;
б) уравнение оси симметрии;
в) координаты вершины.

197. Покажите на каждом графике (см. рис. 2.2) точку его пересечения с осью y и симметричную ей точку. Запишите координаты отмеченных точек. Укажите на графике еще одну пару симметричных точек и запишите их координаты.

198. На рисунке 2.6 изображена часть параболы (графика некоторой квадратичной функции) и ее ось симметрии. Перенесите рисунок в тетрадь и достройте параболу. Ответьте на вопросы:

а) Каковы координаты вершины параболы?

б) Чему равно значение y при значении x, равном -4; 1; 3?

в) При каких значениях x значение y равно 0; 3; -3?

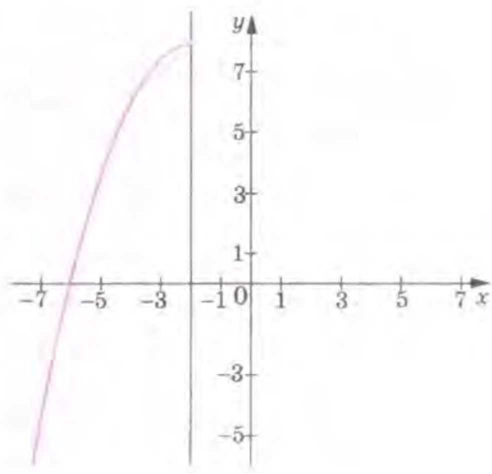


Рис. 2.6

199. Заполните таблицу значений функции и постройте ее график.

а) $y = x^2 - 6x + 5$:

x	$x^2 - 6x + 5$	y
-1	$1 + 6 + 5$	12
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

б) $y = -x^2 + 2x + 3$:

x	$-x^2 + 2x + 3$	y
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		

В каждом случае ответьте на вопросы:

1) Имеет ли функция наименьшее или наибольшее значение и чему оно равно? При каком x функция принимает это значение?

2) Пересекает ли график функции прямую $y = 10$? $y = -10$?

200. Составьте таблицу значений функции и постройте график (проследите за тем, чтобы на графике была вершина и было ясно направление ветвей):

а) $y = x^2 - 5x + 4$; б) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$.

Имеет ли функция наименьшее или наибольшее значение и чему оно равно? При каком x функция принимает это значение?

201. С двухметровой высоты под углом к горизонту выпущена сигнальная ракета. Изменение высоты ее полета h (м) в зависимости от времени движения t (с) описывается формулой $h = 2 + 21t - 5t^2$. График функции $h = f(t)$ изображен на рисунке 2.7. Используя график, ответьте на вопросы:

1) В какое время ракета поднимется на высоту 20 м и в какое время она окажется на той же высоте при спуске?

2) На какой высоте ракета будет через 3,5 с полета? Через сколько секунд после начала полета ракета уже была на той же высоте?

3) Укажите наибольшую высоту подъема ракеты. Сколько времени потребовалось ракете, чтобы подняться на максимальную высоту?

4) Как вы думаете, почему график не доведен до пересечения с осью x?

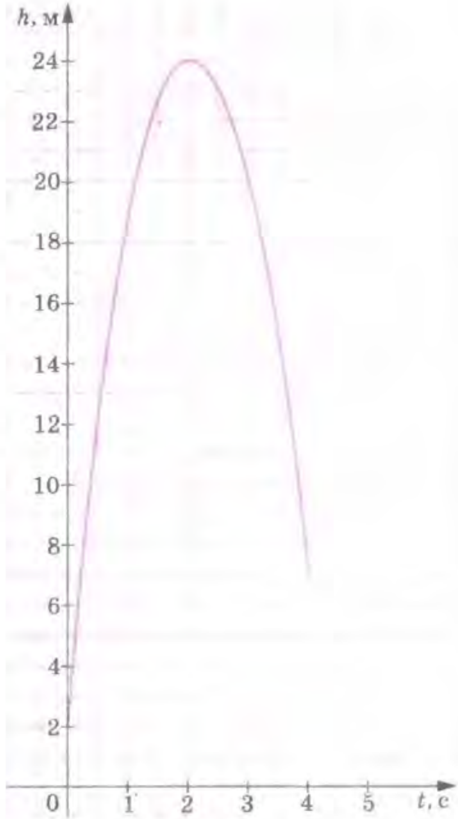


Рис. 2.7

202. Дана функция

$$f(x) = 2x^2 - x - 15.$$

а) Найдите $f(3)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(-2{,}5)$.

б) Найдите значения аргумента, при которых $f(x) = 0$, $f(x) = -5$.

в) Существуют ли значения x, при которых $f(x) = -20$?

203. Найдите на рисунке 2.2 график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$. Определите по графику и вычислите по формуле:

а) $f(0)$, $f(-10)$, $f(2)$;

б) значения аргумента x, при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 4$, $f(x) = 9$.

204. Дана функция $y = g(x)$, где $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$. Запишите на символическом языке утверждение и проверьте, верно ли оно:

а) график функции проходит через точку $(-1; -3)$;

б) график функции пересекает ось y в точке, ордината которой равна -5;

в) при $x = 0$ и $x = 2$ функция принимает равные значения;

г) при $x = 3$ значение функции больше, чем при $x = 4$.

205. Найдите на рисунке 2.2 график функции $y = g(x)$, где $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

а) Верно ли, что $g(2) > 0$, $g(-1) < 0$, $g(3{,}5) > 0$?

б) Укажите несколько значений x, при которых $g(x) > 0$, $g(x) < 0$.

206. Какие из парабол, изображенных на рисунке 2.2:

а) пересекают ось x в двух точках (назовите координаты этих точек);

б) касаются оси x (назовите координаты точки касания);

в) не имеют с осью x общих точек?

Сформулируйте вывод относительно каждого графика, используя термин «нуль функции».

207. Найдите нули функции $y = f(x)$ или покажите, что их нет:

а) $f(x) = x^2 - 7x + 10$; в) $f(x) = 2x^2 - 8x - 8$;

б) $f(x) = -x^2 + 5x - 7$; г) $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$.

В каждом случае опишите полученный результат на геометрическом языке. Попробуйте схематически изобразить соответствующую параболу в координатной плоскости.

208. Докажите, что:

а) числа -4 и 3 являются нулями функции $y = x^2 + x - 12$;

б) функция $y = 2x^2 + 3x + 4$ не имеет нулей.

В каждом случае сформулируйте задачу иначе, используя слова: «уравнение» и «корень уравнения», «трехчлен» и «корень трехчлена», «график функции» и «точка пересечения».

Б

209. Постройте график функции $y = x^2 - x - 6$, пользуясь следующим планом:

1) вычислите координаты точек пересечения параболы с осью x и отметьте эти точки в координатной плоскости;

2) проведите ось симметрии параболы;

3) вычислите координаты вершины параболы и отметьте ее в координатной плоскости;

4) вычислите координаты еще каких-нибудь точек параболы и отметьте их в координатной плоскости;

5) соедините точки плавной линией.

210. Постройте график функции, воспользовавшись алгоритмом, предложенным в предыдущем упражнении:

а) $y = 2x^2 - 2x - 12$; б) $y = -2x^2 + 6x$.

211. Задайте формулой какую-нибудь квадратичную функцию, нулями которой являются числа -1 и 3, и постройте ее график.

212. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 4x + 7$; б) $y = -2x^2 + 4x - 4$.

При построении пользуйтесь следующим планом:

1) найдите пару симметричных точек параболы, взяв, например, в качестве одной из них точку пересечения с осью y;

2) далее действуйте по плану, приведенному в упражнении **209**, начиная с пункта 2.

Как вы думаете, почему в данном случае первый пункт был заменен? Предложите еще какой-нибудь способ нахождения координат симметричных точек параболы.

213. (*Задача-исследование.*) Площадь S прямоугольника с периметром, равным 20 см, является функцией длины основания x (рис. 2.8).

1) Задайте функцию $S(x)$ формулой; убедитесь, что это квадратичная функция.

2) Постройте график этой функции.

3) Укажите промежуток, который является областью определения этой функции.

4) Каковы значения функции в граничных точках области определения? Дайте геометрическое истолкование этого факта.

5) При каком значении длины основания x площадь прямоугольника будет наибольшей? Что это за прямоугольник?

Рис. 2.8

2.2 График и свойства функции $y = ax^2$

До сих пор вы строили график квадратичной функции по точкам, подбирая их так, чтобы в достаточной степени была «обрисована» парабола. Однако при таком способе действий надо следить за тем, чтобы все выбранные точки не оказались на одной ветви параболы и среди них была такая характерная точка, как вершина. Поэтому теперь мы займемся более детальным изучением квадратичной функции, ее свойств, особенностей графика и познакомимся с некоторыми приемами, облегчающими построение параболы.

Начнем с квадратичной функции $y = ax^2$ и выясним, какая существует связь между коэффициентом a и особенностями графика этой функции.

Рассмотрим сначала случай, когда $a > 0$. При $a = 1$ получаем знакомую формулу $y = x^2$. Возьмем другие значения a, например $a = 2$ и $a = \frac{1}{2}$, и рассмотрим функции $y = 2x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$.

Составим таблицы значений этих функций:

$$y = 2x^2$$

x	−2	−1,5	−1	0	1	1,5	2
y	8	4,5	2	0	2	4,5	8

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	4,5	8

На рисунках 2.9 и 2.10 построены графики функций $y = 2x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$. Это параболы, у которых, как и у графика функции $y = x^2$,

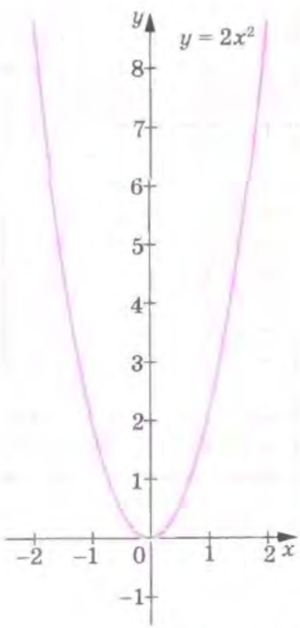


Рис. 2.9

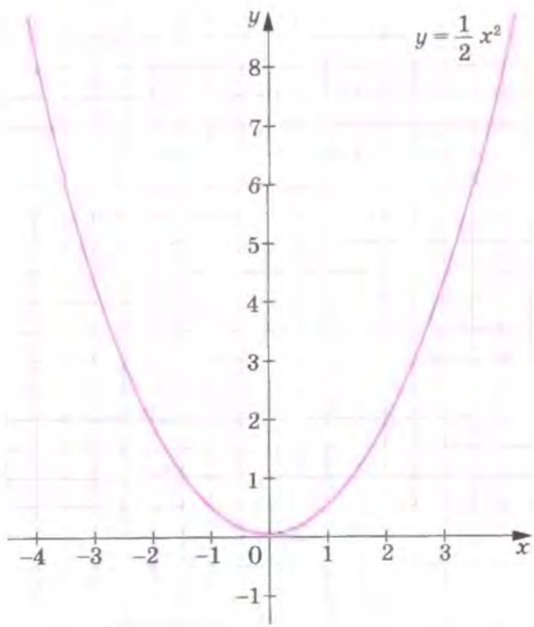


Рис. 2.10

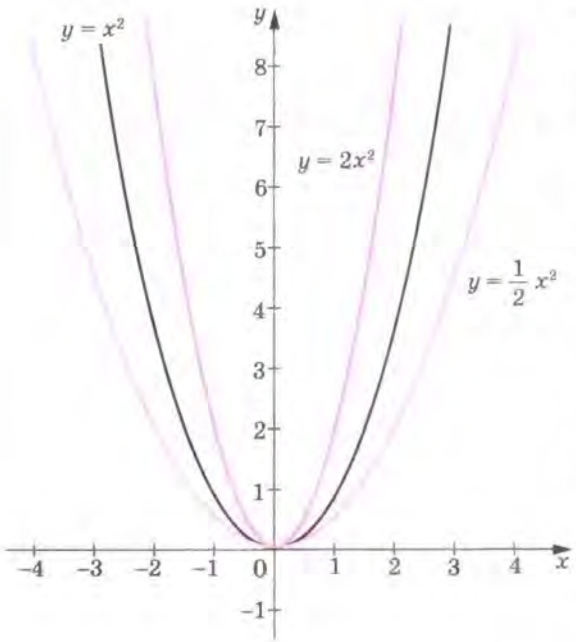


Рис. 2.11

ветви направлены вверх, вершиной служит начало координат, а осью симметрии — ось y. Такими же особенностями обладает график любой квадратичной функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

На рисунке 2.11 графики функций $y = 2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y = x^2$ изображены в одной системе координат. Мы видим, что, чем больше коэффициент a, тем больше «крутизна» параболы. Разная «крутизна» графиков говорит о том, что быстрее всего меняется функция $y = 2x^2$, а медленнее всего — функция $y=\frac{1}{2}x^2$.

Рассмотрим теперь функцию $y = ax^2$ в случае, когда $a < 0$. Возьмем, например, функцию $y=-\frac{1}{2}x^2$ и составим таблицу ее значений:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	$-4{,}5$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-4{,}5$	-8

На рисунке 2.12 изображена парабола, которая является графиком этой функции. Ее вершиной, как и у парабол, рассмотренных выше, служит начало координат, осью симметрии — ось y, однако ветви этой параболы направлены вниз.

Вы, конечно, поняли, как связаны между собой функции $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=-\frac{1}{2}x^2$: при любом x их значения — противоположные числа. Чтобы получить из графика функции $y=\frac{1}{2}x^2$ график

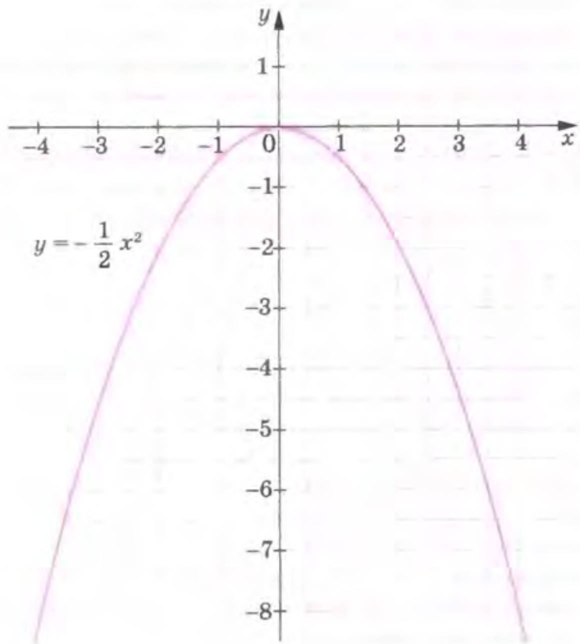


Рис. 2.12

функции $y = -\frac{1}{2}x^2$, нужно каждую точку первого графика заменить точкой с такой же абсциссой, но с противоположной ординатой, т. е. точкой, симметричной точке первого графика относительно оси x. Иными словами, эти графики симметричны относительно оси x (рис. 2.13).

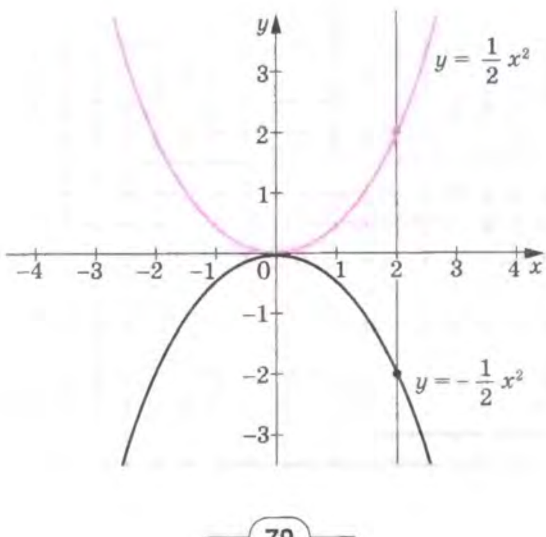


Рис. 2.13

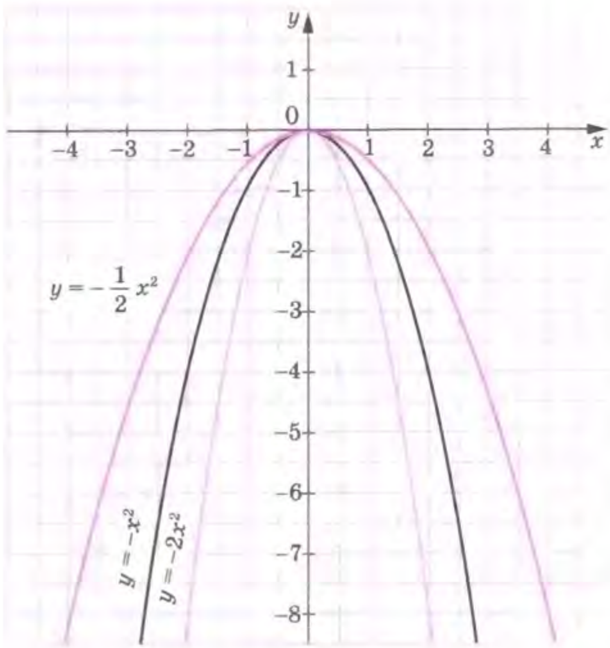


Рис. 2.14

На рисунке 2.14 в одной системе координат построены графики функций $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -x^2$, $y = -2x^2$. Ветви каждой параболы обращены вниз. И вообще, при $a < 0$ ветви параболы $y = ax^2$ направлены вниз.

Таким образом,

> **графиком функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$, является парабола с вершиной в начале координат; ее осью симметрии служит ось y; при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.**

Зная, как выглядит график функции $y = ax^2$, мы можем выяснить некоторые ее свойства.

Сформулируем сначала свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$:

	Особенности графика	Свойства функции
1	График касается оси x в начале координат: точка O (0; 0) — нижняя точка графика	При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение, равное 0

	Особенности графика	Свойства функции
2	Ветви параболы неограниченно уходят вверх; они пересекают любую горизонтальную прямую, расположенную выше оси x	Любое неотрицательное число является значением функции. Область значений функции — промежуток $[0; +\infty)$
3	График симметричен относительно оси y	Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции
4	На промежутке $(-\infty; 0]$ график «идет» вниз; на промежутке $[0; +\infty)$ график «идет» вверх	На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает; на промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает

При $a < 0$ свойства функции $y = ax^2$ будут несколько иными. В самом деле, симметрия относительно оси x меняет полуплоскость, в которой расположен график, на противоположную. При этом меняется на противоположный знак функции; промежуток убывания превращается в промежуток возрастания и наоборот; вместо наименьшего значения функции появляется наибольшее. Предлагаем вам самостоятельно сформулировать свойства функции $y = ax^2$ при $a < 0$.

А

214. Постройте график функции на указанной области определения, составив предварительно таблицу ее значений:

а) $y = 2x^2$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$; б) $y = \frac{1}{2}x^2$, где $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

Для каждой функции укажите ее наибольшее и наименьшее значения на заданном промежутке.

215. Функция задана формулой $y = \frac{1}{2}x^2$.

а) Заполните таблицу для некоторых неотрицательных значений x и постройте график функции:

x	0	1	3	6
y				

б) Найдите по графику значение y при x, равном 1,5; −2,5.

в) Найдите по графику значения x, при которых $y = 3,5; 4$.
г) Проходит ли график функции через точку $(-51; 867)$? $(1,8; 3,24)$? $(-1,2; 0,5)$?

216. Функция задана формулой $y = 3x^2$.
а) Составьте таблицу значений функции и постройте ее график.
б) Отметьте на графике пару симметричных точек и укажите их координаты.
в) В каких точках график пересекает прямую $y = 48$? $y = 75$?

217. а) Постройте график функции $f(x)=\frac{1}{4}x^2$.
б) Постройте в этой же системе координат график функции $g(x)=-\frac{1}{4}x^2$.
в) Вычислите значение выражения $f(10)$. Чему равно значение выражения $g(10)$?
г) График какой из функций $y = f(x)$ или $y = g(x)$ пересекает прямую $y = 100$? $y = -400$? Укажите координаты точек пересечения.

218. а) Постройте график функции $y=-\frac{1}{5}x^2$.
б) Какие из точек $(10; -20)$, $(-5; -5)$, $\left(\frac{1}{5}; -1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{20}\right)$ принадлежат графику этой функции? Запишите координаты еще каких-либо двух точек, одна из которых принадлежит этому графику, а другая нет.
в) Укажите наибольшее и наименьшее значения этой функции на промежутке $[-2; 6]$, на промежутке $[-5; 5]$.

219. Дана функция $y = f(x)$ и указаны координаты точек A и B, одна из которых принадлежит графику этой функции, а другая нет. Не производя вычислений, укажите точку, которая не принадлежит графику, если:
а) $f(x) = -2,6x^2$; $A(-3; 23,4)$; $B(-5; -65)$;
б) $f(x) = 1,8x^2$; $A(-5; 45)$; $B(1,5; -4,05)$.

220. Изобразите в одной и той же системе координат схематически графики функций: $y = 0,3x^2$, $y = -10x^2$, $y = 8x^2$, $y = -0,1x^2$.
а) Какая из парабол самая «крутая»? самая «пологая»?
б) Какие из функций имеют наименьшее значение? наибольшее значение?
в) Укажите промежуток убывания и промежуток возрастания функций $y = 8x^2$ и $y = -0,1x^2$.

221. На рисунке 2.15 даны графики квадратичных функций, заданных формулами:

$$y = 3{,}2x^2,\ y = -0{,}6x^2,$$

$$y = 1{,}6x^2,\quad y = -2\frac{1}{2}x^2,$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2,\ \ y = \frac{1}{4}x^2.$$

Соотнесите каждый из них с одной из формул.

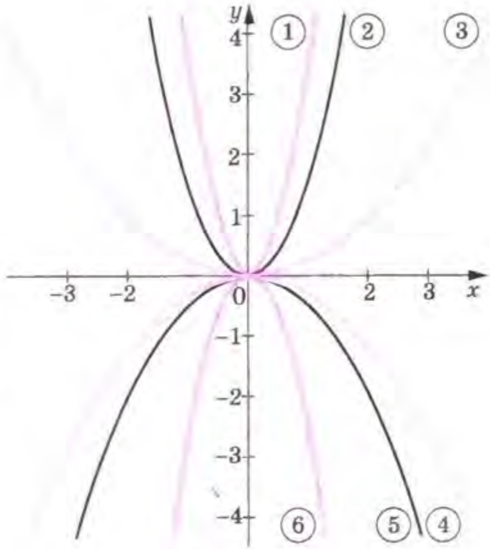


Рис. 2.15

222. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их точек пересечения:

а) $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$;

б) $y = 2x^2$ и $y = -2x + 4$;

в) $y = -0{,}5x^2$ и $y = \frac{4}{x}$;

г) $y = -2x^2$ и $y = -\frac{2}{x}$.

223. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 0 \\ -x^2, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -2x^2, \text{ если } x < 0 \\ 2x^2, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x \leqslant 0 \\ -\frac{1}{2}x^2, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

Для каждой функции определите, является ли она возрастающей или убывающей.

Б

224. Известно, что график квадратичной функции, заданной формулой вида $y = ax^2$, проходит через точку $C(-6;\ -9)$.
а) Укажите координаты точки графика, которая симметрична точке C.
б) Найдите коэффициент a.
в) Укажите координаты каких-нибудь двух точек, одна из которых принадлежит графику, а другая нет.

225. Используя схематический график, сравните значения выражений:

а) $3 \cdot 0{,}125^2$ и $3 \cdot (-0{,}125)^2$;
б) $5 \cdot (-17)^2$ и $5 \cdot (-7)^2$;
в) $-2 \cdot 91^2$ и $-2 \cdot 19^2$;
г) $-4 \cdot 1{,}5^2$ и $-4 \cdot (-1{,}5)^2$;
д) $0{,}5 \cdot 25^2$ и $0{,}5 \cdot 45^2$;
е) $-\frac{1}{3} \cdot (-0{,}5)^2$ и $-\frac{1}{3} \cdot (-1{,}5)^2$.

226. Укажите координаты какой-либо точки графика функции $y = 20x^2$, расположенной:
а) выше прямой $y = 1000$;
б) ниже прямой $y = 800$;
в) выше прямой $y = 1200$ и ниже прямой $y = 1500$.

227. Длина окружности l вычисляется по формуле $l = 2\pi r$, а площадь круга S — по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус. Постройте график зависимости: а) длины окружности от радиуса; б) площади круга от радиуса. (Считайте, что $\pi \approx 3$.)

228. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x + 3, \text{ если } x \leqslant 0 \\ 3x^2, \text{ если } x > 0; \end{cases}$
б) $y = \begin{cases} -2x^2, \text{ если } x < 0 \\ -x + 2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

Для каждой функции ответьте на вопрос: имеет ли функция наименьшее значение? наибольшее значение?

229. Постройте график функции $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \leqslant 1 \\ x^2, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

230. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = |x|$ и $y = -|x|$;
б) $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$;
в) $y = x^3$ и $y = -x^3$;
г) $y = \frac{2}{x}$ и $y = -\frac{2}{x}$.

231. На рисунке 2.16, *а*, *б* изображен график функции $y = f(x)$. Перечертите график в тетрадь и в этой же системе координат постройте график функции $y = -f(x)$.

232. (*Задача-исследование.*)

1) Постройте параболу $y = \frac{1}{4}x^2$.

2) В этой же системе координат проведите прямую d, уравнение которой $y = -1$, и отметьте точку $F(0;\ 1)$.
3) Отметьте на параболе несколько точек с целыми координатами и для каждой из них вычислите расстояния до точки F и до прямой d.

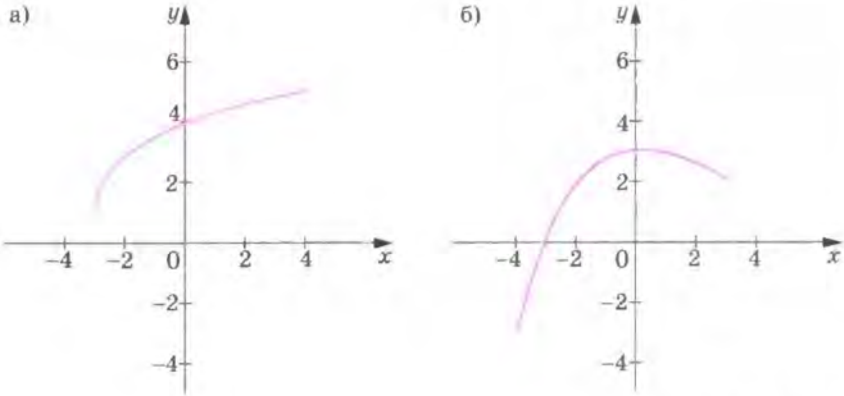


Рис. 2.16

4) Докажите, что любая точка параболы $y = \frac{1}{4}x^2$ находится на одинаковом расстоянии от точки F и от прямой d.

Указание. Возьмите произвольную точку параболы $\left(x; \frac{1}{4}x^2\right)$. Составьте выражения для нахождения расстояний от этой точки до точки F и до прямой d.

2.3 Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат

Построим график функции $y = x^2$ (рис. 2.17, *а*). Будем считать его твердым телом, сделанным, например, из проволоки. Сдвинем этот график вдоль оси y вверх на 2 единицы (рис. 2.17, *б*). Теперь вершиной параболы служит точка (0; 2), а осью симметрии по-

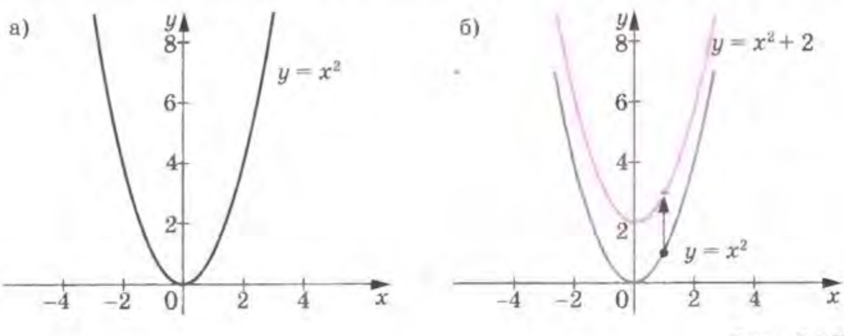


Рис. 2.17

прежнему является ось y. Эта парабола — график некоторой новой функции. Каким уравнением можно задать эту функцию?

Легко видеть, что при сдвиге графика на 2 единицы вверх абсцисса каждой его точки осталась прежней, а ордината увеличилась на 2. Это означает, что у новой параболы точка с абсциссой x имеет ординату, равную $x^2 + 2$. Другими словами, новая парабола является графиком функции $y = x^2 + 2$.

Рассуждая так же, можно показать, что если график функции $y = 1{,}5x^2$ перенести вдоль оси y на 6 единиц вниз, то получим параболу, которую можно задать уравнением $y = 1{,}5x^2 - 6$ (рис. 2.18).

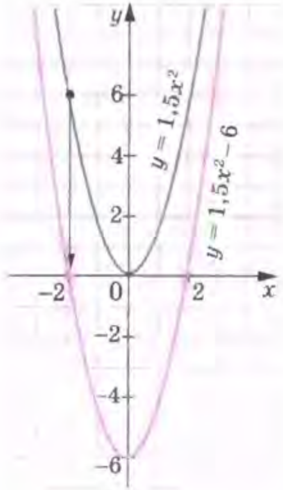


Рис. 2.18

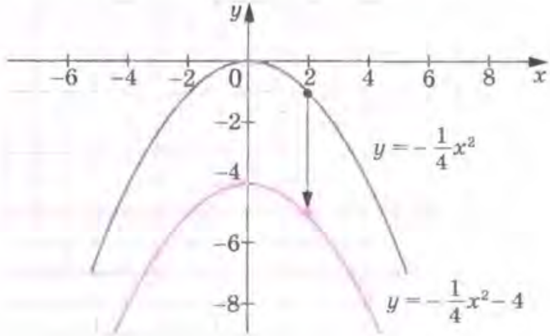


Рис. 2.19

Если же перенести на 4 единицы вниз график функции $y = -\frac{1}{4}x^2$, то получится парабола, которую можно задать уравнением $y = -\frac{1}{4}x^2 - 4$ (рис. 2.19).

В каждом случае мы приходим к уравнению вида $y = ax^2 + q$, где q — ордината вершины новой параболы; число q положительное, если парабола $y = ax^2$ сдвигается вверх, и отрицательное, если она сдвигается вниз.

Теперь понятно, как с помощью параболы $y = ax^2$ можно получить график функции $y = ax^2 + q$.

Чтобы построить график функции $y = ax^2 + q$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ вдоль оси y вверх на отрезок длины q, если $q > 0$, или вниз на отрезок длины $|q|$, если $q < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке $(0; q)$.

■ Пример 1. Построим график функции

$$y=-\frac{1}{2}x^2+3.$$

Этот график можно получить сдвигом на 3 единицы вверх графика функции $y=-\frac{1}{2}x^2$. Поэтому поступим следующим образом: построим параболу $y=-\frac{1}{2}x^2$, перенесем ее вершину в точку (0; 3), затем сдвинем еще какие-либо две пары симметричных точек этой параболы на 3 единицы вверх и соединим их плавной линией. Эта линия и есть график функции $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ (рис. 2.20).

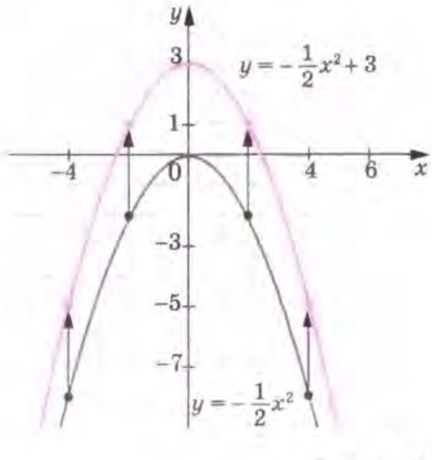


Рис. 2.20

В то же время заметим, что вспомогательный график функции $y=\frac{1}{2}x^2$ строить необязательно. Чтобы определить положение вершины и направление ветвей параболы $y=-\frac{1}{2}x^2+3$, параллельный перенос параболы $y=-\frac{1}{2}x^2$ можно выполнить мысленно или схематично на бумаге. Наметив вершину, нужно затем по формуле $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ вычислить координаты еще нескольких точек, например (2; 1) и (−2; 1), (4; −5) и (−4; −5), отметить их на координатной плоскости и провести через все отмеченные точки плавную линию.

Рассмотрим теперь сдвиги графика функции $y = ax^2$ вдоль оси абсцисс. Возьмем параболу $y = x^2$ (рис. 2.21, *а*). Сдвинем ее вдоль оси x на 2 единицы влево (рис. 2.21, *б*). Теперь вершиной параболы является точка (−2; 0), а осью симметрии — прямая $x = -2$, параллельная оси y. Каким уравнением можно описать эту новую параболу? Ситуация здесь оказывается сложнее, чем при сдвиге вдоль оси y.

Итак, у нас есть график функции — сдвинутая влево парабола, и нам нужна формула, которой она задается. Другими словами, нам надо задать правило вычисления ординаты точки этого графика по ее абсциссе.

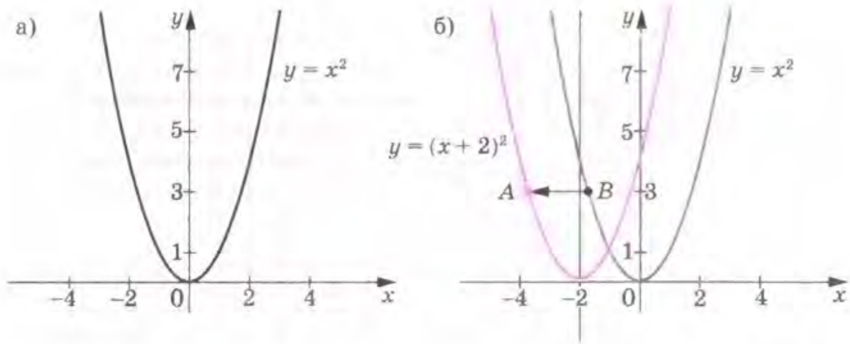


Рис. 2.21

Для этого возьмем произвольную точку A на сдвинутой параболе. Пусть ее координаты равны x и y. Эта точка получена при сдвиге на 2 единицы влево точки B исходной параболы ($AB = 2$). Поэтому точка B имеет ту же ординату y, что и точка A, а ее абсцисса на 2 больше, чем у точки A, т. е. она равна $x + 2$.

Но ордината каждой точки исходной параболы равна квадрату ее абсциссы, так что $y = (x + 2)^2$. Следовательно, ордината y точки A вычисляется по ее абсциссе по формуле $y = (x + 2)^2$ — это и есть искомая формула.

Рассуждая так же, можно показать, что если график функции $y = 2x^2$ передвинуть вдоль оси x на 5 единиц вправо, то получившуюся параболу можно задать уравнением $y = 2(x - 5)^2$ (рис. 2.22). Если же сдвинуть на 4 единицы влево график функции $y = -3x^2$, то получится парабола, которую можно задать уравнением $y = -3(x + 4)^2$ (рис. 2.23).

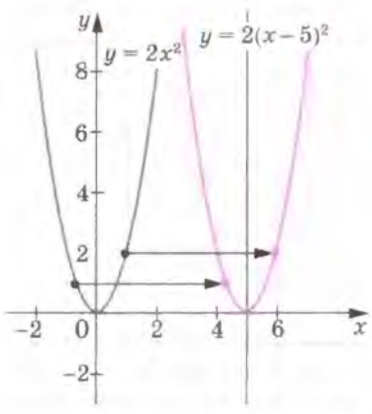


Рис. 2.22

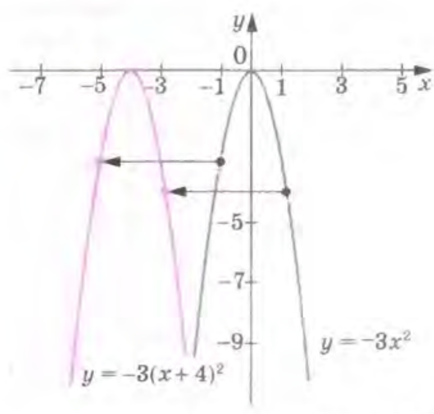


Рис. 2.23

В каждом случае мы приходим к уравнению вида $y = a(x + p)^2$, где p — число, противоположное абсциссе вершины параболы; число p положительное, если парабола $y = ax^2$ сдвигается влево, и отрицательное, если она сдвигается вправо. Отсюда ясно, как с помощью параболы $y = ax^2$ можно получить график функции $y = a(x + p)^2$.

Чтобы построить график функции $y = a(x + p)^2$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ влево вдоль оси x на отрезок длины p, если $p > 0$, или вправо на отрезок длины $|p|$, если $p < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке $(-p; 0)$.

■ Пример 2. Построим график функции $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2$.

Этот график можно получить сдвигом на 3 единицы вправо параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$. Выполнив этот сдвиг мысленно или схематически на бумаге, выясним, каково положение параболы $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2$ в координатной плоскости: ее вершиной служит точка (3; 0), осью симметрии — вертикальная прямая $x = 3$, а ее ветви, как и у параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$, направлены вниз (рис. 2.24, *а*).

Вычислим координаты еще нескольких точек параболы, двигаясь влево и вправо от оси симметрии: (1; −2) и (5; −2), (0; −4,5) и (6; −4,5). Отметим эти точки в координатной плоскости и соединим все построенные точки плавной линией. Получим график функции $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2$ (рис. 2.24, *б*).

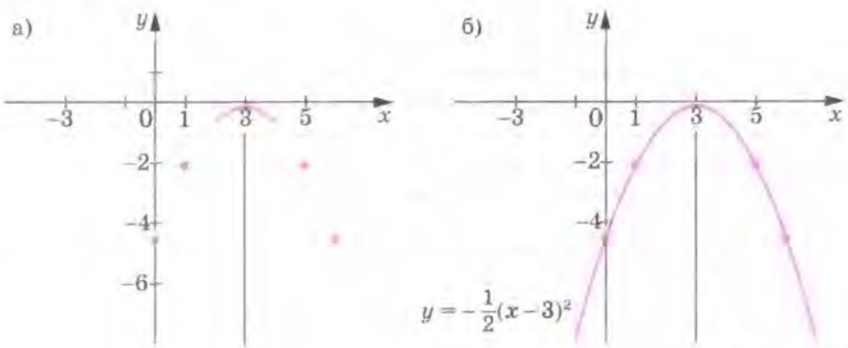


Рис. 2.24

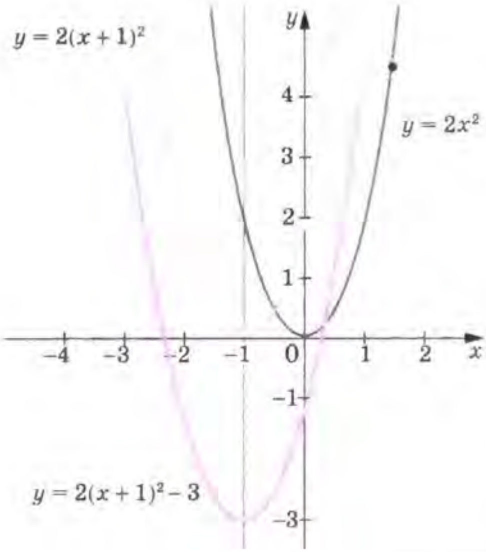


Рис. 2.25

Используя сдвиги параболы вдоль осей координат, можно строить и более сложные графики.

■ **Пример 3.** Построим график функции

$$y = 2(x+1)^2 - 3.$$

Будем действовать следующим образом:

1) построим параболу $y = 2x^2$;
2) перенесем ее на 1 единицу влево — в результате получится график функции $y = 2(x+1)^2$;
3) сдвинем построенный график на 3 единицы вниз — получится график заданной функции $y = 2(x+1)^2 - 3$ (рис. 2.25).

Действия, которые мы выполнили для построения графика, можно описать такой схемой:

$$y = 2x^2 \xrightarrow{\text{влево на 1 ед.}} y = 2(x+1)^2 \xrightarrow{\text{вниз на 3 ед.}} y = 2(x+1)^2 - 3.$$

Параллельные переносы можно было бы выполнять и в другом порядке: сначала сдвинуть параболу $y = 2x^2$ на 3 единицы вниз — получился бы график функции $y = 2x^2 - 3$, а затем построенный график сдвинуть на 1 единицу влево — получился бы график функции $y = 2(x+1)^2 - 3$:

$$y = 2x^2 \xrightarrow{\text{вниз на 3 ед.}} y = 2x^2 - 3 \xrightarrow{\text{влево на 1 ед.}} y = 2(x+1)^2 - 3.$$

Конечно, для получения графика функции $y = 2(x+1)^2 - 3$ необязательно строить две промежуточные параболы. Можно, выполнив сдвиги вдоль координатных осей мысленно или схематично на бумаге, отметить в плоскости вершину параболы — точку $(-1; -3)$, провести через вершину ось симметрии графика, уточнить направление ветвей, а затем построить параболу по точкам. (Постройте график функции $y = 2(x+1)^2 - 3$ таким способом самостоятельно.)

Вообще график функции, заданной формулой вида $y = a(x+p)^2 + q$, можно получить из параболы $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: вдоль оси x на $|p|$ единиц — влево или вправо в зависимости от знака числа p и вдоль оси y на $|q|$ единиц — вверх или вниз в зависимости от знака числа q. Вершиной параболы $y = a(x + p)^2 + q$ будет точка $(-p;\ q)$.

Вернемся к формуле $y = 2(x + 1)^2 - 3$, рассмотренной в примере 3. Преобразуем правую часть этой формулы в многочлен: $2(x + 1)^2 - 3 = 2x^2 + 4x - 1$. Мы видим, что, по сути, был построен график функции $y = 2x^2 + 4x - 1$.

Этот вывод подсказывает нам, как надо действовать, если требуется построить график функции, заданной формулой вида

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Нужно представить эту формулу в виде $y = a(x + p)^2 + q$ и выяснить, с помощью каких параллельных переносов можно построить график данной функции.

■ Пример 4. Построим график функции $y = x^2 + 4x - 5$.

Выделим квадрат двучлена из трехчлена $x^2 + 4x - 5$:

$$x^2 + 4x - 5 = (x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4) - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9.$$

Теперь ясно, что график функции $y = x^2 + 4x - 5$ может быть получен из графика функции $y = x^2$ с помощью сдвига на 2 единицы влево и на 9 единиц вниз. Поэтому вершиной параболы $y = x^2 + 4x - 5$ служит точка $(-2;\ -9)$, осью симметрии — прямая $x = -2$, а ветви ее, как и у параболы $y = x^2$, направлены вверх.

Чтобы построить график, вычислим по формуле $y = x^2 + 4x - 5$ координаты еще некоторых его точек.

Например, возьмем точки $(-3;\ -8)$ и $(-1;\ -8)$, $(-4;\ -5)$ и $(0;\ -5)$, $(-5;\ 0)$ и $(1;\ 0)$. График функции $y = x^2 + 4x - 5$ изображен на рисунке 2.26.

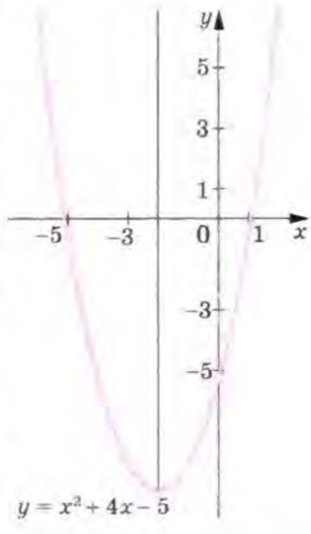


Рис. 2.26

А

233. Изобразите схематически график функции и задайте эту функцию формулой, если известно, что ее график получен сдвигом вдоль оси y:

а) параболы $y = 2x^2$ на 4 единицы вверх;

б) параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ на 5 единиц вниз;

в) параболы $y = -x^2$ на 2,5 единицы вверх;

г) параболы $y = -3x^2$ на 1,5 единицы вниз.

234. Задайте формулой параболу, изображенную на рисунке 2.27, *а—г*, если известно, что она получена сдвигом вдоль оси y параболы:

а) $y = x^2$; б) $y = \frac{1}{2}x^2$; в) $y = -2x^2$; г) $y = -x^2$.

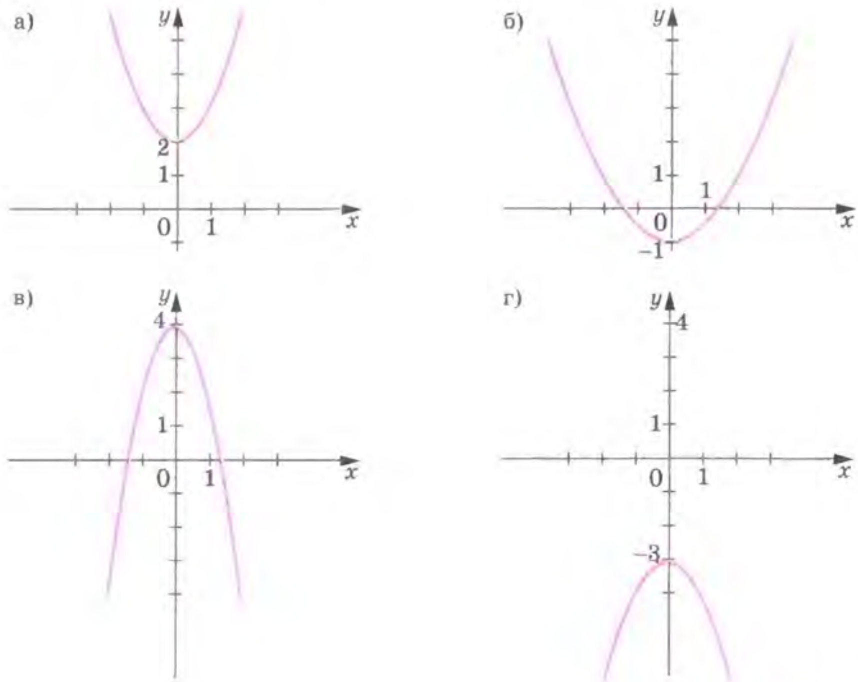


Рис. 2.27

235. Назовите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 + 10$; г) $y = -10x^2 + 1{,}2$;

б) $y = 0{,}5x^2 - 3$; д) $y = 2x^2 - 4{,}8$;

в) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 1{,}5$; е) $y = -3x^2 + 2$.

236. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4$; в) $y = -x^2 + 1$;

б) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$; г) $y = -2x^2 - 1$.

Для каждой функции укажите промежуток возрастания и промежуток убывания, а также наибольшее (или наименьшее) значение.

237. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 1$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$;

б) $y = -x^2 + 9$; г) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$.

238. Постройте график функции на заданной области определения и укажите ее наименьшее и наибольшее значения:

а) $y = x^2 - 3$, где $-2 \leqslant x \leqslant 3$;

б) $y = -3x^2 + 2$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, где $-4 \leqslant x \leqslant 0$;

г) $y = 4 - \frac{1}{4}x^2$, где $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

239. С помощью схематического рисунка определите, пересекает ли ось x график функции:

а) $y = 12x^2 - 3$; в) $y = 0{,}7x^2 + 7$;

б) $y = -5x^2 - 2$; г) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 9$.

240. Из приведенного списка функций

$y = 1{,}3x^2 - 1{,}2$, $y = -1{,}4 - 2{,}5x^2$, $y = 2{,}5 - 3x^2$,

$y = 3{,}5x^2 + 2{,}7$, $y = -0{,}7x^2 - 3{,}5$, $y = 6{,}1 - 0{,}8x^2$

выберите те, которые:

а) принимают только положительные значения (укажите наименьшее значение функции);

б) принимают только отрицательные значения (укажите наибольшее значение функции).

241. С помощью схематического графика определите, имеет ли функция нули, и в случае утвердительного ответа найдите их, решив соответствующее уравнение:

а) $y = \frac{1}{3}x^2 + 3$; б) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 6$; в) $y = 3 - \frac{1}{2}x^2$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$.

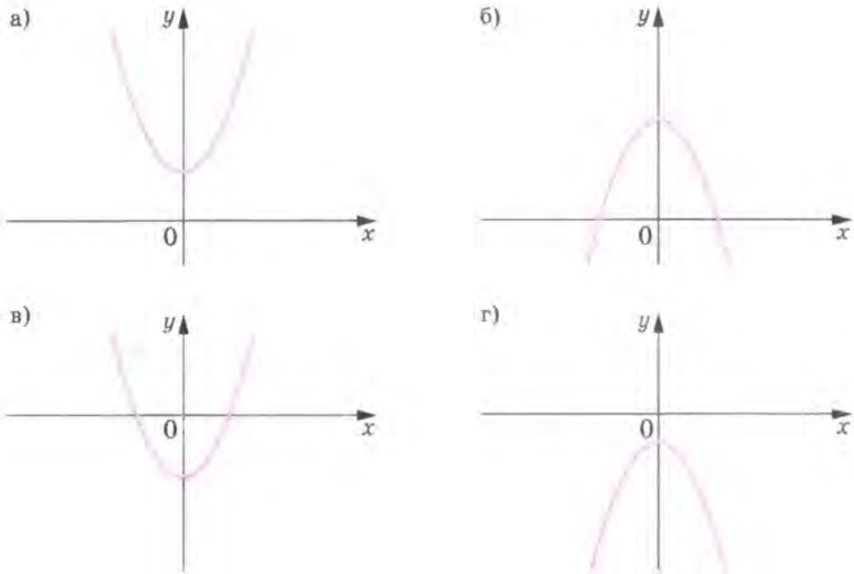


Рис. 2.28

242. На рисунке 2.28, *а—г* изображены графики функций вида $y = ax^2 + q$. В каждом случае укажите знаки коэффициентов a и q.

243. Изобразите схематически график функции и задайте эту функцию формулой, если известно, что график получен сдвигом вдоль оси x:

а) параболы $y = 2x^2$ на 3 единицы влево;

б) параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ на 6 единиц вправо;

в) параболы $y = -x^2$ на 4 единицы влево;

г) параболы $y = -3x^2$ на 2 единицы вправо.

244. Задайте формулой параболу, изображенную на рисунке 2.29, *а—г*, если известно, что она получена сдвигом вдоль оси x параболы $y = 2x^2$.

245. Назовите координаты вершины параболы, заданной уравнением:

а) $y = (x + 1)^2$; в) $y = -(x - 1)^2$;

б) $y = 5(x - 3)^2$; г) $y = -2(x + 5)^2$.

246. Постройте график функции:

а) $y = (x - 4)^2$; в) $y = -(x + 3)^2$;

б) $y = 2(x + 2)^2$; г) $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2$.

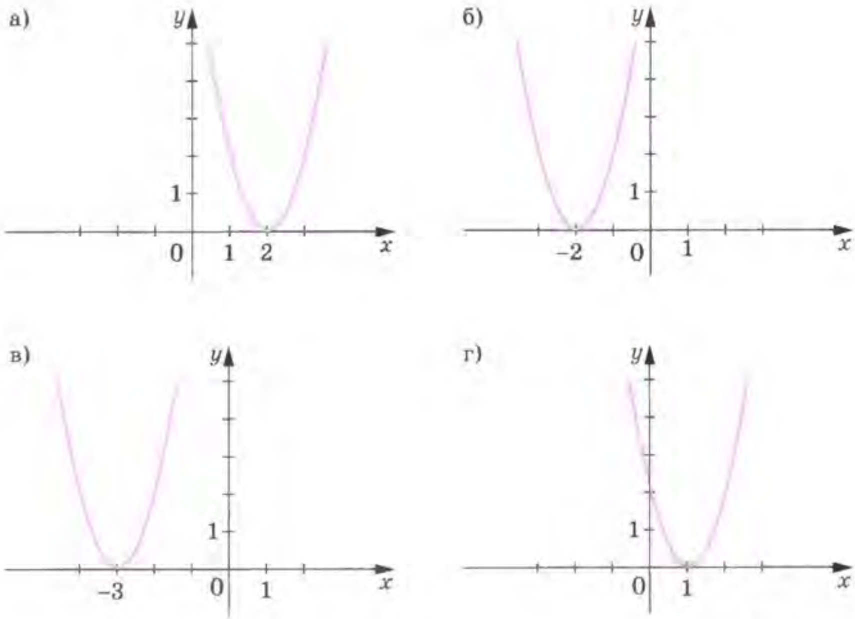


Рис. 2.29

Воспользуйтесь следующим планом:
1) найдите координаты вершины параболы и отметьте вершину в координатной плоскости;
2) проведите через вершину ось симметрии параболы;
3) покажите маленькой дугой направление ветвей параболы;
4) постройте несколько точек графика по разные стороны от оси симметрии;
5) соедините построенные точки параболы плавной линией.

247. На рисунке 2.30 изображены графики функций:

$y = 0{,}7x^2 + 1,\qquad y = 0{,}7(x - 1)^2,$

$y = -0{,}7x^2 + 1,\qquad y = -0{,}7(x - 1)^2.$

Для каждого графика укажите соответствующую формулу.

248. Для каждой функции определите, какая линия является ее графиком, и покажите схематически ее положение в координатной плоскости:

а) $y = (x - 1)^2$, $y = 1 - x$, $y = -\frac{1}{x}$, $y = 1 - x^2$;

б) $y = 6 + x^2$, $y = (x + 6)^2$, $y = 6 + x$, $y = \frac{6}{x}$.

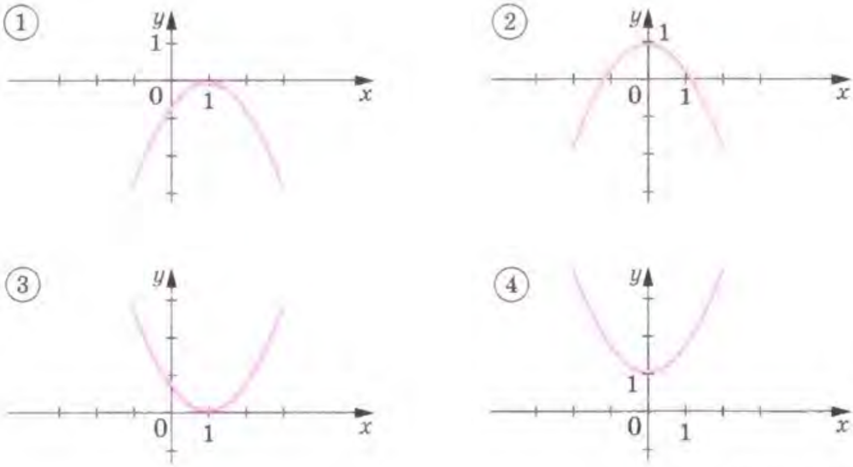


Рис. 2.30

249. Назовите координаты вершины параболы и укажите направление ее ветвей:

а) $y = 3(x - 7)^2 + 1$; в) $y = (x - 3)^2 - 4$;

б) $y = -2(x + 2)^2 + 8$; г) $y = -(x + 5)^2 - 5$.

250. Постройте график функции:

а) $y = (x + 3)^2 - 4$; в) $y = -(x + 1)^2 - 1$;

б) $y = -2(x - 1)^2 + 3$; г) $y = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1$.

Для каждой функции укажите наибольшее (или наименьшее) значение, а также промежуток убывания и промежуток возрастания.

251. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 2x + 3$; в) $y = x^2 + 6x + 8$;

б) $y = x^2 + 4x$; г) $y = x^2 - 4x + 4$.

Б

252. Задайте формулой каждую функцию, график которой изображен на рисунке 2.31.

253. Постройте параболу $y = x^2 + 2$. Постройте параболу, симметричную данной относительно оси x, и задайте ее уравнением.

254. Параболу $y = x^2$ сдвинули на несколько единиц вдоль оси x так, что она прошла через точку M. Запишите формулу, соответствующую новой параболе, если точка M имеет координаты:

а) $x = 0$, $y = 4$;

б) $x = -4$, $y = 4$.

Сколько решений имеет задача в каждом случае?

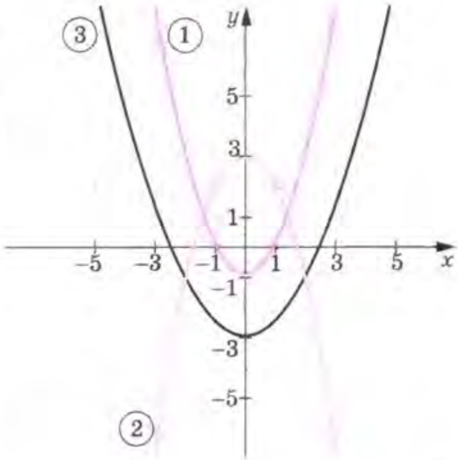


Рис. 2.31

255. При каких значениях коэффициента имеет нули функция:

а) $y = ax^2 + 7$;

б) $y = 10x^2 + q$?

256. Запишите уравнение параболы в виде $y = a(x + p)^2 + q$, если известно, что она получена:

а) из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси x на 5 единиц влево и вдоль оси y на 3 единицы вниз;

б) из параболы $y = 2x^2$ сдвигом вдоль оси y на 6 единиц вверх и вдоль оси x на 1 единицу вправо;

в) из параболы $y = -5x^2$ сдвигом вдоль оси x на 4 единицы влево и вдоль оси y на 4 единицы вверх.

257. Запишите уравнение вида $y = ax^2 + bx + c$ для параболы, изображенной на рисунке 2.32, *а—г*, если известно, что она получена сдвигами вдоль осей координат параболы:

а) $y = 2x^2$; б) $y = -x^2$; в) $y = 0{,}5x^2$; г) $y = -0{,}5x^2$.

Указание. Составьте для каждого графика соответствующую ему формулу в виде $y = a(x + p)^2 + q$, а затем преобразуйте ее к виду $y = ax^2 + bx + c$.

258. Постройте график функции:

а) $y = -x^2 - 2x + 1$; в) $y = x^2 - x + 2$;

б) $y = 2x^2 - 4x + 6$; г) $y = 2x^2 + 8x$.

Указание. Приведите формулу к виду $y = a(x + p)^2 + q$.

259. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = |x|$, $y = |x| - 2$, $y = |x - 2|$;

б) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} - 4$, $y = \sqrt{x - 4}$;

в) $y = x^3$, $y = x^3 + 2$, $y = (x + 2)^3$.

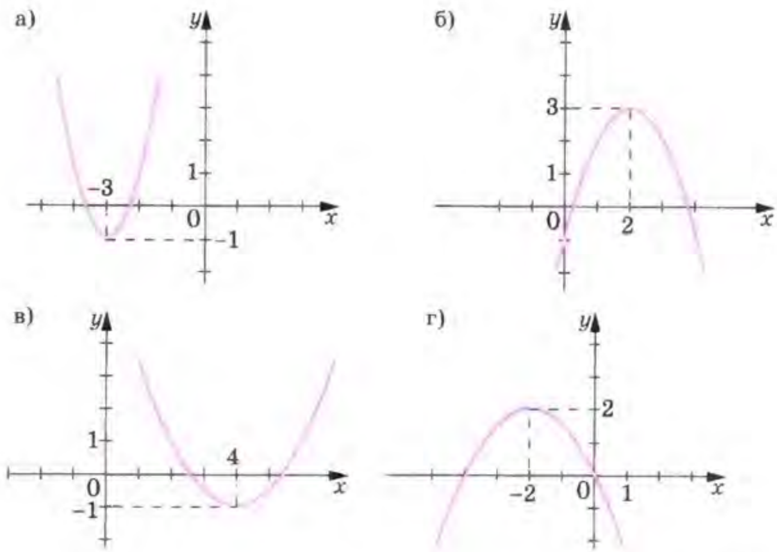


Рис. 2.32

260. На рисунке 2.33 изображен график функции $y = f(x)$. Перенесите рисунок в тетрадь и в той же системе координат постройте график функции:

а) $y = f(x) + 4$; б) $y = f(x + 3)$.

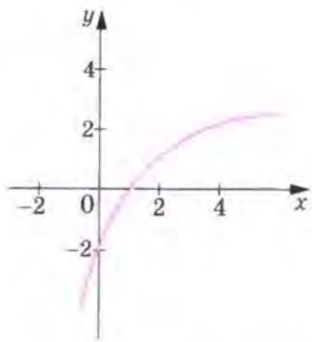


Рис. 2.33

261. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ если } x \geqslant 0 \\ -x^2 - 1, \text{ если } x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ если } x < 0 \\ x^2 - 2, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x < -1 \\ 2x^2 - 1, \text{ если } |x| \leqslant 1 \\ x, \text{ если } x > 1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} -(x + 3)^2, \text{ если } x < -3 \\ 0, \text{ если } |x| \leqslant 3 \\ (x - 3)^2, \text{ если } x > 3. \end{cases}$

262. (*Задача-исследование.*)

1) Сравните значения функции $y = x^2 + 1$ при $x = -3$ и $x = 3$, при $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$, при $x = -100$ и $x = 100$. Какое свойство этой функции вы обнаружили? Обладает ли этим свойством функция $y = (x + 1)^2$? $y = x^2 + x$?

2) Функцию $y = f(x)$ называют *четной*, если ее область определения симметрична относительно начала координат и при любом значении x из области определения $f(-x) = f(x)$. Так, функция $y = x^2 + 1$ четная, а функции $y = (x + 1)^2$ и $y = x^2 + x$ четными не являются. Придумайте свои примеры четных функций.

3) Каким свойством обладает график четной функции? Начертите в системе координат какую-нибудь линию, которая может служить графиком четной функции.

2.4 График функции $y = ax^2 + bx + c$

В предыдущем пункте мы показали, что график функции $y = x^2 + 4x - 5$ можно получить из параболы $y = x^2$, выполнив параллельные переносы вдоль координатных осей (см. пример 4). Для этого нам пришлось преобразовать трехчлен $x^2 + 4x - 5$, выделив в нем квадрат двучлена. Оказывается, для любой квадратичной функции верно утверждение:

график функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельных переносов вдоль координатных осей.

Чтобы убедиться в этом, решим задачу в общем виде, т. е. представим выражение $ax^2 + bx + c$ в виде $a(x + p)^2 + q$:

$$2x^2 + 3x + 2 =$$
$$= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + 1\right) =$$
$$= 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + 1\right) =$$
$$= 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) =$$
$$= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$$

$$ax^2 + bx + c =$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Таким образом, мы представили формулу $y = ax^2 + bx + c$ в виде $y = a(x + p)^2 + q$, где $p = \frac{b}{2a}$ и $q = \frac{4ac - b^2}{4a}$, и наше утверждение является верным.

Отсюда следует, что:

график функции $y = ax^2 + bx + c$ — это такая же парабола, что и парабола $y = ax^2$;
у параболы $y = ax^2 + bx + c$ то же направление ветвей, что и у параболы $y = ax^2$, т. е. при $a > 0$ они направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз;
вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$ служит точка с координатами $x = -\frac{b}{2a}$ и $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$, а осью симметрии — вертикальная прямая $x = -\frac{b}{2a}$.

Эти выводы дают нам новый удобный способ нахождения координат вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$: зная коэффициенты a, b и c, эти координаты можно просто вычислить по формулам. При этом достаточно помнить только формулу $x = -\frac{b}{2a}$, по которой находится абсцисса вершины. А ее ординату можно получить, подставив найденную абсциссу в уравнение параболы.

Таким образом, теперь у вас есть разные способы нахождения координат «главной» точки параболы $y = ax^2 + bx + c$ — ее вершины: с помощью выделения квадрата двучлена и путем вычислений по формулам. И вы можете пользоваться тем из них, который вам больше нравится.

■ Пример 1. Построим параболу, заданную уравнением

$$y = -x^2 + 2x + 8.$$

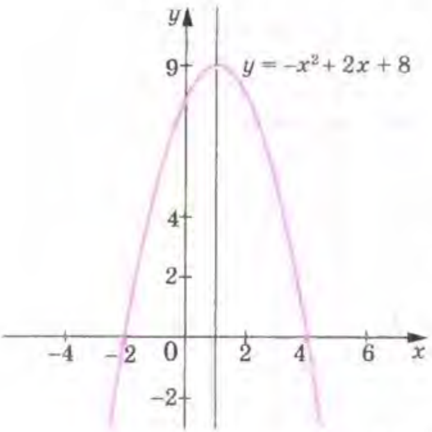


Рис. 2.34

Сначала найдем координаты вершины:

$$x = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1,$$

$$y = -1^2 + 2 \cdot 1 + 8 = 9.$$

Отметим точку (1; 9) в координатной плоскости, проведем ось симметрии параболы — прямую $x = 1$ и обратим внимание на то, что ветви параболы направлены вниз.

Найдем координаты еще нескольких симметричных точек графика: (0; 8) и (2; 8), (−1; 5) и (3; 5), (−2; 0) и (4; 0).

Отметим найденные точки в координатной плоскости и проведем через них плавную линию. Получим параболу $y = -x^2 + 2x + 8$ (рис. 2.34).

По графику функции $y = -x^2 + 2x + 8$ мы можем выяснить ее свойства:

функция возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$ и убывает на промежутке $[1; +\infty)$;

$y = 0$ при $x = -2$ и $x = 4$; $y > 0$ при $-2 < x < 4$; $y < 0$ при $x < -2$ и $x > 4$;

при $x = 1$ функция принимает наибольшее значение $y_{max} = 9$;

областью значений функции служит промежуток $(-\infty; 9]$.

■ Пример 2. Мяч бросили вертикально вверх с высоты 3 м с начальной скоростью 9 м/с. На какую максимальную высоту поднялся мяч и когда он упал на землю?

Из курса физики вы знаете, что высота h, на которой находится мяч, является квадратичной функцией времени полета t. Она вычисляется по формуле

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0.$$

Подставив в эту формулу значения v_0 и h_0 и считая, что $g \approx 9{,}8$ м/с^2, получим $h = -4{,}9t^2 + 9t + 3$.

График функции $h = f(t)$ схематично изображен на рисунке 2.35.

Чтобы найти наибольшую высоту подъема мяча, т. е. наибольшее значение функции h, вычислим координаты вершины параболы:

$$t = -\frac{9}{2 \cdot (-4{,}9)} \approx 0{,}9; \quad h \approx -4{,}9 \cdot 0{,}9^2 + 9 \cdot 0{,}9 + 3 \approx 7{,}1.$$

Таким образом, максимальная высота, на которую поднялся мяч, равна 7,1 м. Заодно мы выяснили, что это произошло через 0,9 с после броска.

Чтобы узнать, когда мяч упал на землю, т. е. чтобы найти значение t, при котором $h = 0$, решим уравнение

$$-4{,}9t^2 + 9t + 3 = 0.$$

Имеем

$$4{,}9t^2 - 9t - 3 = 0;$$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 58{,}8}}{9{,}8} \approx \frac{9 \pm 11{,}8}{9{,}8};$$

$$t_1 \approx 2{,}1; \ t_2 \approx -0{,}3.$$

Условию задачи удовлетворяет только положительный корень уравнения. Значит, мяч упал на землю после 2 с полета.

Рис. 2.35

A

263. Вычислите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 - 4x + 2$; в) $y = 2x^2 - 6x + 2$;

б) $y = x^2 + 18x - 6$; г) $y = -3x^2 + 6x + 5$.

264. Укажите направление ветвей параболы, вычислите координаты вершины и покажите схематически расположение параболы в координатной плоскости:

а) $y = x^2 - 4x + 3$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 + 8x + 34$;

б) $y = -2x^2 + 2x - 1$; г) $y = -x^2 - 14x - 48$.

265. Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - 4x + 5$; в) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 9$;

б) $y = x^2 + 4x + 6$; г) $y = -x^2 + 6x - 10$.

Воспользуйтесь следующим планом:
1) найдите координаты вершины параболы;
2) отметьте вершину в координатной плоскости и проведите ось симметрии параболы;
3) определите направление ветвей;
4) вычислите координаты нескольких точек параболы и отметьте их в координатной плоскости;
5) проведите параболу.

266. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4x + 3$; д) $y = 0{,}5x^2 - x - 4$;

б) $y = -x^2 + 4x - 3$; е) $y = -0{,}5x^2 - x + 4$;

в) $y = 2x^2 + 4x - 6$; ж) $y = -x^2 + 2x$;

г) $y = -2x^2 + 4x + 6$; з) $y = \frac{1}{4}x^2 - x$.

В каждом случае укажите:
1) наибольшее или наименьшее значение функции;
2) промежутки возрастания и убывания функции;
3) нули функции;
4) значения x, при которых $y > 0$, $y < 0$.

267. Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - 4x - 1$; в) $y = -x^2 + 6x - 7$;

б) $y = x^2 + 2x - 4$; г) $y = -2x^2 + 4x - 1$.

В каждом случае укажите нули функции, наименьшее (или наибольшее) значение функции.

268. График функции $y = f(x)$ пересекает оси координат в точках A, B и C. Найдите неизвестную координату каждой из этих точек, если:

а) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $A(0;\ ...)$, $B(...;\ 0)$, $C(...;\ 0)$;

б) $f(x) = -x^2 + 22x - 120$; $A(0;\ ...)$, $B(...;\ 0)$, $C(...;\ 0)$;

в) $f(x) = -x^2 + 25$; $A(0;\ ...)$, $B(...;\ 0)$, $C(...;\ 0)$;

г) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$; $A(0;\ ...)$, $B(...;\ 0)$, $C(...;\ 0)$.

269. Функция задана формулой:

а) $y = 2x^2 + 7x + 3$; в) $y = -3x^2 + 12x$;

б) $y = x^2 - 6x + 11$; г) $y = -x^2 - 2x - 1$.

В каждом случае выполните следующие задания:

1) найдите, в какой точке график функции пересекает ось y;

2) определите, пересекает ли график ось x и если да, то в каких точках;

3) покажите схематически расположение графика в координатной плоскости.

270. На рисунке 2.36, *а—г* изображены графики нескольких квадратичных функций. В каждом случае найдите координаты отмеченных точек.

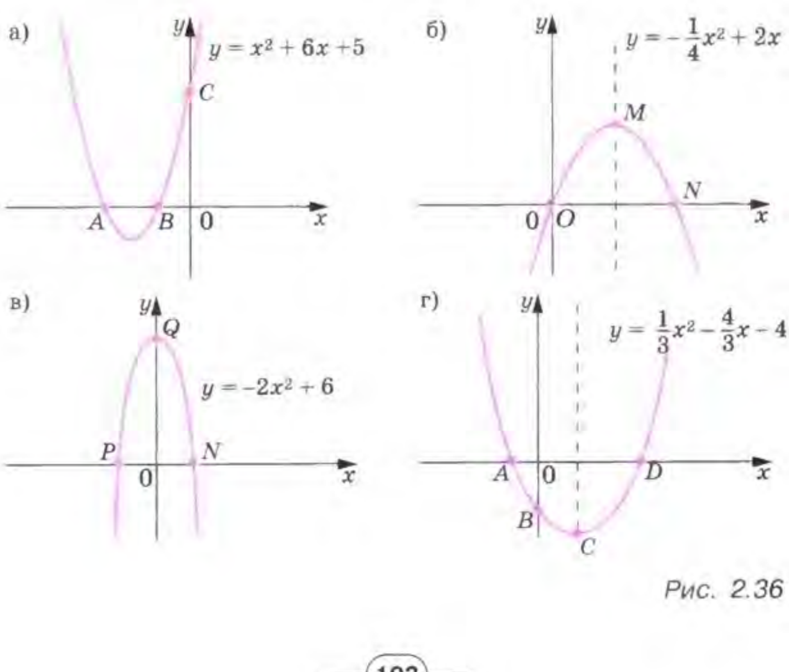


Рис. 2.36

271. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 6x + 5$; г) $y = -2x^2 + 8$;

б) $y = -x^2 + 2x - 5$; д) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$;

в) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$; е) $y = x^2 + 4x + 4$.

В каждом случае укажите:
1) промежутки возрастания и убывания функции;
2) значения x, при которых $y = 0$; $y > 0$; $y < 0$;
3) наибольшее или наименьшее значение функции;
4) область значений функции.

272. В одной системе координат постройте графики функций и укажите координаты их точек пересечения. Проверьте результат подстановкой:

а) $y = x^2 - 4$ и $y = 2 - x$;

б) $y = x^2 + 4x + 3$ и $y = x + 3$;

в) $y = 9 - x^2$ и $y + x = 7$;

г) $y = 2x - x^2$ и $x + y = 0$.

273. Из приведенного списка выберите функции, графики которых отвечают указанному условию, и сделайте схематические рисунки.

а) График проходит через начало координат:

$y = 2x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^3$, $y = x + 1$, $y = x^2 + 1$, $y = 2x^2 - x$.

б) График пересекает ось y в точке $(0; 3)$:

$y = x - 3$, $y = x + 3$, $y = x^2 + 3$, $y = x^2 + 3x$, $y = \frac{3}{x}$, $y = 3x^2$.

в) График симметричен относительно оси y:

$y = x - 1$, $y = -x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = |x|$, $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - x + 1$.

Б

274. Постройте график функции на заданном промежутке; укажите наименьшее и наибольшее значения функции; укажите область значений функции:

а) $y = 2x^2 - 6x + 4$; $[0; 2]$; в) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 5$; $[-4; 1]$;

б) $y = -2x^2 + 4x + 6$; $[-1; 2]$; г) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$; $[-4; 2]$.

275. Постройте график функции:

а) $y = (x - 1)(x - 5)$; в) $y = (x - 2)(4 - x)$;
б) $y = (x + 1)(2x - 6)$; г) $y = -0{,}5x(4 + x)$.

При решении задач **276—277** воспользуйтесь формулой из примера 2.

276. Мяч падает с высоты 20 м с начальной скоростью, равной нулю.
1) Запишите уравнение, которое задает соотношение между высотой h (в м) мяча над землей и временем падения t (в с).
2) Начертите график зависимости высоты от времени падения (возьмите удобный масштаб по осям).
3) Определите по графику:
а) сколько примерно времени будет падать мяч;
б) когда он падает быстрее — в первую секунду или во вторую;
в) на каком расстоянии от земли окажется мяч через 1,5 с.

277. Футболист на тренировке подбросил головой мяч вертикально вверх, придав ему начальную скорость 10 м/с.
1) Запишите уравнение, описывающее высоту, на которой находится мяч, в зависимости от времени полета (рост футболиста считайте равным 2 м).
2) Начертите график зависимости высоты от времени.
3) Определите по графику:
а) на какую максимальную высоту поднимется мяч;
б) через сколько примерно времени мяч окажется на максимальной высоте;
в) когда скорость полета мяча больше: в начале или в конце первой секунды движения;
г) через сколько примерно секунд мяч упадет на землю.

В задачах **278—279** воспользуйтесь формулой площади круга $S = \pi r^2$, где r — радиус круга, $\pi \approx 3$.

278. На рисунке 2.37 изображено кольцо, радиус внешнего круга которого равен 2 см.
1) Запишите формулу, выражающую зависимость площади A кольца от радиуса внутреннего круга x.
2) Начертите график зависимости A от x.
3) Какова область определения рассматриваемой функции?
4) Опишите, как меняется площадь A кольца с изменением x от 0 до 2; от 0 до 1; от 1 до 2.

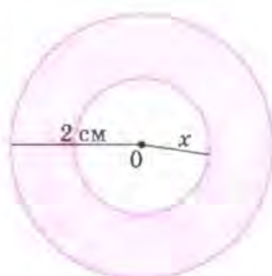


Рис. 2.37

279. На рисунке 2.38 изображено кольцо, радиус внешнего круга которого равен 2 см.
1) Запишите формулу, выражающую зависимость площади A кольца от его ширины x.
2) Начертите график зависимости A от x.
3) Какова область определения рассматриваемой функции?
4) Опишите, как меняется площадь A кольца с изменением x от 0 до 2; от 0 до 1; от 1 до 2.

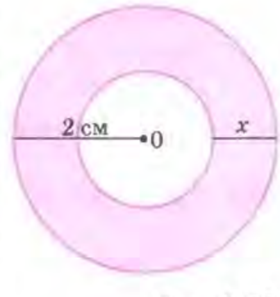


Рис. 2.38

280. Парабола $y = f(x)$ проходит через точку M. Найдите неизвестный коэффициент в уравнении параболы, если:

а) $f(x) = 3x^2 - 15x + c$, $M(0;\ 4)$;

б) $f(x) = -2x^2 + x + c$, $M(0;\ -3)$;

в) $f(x) = ax^2 - 3x + 5$, $M(-1;\ 9)$;

г) $f(x) = -5x^2 + bx + 7$, $M(-1;\ 0)$.

281. Найдите коэффициент b, если известно, что осью симметрии графика функции $y = x^2 + bx + 5$ является прямая:

а) $x = 1$; б) $x = -2$.

282. Определите значения p и q, при которых вершина параболы $y = x^2 + px + q$ находится в точке:

а) $A(-3;\ 4)$; б) $B(1;\ 5)$.

283. На рисунке 2.39 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

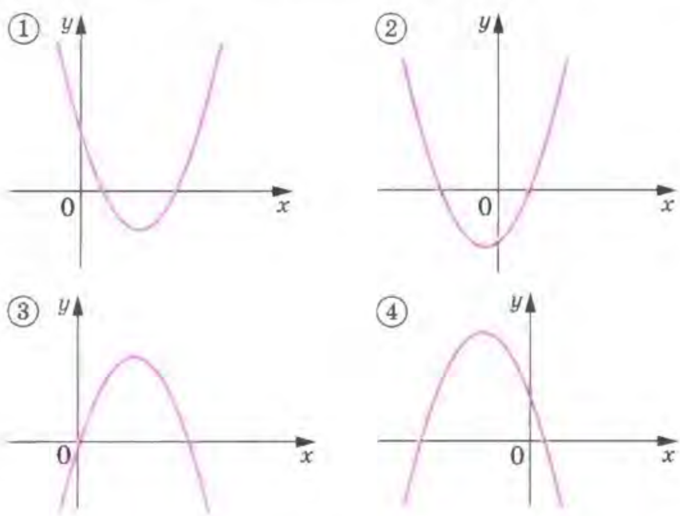


Рис. 2.39

284. Запишите уравнение какой-нибудь параболы, вершина которой не лежит на оси y и которая целиком расположена:

а) выше оси x; б) ниже оси x.

В задачах **285—286** воспользуйтесь схематическими графиками.

285. Футболист на тренировке подбрасывает мяч ногой вертикально вверх с начальной скоростью 15 м/с. На какую максимальную высоту поднимется мяч?

286. Площадь прямоугольника S с периметром, равным 16 см, является функцией длины его основания x. Задайте эту функцию формулой. Определите, при каком значении x функция принимает наибольшее значение. Дайте геометрическое истолкование вашего ответа.

287. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 8. Задайте формулой зависимость площади S прямоугольного треугольника от длины катета x (рис. 2.40). Определите, при каком значении x треугольник имеет наибольшую площадь. Дайте геометрическое истолкование вашего ответа.

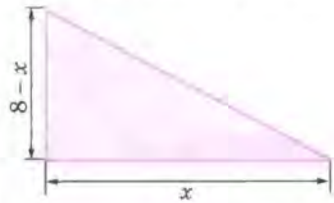


Рис. 2.40

288. (*Задача-исследование.*) Исследуйте, как влияет на график изменение одного из коэффициентов a, b и c в уравнении параболы. Для этого:

1) в одной системе координат начертите параболы $y = x^2 - 4x + c$ для $c = 0;\ 1;\ 2;\ 4$ и $c = -1;\ -2;\ -4$;

2) в одной системе координат начертите параболы $y = x^2 + bx + 4$ для $b = 0;\ 1;\ 4;\ 5$ и $b = -1;\ -4;\ -5$;

3) в одной системе координат начертите параболы $y = ax^2 + 4x - 5$ для $a = \frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ 3$.

2.6 Квадратные неравенства

Посмотрите на рисунок 2.41. На нем изображен график функции $y = x^2 + x - 6$. График пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны -3 и 2, т. е. при $x = -3$ и $x = 2$ значения функции $y = x^2 + x - 6$ равны нулю. При $-3 < x < 2$ график расположен ниже оси x, т. е. на промежутке от -3 до 2 значения

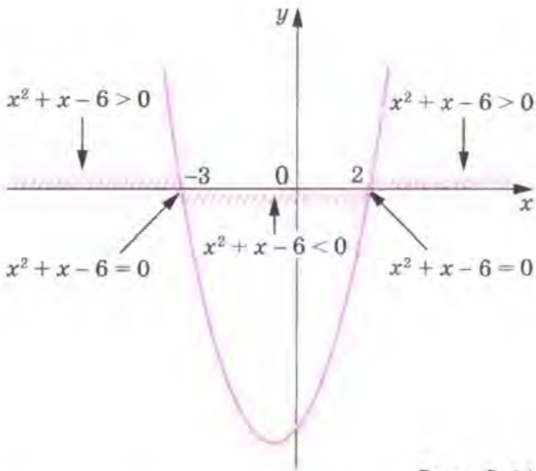


Рис. 2.41

функции $y = x^2 + x - 6$ отрицательны. При $x < -3$ и $x > 2$ график расположен выше оси x, т. е. на каждом из этих промежутков значения функции $y = x^2 + x - 6$ положительны.

Анализируя положение графика функции $y = x^2 + x - 6$ относительно оси x, мы, по сути, нашли множества решений неравенств $x^2 + x - 6 < 0$ и $x^2 + x - 6 > 0$. Первое неравенство выполняется при $-3 < x < 2$, второе — при $x < -3$ и $x > 2$.

Определение

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где $a \neq 0$, называют квадратным неравенством.

Понятно, что вместо знаков строгого неравенства могут быть использованы и знаки нестрогого неравенства.

Как видно из рассуждений, приведенных выше, множество решений квадратного неравенства легко найти, используя график функции $y = ax^2 + bx + c$. При этом можно ограничиться схематическим рисунком, показывающим в первую очередь положение графика относительно оси x: наличие или отсутствие точек пересечения с осью x, направление ветвей параболы. Координаты вершины параболы в данном вопросе не имеют значения.

■ Пример 1. Решим неравенство $2x^2 - 7x + 5 < 0$.

Рассмотрим функцию $y = 2x^2 - 7x + 5$. Прежде всего выясним, пересекает ли ее график ось x. Для этого решим уравнение $2x^2 - 7x + 5 = 0$. Имеем

$$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9;$$
$$x = \frac{7 \pm 3}{4};\ x_1 = 1,\ x_2 = 2{,}5.$$

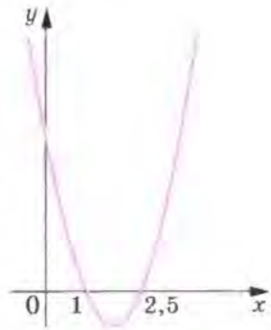


Рис. 2.42

Таким образом, парабола $y = 2x^2 - 7x + 5$ пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны 1 и 2,5. Так как коэффициент при x^2 положителен, то ветви параболы направлены вверх.

Теперь можно показать схематически положение параболы в координатной плоскости (рис. 2.42). Из рисунка видно, что парабола расположена ниже оси x, если $1 < x < 2{,}5$. Эти значения x и составляют множество решений неравенства $2x^2 - 7x + 5 < 0$.

Ответ можно записать по-разному: с помощью двойного неравенства $1 < x < 2{,}5$ или в виде промежутка $(1;\ 2{,}5)$.

■ Пример 2. Решим неравенство $2x^2 - 7x + 5 > 0$.

Воспользуемся тем же рисунком (см. рис. 2.42). Мы видим, что график расположен выше оси x при $x < 1$ и $x > 2{,}5$. Промежутки $(-\infty;\ 1)$ и $(2{,}5;\ +\infty)$ вместе составляют множество решений неравенства $2x^2 - 7x + 5 > 0$. Говорят, что множество решений неравенства $2x^2 - 7x + 5 > 0$ есть *объединение* промежутков $(-\infty;\ 1)$ и $(2{,}5;\ +\infty)$. Объединение промежутков записывают с помощью специального символа $\cup$: $(-\infty;\ 1)\cup(2{,}5;\ +\infty)$.

Ответ можно записать по-разному:

1) $x < 1$; $x > 2{,}5$;

2) $(-\infty;\ 1)\cup(2{,}5;\ +\infty)$.

■ Пример 3. Решим неравенство $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

Заменим неравенство равносильным неравенством с положительным первым коэффициентом: $3x^2 - 2x + 1 > 0$.

Выясним, пересекает ли график функции $y = 3x^2 - 2x + 1$ ось x. Для этого найдем дискриминант уравнения $3x^2 - 2x + 1 = 0$:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 < 0.$$

Итак, уравнение корней не имеет, т. е. парабола ось x не пересекает. Учитывая, что ветви параболы направлены вверх, изобразим ее схематически (рис. 2.43).

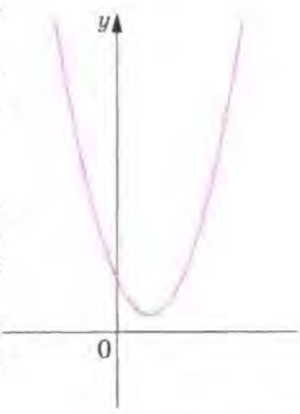


Рис. 2.43

Мы видим, что график целиком расположен выше оси x. Это означает, что неравенство $3x^2 - 2x + 1 > 0$ выполняется при любом x.

Ответ. x — любое число.

(Ответ в другой форме: $(-\infty;\ +\infty)$.)

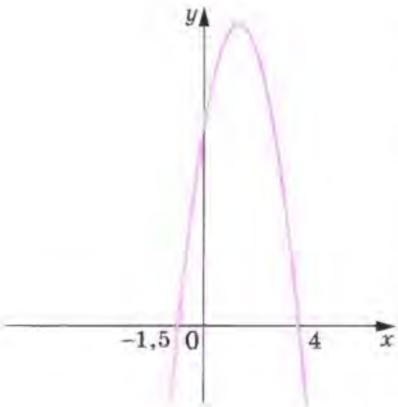


Рис. 2.44

■ Пример 4. Решим неравенство $(2x + 3)(4 - x) > 0$.

Если в левой части неравенства раскрыть скобки, то получится квадратный трехчлен. Однако делать это нецелесообразно. Трехчлен в левой части разложен на множители, и поэтому легко найти его корни. Для этого решим два линейных уравнения: $2x + 3 = 0$ и $4 - x = 0$. Из уравнения $2x + 3 = 0$ найдем $x_1 = -1{,}5$; из уравнения $4 - x = 0$ найдем $x_2 = 4$.

Теперь выясним, каково направление ветвей параболы — графика функции $y = (2x + 3)(4 - x)$. Для этого также не нужно преобразовывать произведение $(2x + 3)(4 - x)$ в трехчлен; достаточно найти старший член этого трехчлена (а точнее, его коэффициент). Легко видеть, что старший член трехчлена — это выражение $-2x^2$. Так как его коэффициент отрицателен, то ветви параболы направлены вниз.

Схематический график функции $y = (2x + 3)\ (4 - x)$ изображен на рисунке 2.44. Из рисунка видно, что при $-1{,}5 < x < 4$ график расположен выше оси x. Этот промежуток и является множеством решений данного неравенства.

Ответ. $(-1{,}5;\ 4)$.

A

289. На рисунке 2.45 изображен график квадратичной функции. В каждом случае укажите нули функции.
Впишите пропущенный знак $>$ или $<$:
а) если $-1 < x < 3$, то $x^2 - 2x - 3 \ldots 0$;
если $x < -1$, то $x^2 - 2x - 3 \ldots 0$;
если $x > 3$, то $x^2 - 2x - 3 \ldots 0$;
б) если $-2 < x < 4$, то $x^2 - 2x - 8 \ldots 0$;
если $x < -2$, то $x^2 - 2x - 8 \ldots 0$;
если $x > 4$, то $x^2 - 2x - 8 \ldots 0$.

290. а) Вычислите абсциссы точек, в которых график функции $y = x^2 + 6x + 5$ пересекает ось x, и изобразите этот график схематически. Впишите пропущенный знак $>$ или $<$:
если $-5 < x < -1$, то $x^2 + 6x + 5 \ldots 0$;
если $x < -5$, то $x^2 + 6x + 5 \ldots 0$;
если $x > -1$, то $x^2 + 6x + 5 \ldots 0$.

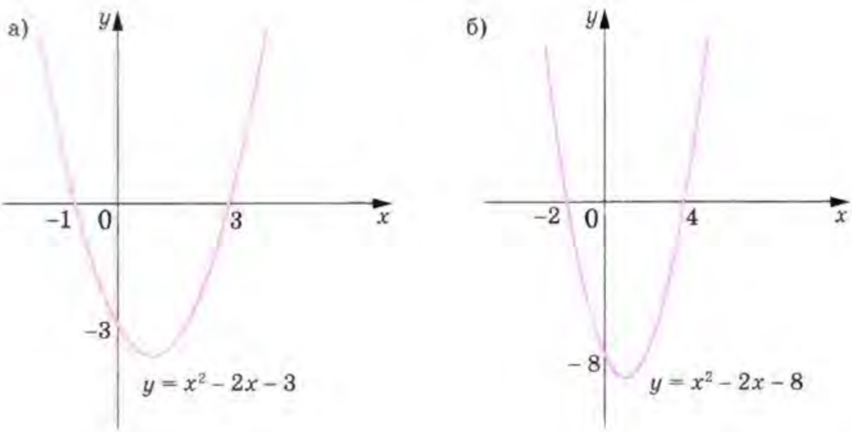


Рис. 2.45

б) Вычислите абсциссы точек, в которых график функции $y = -x^2 - x + 6$ пересекает ось x. Впишите пропущенный знак $>$ или $<$:

если $-3 < x < 2$, то $-x^2 - x + 6$ ... 0;

если $x < -3$, то $-x^2 - x + 6$ ... 0;

если $x > 2$, то $-x^2 - x + 6$ ... 0.

291. Вычислите абсциссы точек пересечения параболы с осью x, изобразите параболу схематически и отметьте на оси x значения аргумента, при которых $y = 0$; $y < 0$; $y > 0$:

а) $y = x^2 - 1$; г) $y = x^2 - 6x + 5$;

б) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$; д) $y = x^2 - 5x + 6$;

в) $y = x^2 + 4x - 5$; е) $y = -x^2 + x + 2$.

В каждом случае проверьте себя, подставив в формулу какое-нибудь значение x из найденного множества.

Решите неравенство **292—296**:

292. а) $x^2 + 4x - 21 < 0$; г) $x^2 - 9 < 0$;
б) $x^2 - 4x - 21 > 0$; д) $x^2 - 1 > 0$;
в) $x^2 + 10x > 0$; е) $x^2 - 4x - 12 < 0$.

293. а) $4 - x^2 > 0$; в) $-x^2 + 6x + 7 > 0$;
б) $-x^2 - 7x - 10 < 0$; г) $1 - x^2 < 0$.

294. а) $2x^2 - 4x + 2 \geqslant 0$; г) $-2x^2 + 10x - 8 \leqslant 0$;
б) $0{,}5x^2 - 2x \leqslant 0$; д) $-4x^2 + 2x \geqslant 0$;
в) $-2x^2 - 6x + 20 \geqslant 0$; е) $0{,}5x^2 - 8 \geqslant 0$.

295. а) $x^2 + 3 > 0$;
б) $-x^2 - 2 \leqslant 0$;
в) $x^2 - 4x + 7 \leqslant 0$;
г) $-x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$;
д) $2x^2 + 4x + 2 \geqslant 0$;
е) $x^2 - 6x + 9 < 0$;
ж) $-3x^2 \leqslant 0$;
з) $2x^2 > 0$.

296. а) $x^2 < 25$;
б) $x^2 \geqslant \frac{1}{4}$;
в) $-2x^2 < -18$;
г) $x^2 + 1 \geqslant 5$;
д) $x^2 \leqslant x$;
е) $2x > x^2$;
ж) $x < x^2$;
з) $0{,}5x^2 > -3x$;
и) $9 \leqslant x^2$;
к) $\frac{1}{2}x^2 < 50$;
л) $-x^2 \geqslant -100$;
м) $6{,}4 > 0{,}1x^2$.

Б

Решите неравенство **297—301**:

297. а) $3x^2 - 10x + 4 < 1$;
б) $-3x^2 + 7x + 4 < -2$;
в) $-5x^2 + 4x + 11 > 10$;
г) $6x^2 + 7x - 2 > -3$.

298. а) $(x - 1)(x - 3) \leqslant 0$;
б) $(x + 5)(x - 2) > 0$;
в) $(2x + 6)(x + 4) \geqslant 0$;
г) $(3x - 3)(x + 1) < 0$;
д) $2x(x - 10) > 0$;
е) $x(2x + 3) \leqslant 0$.

299. а) $(2 - x)(x - 4) > 0$;
б) $(x + 8)(1 - x) \leqslant 0$;
в) $2x(x + 3) \geqslant 0$;
г) $0{,}5x(10 - x) < 0$.

300. а) $4x(x + 2) < 5$;
б) $(2x + 1)(x + 1) > 3$;
в) $3x(1 - x) \leqslant -6$;
г) $(1 - 2x)(1 - 3x) \leqslant 2$.

301. а) $(x - 2)^2 > 4 - x^2$;
б) $(x + 3)^2 < x^2 - 9$;
в) $3x^2 - 6x < 8 - 6x^2$;
г) $5x^2 + 17x > 5x - 4$.

302. Составьте какое-нибудь квадратное неравенство:
а) решением которого является любое действительное число;
б) которое не имеет решений.

303. Найдите значения x, при которых:
а) значения функции $y = 3x^2 + 2x - 1$ меньше значений функции $y = x^2 - x + 1$;
б) значения функции $y = -4x^2 + x + 1$ больше значений функции $y = 2 - 4x$.

304. Решите неравенство:

а) $\frac{100}{(x-5)(x-10)} > 0$;
б) $\frac{1}{(2-x)(x+4)} \leqslant 0$
в) $\frac{-20}{(1-x)(3-x)} < 0$;
г) $\frac{-1}{(x+6)(x+7)} \geqslant 0$.

305. а) Найдите положительные решения неравенства

$$x^2 + 2x - 2 < 0.$$

б) Найдите отрицательные решения неравенства

$$x^2 - 2x - 1 > 0.$$

306. а) Найдите решения неравенства $5x^2 \geqslant 4x + 1$, принадлежащие промежутку $[-2; 2]$.

б) Найдите решения неравенства $5x - 1 > 4x^2$, принадлежащие промежутку $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]$.

307. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 6x^2 - 54 \leqslant 0 \\ x + 3 > 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 1 \leqslant 0 \\ x^2 - 3x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 \geqslant 0 \\ 2 - \frac{1}{2}x \geqslant 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + 5 > 0 \\ x^2 + 5x > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x^2 + 7x + 1 \leqslant 0 \\ x^2 - 4 \geqslant 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -(x+1)^2 < 0 \\ 1 - x \geqslant 0. \end{cases}$

308. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\sqrt{7x^2 + 6x - 1}$; в) $\sqrt{\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - 1}$;

б) $\sqrt{4 + x - 0{,}5x^2}$; г) $\sqrt{3 - \frac{1}{2}x^2}$.

309. Функция задана формулой $y = f(x)$. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$; г) $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2 - 1}$;

б) $f(x) = \frac{\sqrt{3x(x+2)}}{x - 2}$; д) $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 1}$;

в) $f(x) = \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x^2}$; е) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4}$.

310. При каких значениях b уравнение $x^2 + bx + 4 = 0$ имеет два корня? Имеет ли уравнение корни при $b = -25{,}5$; $1{,}5$; $5{,}36$?

311. При каких значениях b уравнение $-2x^2 - bx - 8 = 0$ имеет корни? Приведите пример отрицательного значения b, удовлетворяющего этому условию.

312. Найдите все целые значения b, при которых уравнение $9x^2 + 2bx + 1 = 0$ не имеет корней.

313. Найдите все значения m, при которых уравнение $mx^2 - 2x + m = 0$ имеет два корня. Из чисел $-1{,}5$; $-0{,}5$; 0; $0{,}5$; $1{,}5$ выберите те, которые удовлетворяют этому условию.

314. Найдите все целые значения m, при которых уравнение $4mx^2 + 5x + m = 0$ имеет два корня.

315. Докажите двумя способами, что при всех значениях переменной a верно неравенство:

а) $a^2 + a + 1 > 0$; б) $-a^2 + 3x - 5 < 0$.

Указание. 1) Используйте графические соображения. 2) Выделите квадрат двучлена и сравните полученное выражение с нулем.

316. Докажите двумя способами, что не существует таких значений x, при которых выполняется неравенство:

а) $x^2 - 4x + 5 < 0$; б) $-x^2 + 8x - 20 > 0$.

2.6 Применение свойств квадратичной функции при решении задач

(Для тех, кому интересно)

Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (или, как чаще говорят, квадратного трехчлена) могут использоваться в самых разных задачах. Некоторые из них вам уже встречались. Рассмотрим еще несколько примеров того, как графические соображения помогают при решении на первый взгляд весьма непростых задач. При этом мы будем пользоваться следующим очевидным утверждением:

> если у квадратного трехчлена два корня, то в промежутке между корнями и в промежутках вне корней его значения имеют разные знаки.

(Убедитесь в этом, начертив параболу, пересекающую ось x в двух точках; рассмотрите два случая: ветви направлены вверх и ветви направлены вниз.)

■ Пример 1. Имеет ли корни уравнение

$$1716x^2 - 5321x + 3248 = 0?$$

Конечно, если решиться на громоздкие вычисления, то задачу можно решить «в лоб», посчитав дискриминант уравнения. Но такое решение выглядит весьма непривлекательно.

Лучше немного «схитрить» и вместо «лобовых» вычислений прибегнуть к оценке.

Например:

$$D = 5321^2 - 4 \cdot 1716 \cdot 3248 > 5000 \cdot 5000 - 4 \cdot 1750 \cdot 3250 =$$
$$= 5000 \cdot 5000 - 2 \cdot 1750 \cdot 2 \cdot 3250 = 25\ 000\ 000 - 3500 \cdot 6500 =$$
$$= 25\ 000\ 000 - 22\ 750\ 000 > 0.$$

Так как дискриминант положителен, то уравнение имеет два корня.

Однако и это решение потребовало немалых усилий. В то же время задачу можно решить практически устно.

В самом деле, рассмотрим функцию

$$f(x) = 1716x^2 - 5321x + 3248.$$

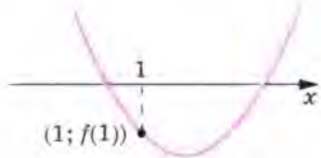


Рис. 2.46

Ее график — парабола, ветви которой направлены вверх. Подставим вместо x какое-нибудь число, например 1. Получим

$$f(1) = 1716 - 5321 + 3248 < 1800 + 3300 - 5321 < 0.$$

Это означает, что парабола опускается ниже оси x (рис. 2.46). Поэтому она пересекает ось x в двух точках, а значит, данное уравнение имеет два корня.

■ Пример 2. Сколько корней имеет уравнение

$$(x - 100)(x - 101) + (x - 101)(x - 102) + (x - 102)(x - 100) = 0?$$

Если мысленно раскрыть скобки, то легко заметить, что левую часть уравнения можно представить в виде квадратного трехчлена с положительным коэффициентом при x^2. Обозначим этот трехчлен через $f(x)$. Найдем $f(101)$:

$$f(101) = 0 + 0 - 1 < 0.$$

Таким образом, трехчлен $f(x)$ может принимать отрицательные значения. Так как коэффициент при x^2 положителен, то ветви параболы — его графика — направлены вверх. Значит, парабола пересекает ось x в двух точках, т. е. данное уравнение имеет два корня.

■ Пример 3. Докажем, что один из корней уравнения $52x^2 - 70x + 15 = 0$ больше 1, а другой меньше 1.

Прежде всего сформулируем задачу иначе: докажем, что число 1 лежит между корнями данного уравнения.

Возьмем функцию $f(x) = 52x^2 - 70x + 15$ и найдем $f(1)$:

$$f(1) = 52 - 70 + 15 < 0.$$

Функция $y = f(x)$ может принимать отрицательные значения. Таким образом, график этой функции — парабола, ветви которой направлены вверх и которая опускается ниже оси x. Отрицательные значения эта функция принимает в промежутке между корнями. Так как $f(1) < 0$, то $x_1 < 1 < x_2$ (рис. 2.47).

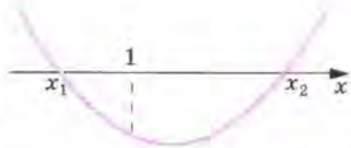


Рис. 2.47

317. Докажите, что уравнение $546x^2 + 645x + 54 = 0$ имеет корни.

318. Сколько корней имеет уравнение
$(x + 100)(x + 101) + (x + 101)(x + 102) + (x + 102)(x + 100) = 0$?

319. Не используя формулу корней квадратного уравнения, покажите, что:

а) один из корней уравнения $4x^2 + 20x + 5 = 0$ больше -3, а другой меньше -3;

б) один из корней уравнения $7x^2 + 28x + 11 = 0$ больше -1, а другой меньше -1.

320. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $15x^2 + 16x - 23 = 0$, причем $x_1 < x_2$. Покажите, как на координатной прямой расположены числа -2, 1, x_1 и x_2.

321. Пусть x_1 и x_2 — корни трехчлена $f(x) = -9x^2 - 15x + 11$, причем $x_1 < x_2$. Не вычисляя корней, покажите, как на оси x расположены числа x_1, x_2, 2 и -1.

322. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, причем $x_1 < x_2$, и γ — произвольное число. Докажите, что:

а) если $af(\gamma) < 0$, то $x_1 < \gamma < x_2$;

б) если $af(\gamma) > 0$, то или $\gamma < x_1$, или $\gamma > x_2$.

2.7 Графики уравнений, содержащих модули

(Для тех, кому интересно)

Когда в «стандартные» уравнения прямых, парабол, гипербол включают знак модуля, их графики становятся необычными и даже красивыми. Чтобы научиться строить такие графики, надо владеть приемами построения «базовых» фигур, а также твердо знать и понимать определение модуля числа. Напомним это определение в его словесной формулировке:

Определение

модуль неотрицательного числа a равен самому числу a; модуль отрицательного числа a равен противоположному ему положительному числу $-a$.

Покажем на примерах некоторые приемы построения графиков уравнений с модулями.

■ Пример 1. Построим график уравнения $y = |x^2 - 4|$.

Сначала построим параболу $y = x^2 - 4$ (рис. 2.48, *а*). Чтобы получить из нее график уравнения $y = |x^2 - 4|$, нужно каждую точку параболы с отрицательной ординатой заменить точкой с той же абсциссой, но с противоположной (положительной) ординатой. Иными словами, часть параболы, расположенную ниже оси x, нужно заменить линией, ей симметричной относительно оси x. (Представьте себе: эта часть параболы как твердое тело отворачивается на противоположную полуплоскость.) График уравнения $y = |x^2 - 4|$ изображен на рисунке 2.48, *б*.

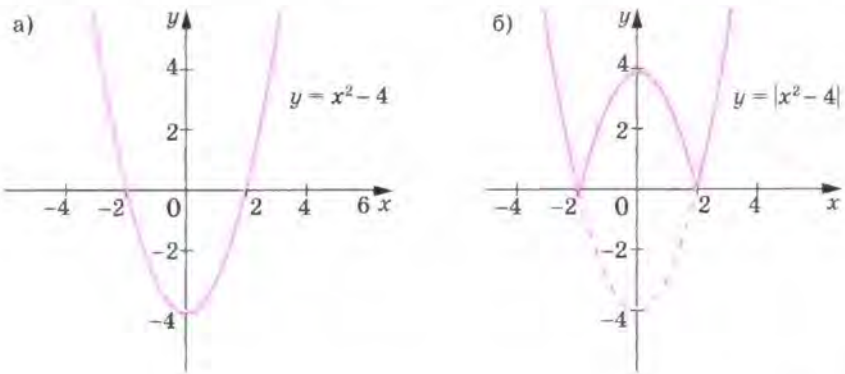


Рис. 2.48

■ Пример 2. Построим график уравнения $y = x^2 - 2|x|$.

Воспользовавшись определением модуля числа, заменим формулу $y = x^2 - 2|x|$ двумя, задающими зависимость переменной y от x отдельно для $x \geqslant 0$ и $x < 0$:

если $x \geqslant 0$, то $y = x^2 - 2x$;

если $x < 0$, то $y = x^2 - 2(-x) = x^2 + 2x$.

Теперь мы имеем дело с хорошо знакомым нам кусочным заданием зависимости. Строить график будем так:

1) построим параболу $y = x^2 - 2x$ и обведем ту ее часть, которая соответствует неотрицательным значениям x, т. е. часть, расположенную правее оси y;

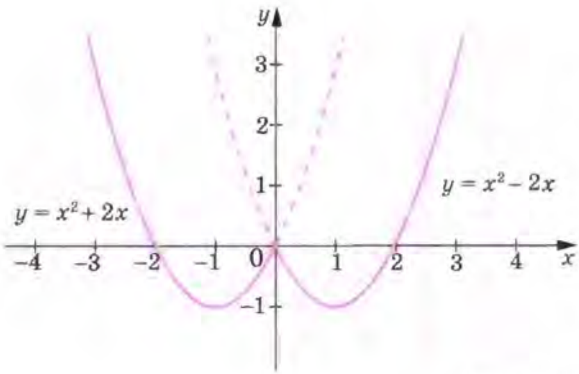


Рис. 2.49

2) в той же координатной плоскости построим параболу $y = x^2 + 2x$ и обведем ту ее часть, которая соответствует отрицательным значениям x, т. е. часть, расположенную левее оси y.

Обведенные части парабол вместе образуют график уравнения $y = x^2 - 2|x|$ (рис. 2.49).

■ Пример 3. Построим график уравнения $y = |||x| - 2| - 2|$.

Здесь при построении графика удобно использовать сдвиги вдоль осей координат. Будем действовать по следующему плану:

1) построим основной график, т. е. график уравнения $y = |x|$ (рис. 2.50, *а*);

2) сдвинем построенный график на 2 единицы вниз; получится график уравнения $y = |x| - 2$ (рис. 2.50, *б*);

3) часть графика, расположенную ниже оси x, заменим ее зеркальным отражением, т. е. заменим ее линией, симметричной относительно оси x; получится график уравнения $y = ||x| - 2|$ (рис. 2.50, *в*);

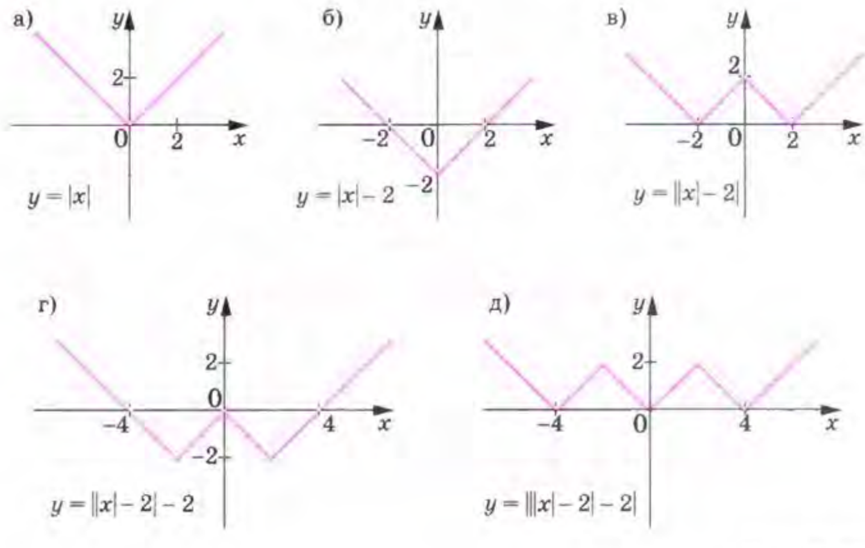


Рис. 2.50

4) сдвинем построенный в п. 3 график на 2 единицы вниз; получится график уравнения $y = ||x| - 2| - 2$ (рис. 2.50, *г*);

5) часть графика, расположенную ниже оси x, отобразим симметрично относительно этой оси; получим график уравнения $y = |||x| - 2| - 2|$ (рис. 2.50, *д*).

Постройте график уравнения (**323—326**):

323. а) $y = |2x - 4|$; в) $y = |x^2 - x - 2|$;

б) $y = |x^2 - 3|$; г) $y = \frac{6}{|x|}$.

324. а) $y = |x| - 2x$; в) $y = (5 - |x|)(|x| + 1)$;

б) $y = x^2 + 3|x|$; г) $y = (5 - |x|)(x + 1)$.

325. а) $y = ||x| - 3|$; б) $y = |||x| - 3| - 3|$.

326. а) $|y| = |x|$; в) $|y| + |x| = 1$;

б) $|y| \cdot |x| = 1$; г) $|y| - |x| = 1$.

Указание. Рассмотрите уравнение отдельно для каждой координатной четверти.

Д3 Дополнительные задания к главе 2

Функции и графики

327. Постройте график функции; укажите область определения и область значений этой функции:

а) $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$; б) $y = \frac{12 - 4x}{x^2 - 3x}$.

328. а) Постройте график функции $y = \frac{4x - x^3}{2x + 4}$. Определите множество значений x, при которых значения функции отрицательны.

б) Постройте график функции $y = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}$. Определите множество значений x, при которых значения функции положительны.

329. а) Постройте график функции $y = 2x^2 - 12x + 11$. По графику определите, какие значения принимает функция, если $0 \leqslant x \leqslant 4$.

б) Постройте график функции $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$. По графику определите, какие значения принимает функция, если $-2 \leqslant x \leqslant 4$.

330. Постройте график функции и укажите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, \text{ если } x \geqslant 2 \\ \frac{1}{2}x^2, \text{ если } x < 2; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -x^2 + 1, \text{ если } x \geqslant -2 \\ \frac{6}{x}, \text{ если } x < -2. \end{cases}$

331. Постройте график функции и определите промежутки, на которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения:

а) $y = \begin{cases} \frac{6}{x}, \text{ если } x > 2 \\ x^2 - 1, \text{ если } |x| \leqslant 2 \\ -\frac{6}{x}, \text{ если } x < -2; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 4 - 2x, \text{ если } x > 1 \\ x^2 + 1, \text{ если } |x| \leqslant 1 \\ 4 + 2x, \text{ если } x < -1. \end{cases}$

332. Постройте график функции и определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком три общие точки; две общие точки; одну общую точку:

а) $y = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ если } x \leqslant 2 \\ x - 2, \text{ если } x > 2; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant -1 \\ x^2 - 2, \text{ если } x > -1. \end{cases}$

333. Найдите значение коэффициента c, при котором график функции $y = \frac{1}{3}x^2 + c$ проходит через точку $A(-6;\ 10)$. Определите, принимает ли эта функция значение, равное 20; -20.

334. Известно, что вершина параболы находится в точке $(0;\ 4)$ и она пересекает ось x в точке $(-4;\ 0)$. Запишите уравнение этой параболы. Определите координаты точек, в которых она пересекает прямую $y = -21$.

Неравенства и системы неравенств

335. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2}{2} \geqslant \frac{4 - 3x}{5}$; б) $\frac{7x - 8}{2} \leqslant \frac{3x^2}{4}$.

336. Найдите целые решения неравенства:

а) $\frac{2x^2}{3} < \frac{2x + 3}{4}$; б) $\frac{4x + 2}{3} > \frac{5x^2}{6}$.

337. Решите неравенство:

а) $(x-5\sqrt{2})(x-4\sqrt{3})>0$;
б) $(x+2\sqrt{3})(x+3\sqrt{2})<0$;
в) $(x+1-\sqrt{5})(x+1-\sqrt{6})\leqslant 0$;
г) $(x-1+\sqrt{2})(x-1+\sqrt{3})\geqslant 0$.

338. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5}>0 \\ 4x^2+13x-4<0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 2x^2+5x-7>0 \\ \dfrac{x-3}{4}<0. \end{cases}$

339. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{15-2a-a^2}+\sqrt{\dfrac{1}{2}a^2-2}$;
б) $\sqrt{1-\dfrac{1}{4}a}+\sqrt{33+5a-2a^2}$.

340. а) Докажите, что выражение $\dfrac{-15}{2x^2-3x+3}$ при любых значениях x принимает отрицательные значения.

б) Докажите, что выражение $\dfrac{-24}{-3x^2+10x-9}$ при любых значениях x не принимает отрицательные значения.

341. а) Найдите все значения коэффициента b, при которых квадратный трехчлен $2x^2+bx+8$ принимает только положительные значения. Запишите пример такого квадратного трехчлена.
б) Найдите все значения коэффициента c, при которых квадратный трехчлен $cx^2-3x+25c$ принимает только отрицательные значения. Запишите пример такого квадратного трехчлена.

Вопросы для повторения к главе 2

1. Какую функцию называют квадратичной? Из данных функций выберите те, которые являются квадратичными, и укажите, чему равны в каждом случае коэффициенты a, b и c:

$y=2x^2-3x+1$; $y=\dfrac{1}{x^2}$; $y=x^2-3$;
$y=2x+4$; $y=3x^2+2x$; $y=5x^2$.

2. Какая линия является графиком квадратичной функции?

3. Охарактеризуйте параболу с номером 4, изображенную на рисунке 2.2 (см. с. 69):
а) Парабола является графиком функции $y=\ldots$.
б) Осью симметрии параболы является прямая ... .

в) Вершина параболы имеет координаты $x = \dots$, $y = \dots$.
г) Функция $y = \dots$ принимает наибольшее значение при $x = \dots$, наибольшее значение функции равно ... .
д) Парабола пересекает ось x в точках ... .
е) Парабола пересекает ось y в точке ... .

4. Как расположена в координатной плоскости парабола $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?

5. Постройте график функции $y = ax^2$:

а) при $a = \frac{1}{2}$; б) при $a = -2$.

Опишите в каждом случае свойства функции.

6. Как из параболы $y = ax^2$ получить параболу $y = ax^2 + q$? Каково взаимное расположение в координатной плоскости парабол $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2 + 5$? парабол $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$?

7. Как из параболы $y = ax^2$ получить параболу $y = a(x + p)^2$? Каково взаимное расположение в координатной плоскости парабол $y = -2x^2$ и $y = -2(x + 1)^2$? парабол $y = -2x^2$ и $y = -2(x - 3)^2$?

8. Как из параболы $y = ax^2$ получить параболу $y = a(x + p)^2 + q$? Из какой параболы и какими преобразованиями может быть получена парабола $y = 2(x + 1)^2 - 3$? Укажите координаты ее вершины.

9. Дана функция $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.
а) Каково направление ветвей параболы, являющейся графиком данной функции, если $a > 0$? если $a < 0$?
б) Как вычислить координаты вершины параболы?

Задания для самопроверки к главе 2

(Обязательные результаты обучения)

1. На рисунке 2.5 (см. с. 71) изображен график зависимости высоты, на которой находится мяч, подброшенный вертикально вверх, от времени полета. Ответьте с помощью графика на вопросы:
а) С какой высоты был брошен мяч?
б) Через какое время он достиг максимальной высоты?
в) На какую максимальную высоту поднялся мяч?
г) На какой высоте находился мяч через 0,5 с? Через какое время после броска мяч еще раз оказался на этой высоте?
д) Через сколько секунд мяч упал на землю?

2. Дана функция $y = x^2 + 3x + 2$.
а) Найдите значение функции при $x = -2$.
б) При каких значениях x функция принимает значение, равное 6?
в) Найдите нули функции.

3. Постройте график функции: а) $y = \frac{1}{2}x^2$; б) $y = -x^2$.

В каждом случае укажите промежутки возрастания и убывания функции.

4. Проходит ли график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ через точку: $A(8; -32)$; $B(-30; 450)$; $C(30; 450)$?

5. Укажите координаты вершины параболы:
а) $y = 2x^2$; в) $y = x^2 + 10$; д) $y = 2(x + 3)^2$;
б) $y = x^2 - 3$; г) $y = (x - 1)^2$; е) $y = (x - 2)^2 + 1$.

6. На рисунке 2.26 (см. с. 91) изображен график функции $y = x^2 + 4x - 5$. С помощью графика определите:
а) нули функции;
б) значение функции, которое она принимает при $x = -1$;
в) значения x, при которых значение функции равно 5;
г) значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения;
д) наименьшее значение функции;
е) промежуток, на котором функция возрастает; убывает.

7. Постройте график функции:
а) $y = x^2 - 4$; б) $y = 1 - x^2$.
В каждом случае укажите:
1) наибольшее (наименьшее) значение функции;
2) промежуток, на котором функция возрастает; убывает.

8. Постройте график функции:
а) $y = x^2 - 4x - 5$; б) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

В каждом случае укажите:
1) нули функции;
2) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

9. Постройте график функции:
а) $y = x^2 - 2x + 3$; б) $y = -x^2 + 2x - 1$.
В каждом случае укажите:
1) при каком значении x функция принимает наименьшее (наибольшее) значение;
2) промежутки возрастания и убывания функции.

10. Решите неравенство:

а) $x^2 + 3x - 28 < 0$; в) $2x^2 + 2 > 0$; д) $x^2 \geqslant \frac{1}{4}$;

б) $-2x^2 + 10x - 12 \leqslant 0$; г) $x^2 + 2x + 3 \leqslant 0$; е) $3x > x^2$.

Тест к главе 2

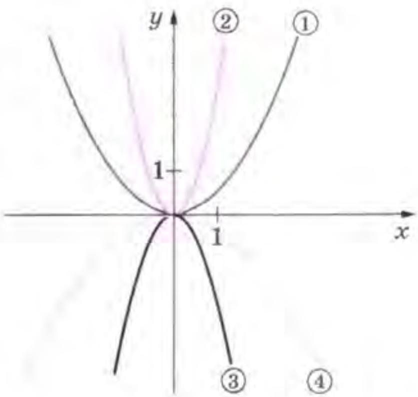
1. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$. Найдите $f(-4)$.
Ответ. ____________________

2. Для каждой функции, заданной формулой, укажите координаты точки, в которой график этой функции пересекает ось y.
1) $y = 2x^2 - 4x - 3$; 2) $y = x^2 + 5x + 3$; 3) $y = -3x^2 + x + 2$.
А. (0; −3). **Б.** (0; 1). **В.** (0; 2). **Г.** (0; 3).
Ответ. 1) ________; 2) ________; 3) ________

3. Функция задана формулой $y = -25x^2$. Какие из следующих утверждений являются верными? (Выпишите их номера.)
1) Вершина параболы, которая является графиком данной функции, находится в начале координат.
2) Ветви параболы направлены вниз.
3) Область значений функции — промежуток $[0; +\infty)$.
4) Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.
5) Функция убывает на промежутке $[0; +\infty)$.
6) Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.
Ответ. ____________________

4. Какая точка принадлежит графику функции $y = -4x^2$?
А. (4; 64). **В.** (−5; −100).
Б. (5; −80). **Г.** (−6; 144).

5. В одной системе координат изображены графики четырех функций (они обозначены числами). Для каждого графика укажите соответствующую ему формулу.



А. $y = \frac{1}{2}x^2$. **В.** $y = -\frac{1}{3}x^2$.

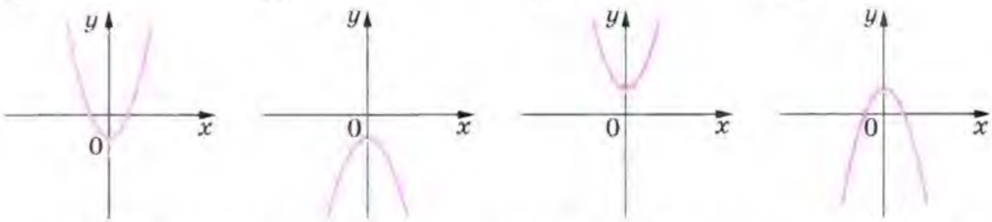
Б. $y = 3x^2$. **Г.** $y = -2x^2$.

Ответ. 1) ________; 2) ________;
3) ________; 4) ________

6. Задайте формулой функцию, график которой получен параллельным переносом графика функции $y = 2x^2$ на 3 единицы вниз вдоль оси y.

А. $y = x^2 - 3$. **Б.** $y = 2(x - 3)^2$. **В.** $y = 2x^2 - 3$. **Г.** $y = (x - 3)^2$.

7. На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + c$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов a и c.



А. $a > 0$, $c > 0$. **Б.** $a < 0$, $c > 0$. **В.** $a > 0$, $c < 0$. **Г.** $a < 0$, $c < 0$.

Ответ. 1) ______; 2) ______; 3) ______; 4) ______

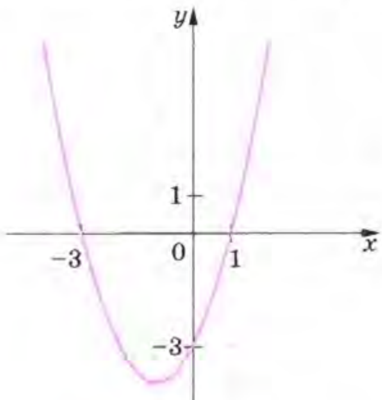
8. Какая формула задает функцию, график которой получен параллельным переносом графика функции $y = 2x^2$ на 3 единицы влево вдоль оси x?

А. $y = 2x^2 - 3$. **Б.** $y = 2x^2 + 3$. **В.** $y = 2(x - 3)^2$. **Г.** $y = 2(x + 3)^2$.

9. Укажите координаты вершины параболы $y = -3(x + 5)^2 - 1$.

А. $(-5; -1)$. **Б.** $(5; -1)$. **В.** $(-5; 1)$. **Г.** $(-5; -1)$.

10. График какой функции изображен на рисунке?



А. $y = 2x^2 - 7x + 3$. **В.** $y = x^2 - 4x + 3$.

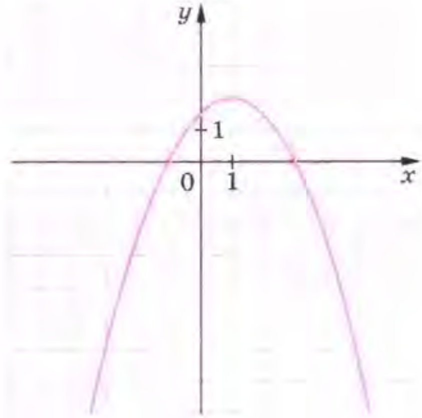
Б. $y = x^2 + 2x - 3$. **Г.** $y = 2x^2 - 5x - 3$.

11. График какой функции целиком расположен ниже оси x?

А. $y = x^2 - 2x + 3$. **В.** $y = x^2 - 5x + 3$.
Б. $y = -x^2 + 4x - 2$. **Г.** $y = -x^2 + 2x - 5$.

12. На рисунке изображен график квадратичной функции $y = f(x)$. Пользуясь графиком, определите, какое из утверждений неверно.

А. $f(-3) = f(5) = -6$.
Б. При любых значениях x $f(x) \leqslant 2$.
В. Нули функции — числа -1; $1{,}5$; 3.
Г. Функция возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$.



13. Пользуясь графиком полета мяча, изображенного на рисунке 2.5 (см. с. 71), определите, какое расстояние пролетел мяч с начала броска до того момента, как он упал на землю.

Ответ. ____________

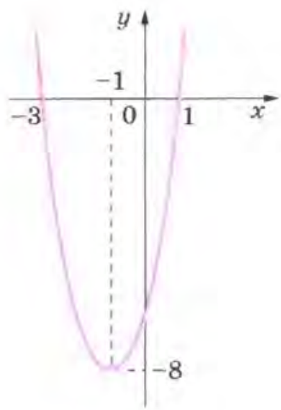
14. На рисунке схематически изображен график функции

$$y = 2x^2 + 4x - 6.$$

Пользуясь рисунком, решите неравенство

$$2x^2 + 4x - 6 > 0.$$

Ответ. ____________



15. Для каждого неравенства укажите множество его решений.

1) $x^2 - 25 \leqslant 0$; 3) $x^2 - 25 \geqslant 0$;
2) $x^2 + 25 \leqslant 0$; 4) $x^2 + 25 \geqslant 0$.

А. $(-\infty; +\infty)$. **Б.** $[-5; 5]$. **В.** $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$. **Г.** $\varnothing$.

Ответ. 1) ________; 2) ________; 3) ________; 4) ________

ГЛАВА 3

Уравнения и системы уравнений

3.1 Рациональные выражения

Выражения, как известно, составляют из чисел и букв с помощью скобок и знаков действий. Сначала вы познакомились с четырьмя арифметическими действиями — сложением, вычитанием, умножением и делением — и научились записывать числовые и буквенные выражения, используя соответствующие знаки. Позже вы узнали о возведении в степень с натуральным и целым отрицательным показателем. Однако это действие фактически не является новым: степень с натуральным показателем — это краткая запись произведения одинаковых множителей, а степень с целым отрицательным показателем иначе записывается в виде дроби.

Алгебраические выражения, составленные из чисел и букв с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления, называют рациональными.

Приведем примеры рациональных выражений:

$$0{,}5abc;\quad 3x^2 + xy - y^2;\quad (a + b - c)(a - b);\quad \frac{x+y}{4};$$

$$\frac{x^2+y^2}{x+y};\quad \frac{a}{a-b}\cdot\frac{1}{a+b};\quad \frac{1}{a+b};\quad a^{-2} + b^2.$$

Рациональные выражения подразделяются на *целые* и *дробные*. Их легко различить по «внешнему виду».

Если рациональное выражение не содержит деления на выражение с переменной, то его называют целым. В противном случае выражение называют дробным.

Посмотрите на примеры, приведенные выше. Все выражения в первой строке — целые. Среди них есть одночлен, многочлен, произведение многочленов. Понятно, что целым будет любое выражение, составленное из нескольких многочленов (в том числе одночленов), соединенных знаками сложения, вычитания, умножения. Выражения во второй строке целыми не являются; это все примеры дробных выражений.

Кроме рациональных выражений, вам встречались и так называемые *иррациональные выражения*. Так называют выражения, в которых хотя бы одна переменная содержится под знаком корня. Например, выражение $\sqrt{2+x}$ иррациональное. А вот похожее на него выражение $\sqrt{2}+x$ является рациональным. Таким образом, рациональные и иррациональные выражения также различают по «внешнему виду». Иррациональные выражения будут детально рассматриваться в старших классах. Здесь же мы сосредоточимся на рациональных выражениях.

Вы знаете, что в выражение вместо переменных можно подставлять числа и вычислять его числовое значение (если, конечно, при этих значениях переменных выражение имеет смысл). Те значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют, как известно, *допустимыми*.

Множество всех допустимых значений переменных называют областью определения выражения.

Целое выражение определено при любых значениях входящих в него переменных. С дробным выражением дело обстоит иначе: при некоторых значениях переменных оно может не иметь смысла.

Чтобы найти область определения дробного выражения, надо из множества всех действительных чисел исключить те значения переменных, которые обращают в нуль содержащиеся в выражении делители.

Пример 1. Найдем область определения выражения

$$\frac{x+3}{x^2-4x-5}.$$

Выясним, существуют ли значения переменной, при которых знаменатель данной дроби равен нулю. Для этого решим уравнение

$x^2 - 4x - 5 = 0$. Оно имеет два корня: 5 и −1. Таким образом, знаменатель дроби обращается в нуль при $x = 5$ и $x = -1$. Значит, областью определения выражения $\frac{x+3}{x^2-4x-5}$ является множество всех чисел, кроме 5 и −1. Записать это можно так: $x \neq 5$ и $x \neq -1$.

■ Пример 2. Найдем область определения выражения

$$\frac{x+y}{x-y}.$$

Знаменатель данной дроби обращается в нуль, если $x = y$. Значит, областью определения выражения $\frac{x+y}{x-y}$ служит множество пар значений переменных x и y, таких, что $x \neq y$.

Как вы знаете, алгебра — это наука и искусство преобразования буквенных выражений. Преобразования выполняются по определенным правилам — алгебраическим законам, которые вводятся на основе свойств арифметических действий.

Если одно рациональное выражение может быть получено из другого с помощью алгебраических преобразований, то такие два рациональных выражения называют тождественно равными (или просто равными).

Целое выражение можно преобразовывать, пользуясь правилами действий с многочленами. Сумму, разность и произведение многочленов всегда можно представить в виде многочлена. Поэтому *всякое целое выражение равно некоторому многочлену*.

■ Пример 3. Преобразуем в многочлен выражение $2b(a + b) - (a + 2b)(b - a)$. Получим

$$2b(a + b) - (a + 2b)(b - a) =$$
$$= 2ab + 2b^2 - (ab + 2b^2 - a^2 - 2ab) = a^2 + 3ab.$$

Таким образом,

$$2b(a + b) - (a + 2b)(b - a) = a^2 + 3ab.$$

Точно так же принятые нами правила действий с алгебраическими дробями позволяют всякое дробное выражение представлять в виде отношения многочленов. Иными словами, *всякое дробное выражение равно некоторой алгебраической дроби*.

■ Пример 4. Преобразуем в дробь выражение

$$\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{x}{x+1}.$$

$$\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{x}{x+1}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{x^{\smile x+2}}{x+1}=$$

$$=\frac{1+x^2+2x}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x+2)}=\frac{x+1}{x+2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x+2}.$$

Равенство, левая и правая части которого — тождественно равные выражения, называют тождеством.

Часто в алгебре ставится задача: «доказать, что равенство является тождеством», или короче: «доказать тождество». В таких случаях нужно убедиться в том, что одну часть равенства можно получить из другой с помощью преобразований (левую часть из правой или правую из левой) или что обе части равенства можно привести к одному и тому же выражению.

■ Пример 5. Докажем тождество

$$x^8-y^8=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4).$$

Преобразуем, например, в многочлен произведение в правой части равенства:

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=$$

$$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=(x^4-y^4)(x^4+y^4)=x^8-y^8.$$

Мы получили левую часть равенства. Таким образом, тождество доказано.

■ Пример 6. Докажем тождество

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}=\frac{3}{a(a+3)}.$$

В данном случае мы, естественно, будем преобразовывать левую часть равенства. Преобразования будут проще, если сложение дробей выполнять последовательно — сначала сложить первую и вторую дроби, а затем к их сумме прибавить третью:

$$\frac{1^{\smile a+2}}{a(a+1)}+\frac{1^{\smile a}}{(a+1)(a+2)}=$$

$$=\frac{a+2+a}{a(a+1)(a+2)}=\frac{2a+2}{a(a+1)(a+2)}=\frac{2}{a(a+2)};$$

$$\frac{2^{\backslash a+3}}{a(a+2)}+\frac{1^{\backslash a}}{(a+2)(a+3)}=$$

$$=\frac{2a+6+a}{a(a+2)(a+3)}=\frac{3a+6}{a(a+2)(a+3)}=\frac{3}{a(a+3)}.$$

Мы получили правую часть равенства. Тождество доказано.

Возьмем два очевидных тождества:

$$(x-1)(x+1)=x^2-1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2-1}{x-1}=x+1.$$

Обе части первого тождества имеют смысл при всех значениях переменной x, и при любом x их соответственные значения одинаковы. Со вторым тождеством ситуация иная. При $x = 1$ его левая часть не определена, а правая имеет смысл (ее значение равно 2). Так получилось потому, что при сокращении дроби $\frac{x^2-1}{x-1}$ область определения выражения стала шире. При всех значениях x, отличных от 1, т. е. при всех x, при которых обе части тождества имеют смысл, их значения одинаковы.

Итак, равные с алгебраической точки зрения выражения $\frac{x^2-1}{x-1}$ и $x + 1$ все же «чуть-чуть» различаются. Это особенно хорошо видно на графиках. График функции $y = x + 1$ — прямая (рис. 3.1, *а*). График функции $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ почти такой же: это та же прямая, но без точки с координатами $x = 1$, $y = 2$ (рис. 3.1, *б*).

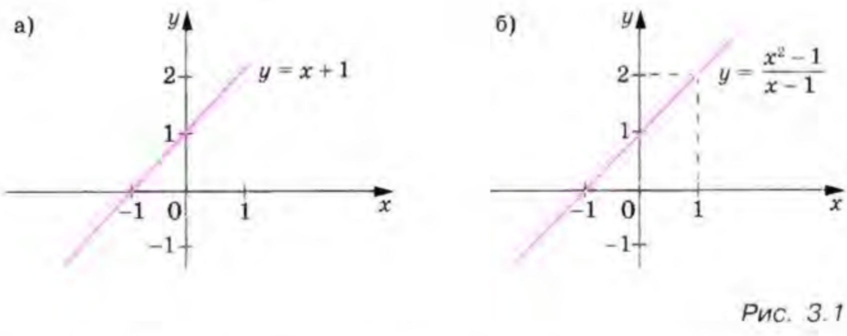


Рис. 3.1

Таким образом, у тождественно равных выражений области определения могут не совпадать. Однако при всех значениях переменных, при которых оба выражения имеют смысл, их числовые значения одинаковы.

Поэтому можно сказать так:

тождество — это равенство, которое обращается в верное числовое равенство при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Если же при подстановке какого-либо значения переменной (пары, тройки и т. д. значений переменных) в левую и правую части некоторого равенства получаются *разные* числа, то это равенство тождеством не является.

Возьмем, например, равенство $(x + 1)^2 = x^2 + 1$. Подставим в левую и правую его части $x = 2$. Получим

$$(x + 1)^2 = (2 + 1)^2 = 9,$$
$$x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5.$$

Мы видим, что при $x = 2$ значения выражений $(x + 1)^2$ и $x^2 + 1$ различны. Этого достаточно, чтобы утверждать, что равенство $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ не тождество.

A

342. Найдите значение выражения при указанных значениях переменной (в том случае, если оно имеет смысл):

а) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}$ при $x = -1;\ 0;\ 1;$

б) $\frac{2x^3 + x}{2}$ при $x = -2;\ 0;\ 1;$

в) $\frac{3x - 1}{x}$ при $x = -1;\ 0;\ 2;$

г) $(x - 2)^{-2}$ при $x = -5;\ 0;\ 2.$

343. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных (в том случае, если оно имеет смысл):

а) $\frac{x + y}{xy}$ при $x = 5$ и $y = -5$; при $x = 0$ и $y = 3$;

б) $\frac{a(a - 1)}{b(b - 1)}$ при $a = -1$ и $b = 2$; при $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{4}$;

в) $\frac{xyz - 1}{x + y + z}$ при $x = 0,\ y = -1,\ z = -2$; при $x = y = z = \frac{1}{3}$;

г) $\frac{abc}{(a - b)(b - c)}$ при $a = b = 1,\ c = -1$; при $a = c = 1,\ b = -1$.

Найдите область определения выражения (**344—345**):

344. а) $\frac{x}{1-x^2}$; г) $\frac{m-3}{m^2}$; ж) $\frac{1+a}{1-2a+a^2}$;

б) $\frac{a^2-1}{(2-a)(4+3a)}$; д) $\frac{x^2-5x+3}{4}$; з) $(3x+9)^2$;

в) $\frac{y^2-9}{y^2+9}$; е) $\frac{b^2+1}{b^2-8b+12}$; и) $2a^{-1}-4$.

345. а) $\frac{1}{x}+\frac{x}{x-3}$; в) $2y+\frac{1}{y+2}$; д) $\frac{1+\frac{1}{a}}{1+a}$;

б) $\frac{a}{a^2-1}-\frac{a}{a+1}$; г) $\frac{3}{c^2+c}-c$; е) $\frac{x}{1-\frac{1}{x}}$.

346. Из двух данных выражений составьте какое-нибудь целое выражение и преобразуйте его в многочлен, а затем составьте какое-нибудь дробное выражение и упростите его:

а) $(x-1)^2$ и x^2-1; б) a^2-4 и a^2-3a+2.

347. При выполнении преобразования была допущена ошибка. Найдите ее и дайте правильный ответ:

а) $\frac{y-x}{2y-x}=-\frac{x-y}{x-2y}$; в) $\frac{m^2-n^2}{m(n-m)}=\frac{m+n}{m}$;

б) $\frac{(b-a)^2}{ab(a-b)^2}=-\frac{1}{ab}$; г) $\frac{(p-q)(q-r)}{p-r}=\frac{(q-p)(r-q)}{r-p}$.

348. (*Задание с выбором ответа.*) Какая из дробей равна данному выражению?

а) $\frac{c}{c-d}+\frac{c}{c+d}$; **А.** $\frac{2c^2}{c^2-d^2}$. **Б.** $\frac{2}{1-d^2}$. **В.** $\frac{2c}{c^2-d^2}$.

б) $\frac{a+1}{a^2-a}-\frac{a-1}{a^2+a}$; **А.** $-\frac{1}{a}$. **Б.** $\frac{4}{a^2-1}$. **В.** $\frac{2}{a^3-a}$.

в) $\frac{m^2-16}{m^2-2m}\cdot\frac{m-2}{m^2+4m}$; **А.** $-\frac{3}{m}$. **Б.** $\frac{1}{m+2}$. **В.** $\frac{m-4}{m^2}$.

г) $\frac{(a-b)^2}{ab+b^2}:\frac{a^2-b^2}{b}$; **А.** $\frac{1}{(a+b)^2}$. **Б.** $\frac{(a-b)^3}{b^2}$. **В.** $\frac{a-b}{(a+b)^2}$.

349. Выполните подстановку $a=\frac{xy}{x+y}$, $b=\frac{xy}{x-y}$ в данное выражение и упростите его:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$; д) $\frac{ab}{a+b}$; е) $\frac{a-b}{ab}$.

Упростите выражение (**350—352**):

350. а) $\left(\frac{z}{x-z}+\frac{x+z}{z}\right):\frac{x}{x^2-z^2}$; в) $\frac{2}{3-a}+\frac{a^2-4}{a^2-9}\cdot\frac{a+3}{a-2}$;

б) $\frac{16-m^2}{16m^2}\cdot\left(\frac{m-4}{m+4}-\frac{m+4}{m-4}\right)$; г) $\frac{ab}{a^2-b^2}:\frac{ab}{a+b}-\frac{b}{a^2-b^2}$.

351. а) $\left(\frac{2}{a}+\frac{a}{2}-2\right)\cdot\frac{a}{6a-12}$; в) $\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{p-q}-\frac{p}{p+q}\right)$;

б) $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2\right):\left(m+2n+\frac{n^2}{m}\right)$; г) $\left(y-\frac{y^2}{y+1}\right):\left(y-\frac{y}{y+1}\right)$.

352. а) $\frac{6}{x^2+x-2}+\frac{2}{x+2}$; б) $\frac{1}{y+3}+\frac{2}{y^2+4y+3}$.

353. Вычислите значение выражения при заданных значениях переменных (если оно имеет смысл):

а) $\frac{a^2+4}{a^2-4}-\frac{a}{a+2}$ при $a=\frac{2}{3}$; -4; 2;

б) $\frac{c^2-25}{10c}\cdot\frac{c}{c-5}$ при $c = 2{,}5$; 0; -37;

в) $\frac{m}{m-n}\cdot\left(\frac{m-n}{m}-1\right)$ при $m=\frac{1}{4}$ и $n=\frac{1}{2}$; $m = -15$ и $n = -18$; $m = 0$ и $n = 10$; $m = 10$ и $n = 0$;

г) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{xy}{x-y}$ при $x = 12$ и $y = -15$; $x=-\frac{2}{3}$ и $y=\frac{5}{6}$; $x = 0$ и $y = 22$; $x = 5$ и $y = 5$.

Докажите тождество (**354—355**):

354. а) $(x-y)^2+(x+y)^2-2(x-y)(x+y)=4y^2$;

б) $2(x+y)(x-y)+(x+y)^2+(x-y)^2=4x^2$.

355. а) $\left(\frac{1}{m-n}-\frac{1}{m+n}\right):\left(\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}\right)=\frac{n}{m}$;

б) $\left(\frac{a+b}{a}-\frac{a+b}{b}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=b-a;$

в) $\left(1-\frac{1}{c-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{c-2}\right)=1;$

г) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2=-4.$

356. 1) Докажите, что выражения

$$(x+1)^2(x-1)^2,\ (x^2+2x+1)(x^2-2x+1),$$
$$(x^2-1)^2 \text{ и } x^4-2x^2+1$$

тождественно равны.

2) Какое из выражений

$$(x-3)^2(x+3)^2,\quad (3+x)(3-x)(x-3),$$
$$(x-3)(x+3)(x-3) \text{ или } (x^2-9)(x-3)$$

является «лишним»?

357. Какие из равенств не являются тождествами:

1) $a^{-3}\cdot a^2=a^{-6};$

2) $x^{10}\cdot x^{-5}=x^5;$

3) $(m-n)^2=m^2-n^2;$

4) $a(a+b)=a^2+b;$

5) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{x-y}{x+y};$

6) $-\frac{a-b}{a+b}=\frac{b-a}{a+b};$

7) $p+p^{-1}=\frac{p^2+1}{p};$

8) $p^{-1}+q^{-1}=\frac{1}{p+q}$?

358. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения:

а) $\left(x-y-\frac{x^2-y^2}{y}\right)\cdot\frac{y}{xy-x^2}$ равно 1;

б) $\left(\frac{1}{a-1}-\frac{2}{a^2-1}\right)\cdot\frac{a+1}{2}$ равно 0,5;

в) $\frac{b+c}{b-c}-\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}+\frac{2bc}{c^2-b^2}$ равно 0;

г) $\frac{1-m}{m}\cdot\frac{m^2}{m^2-1}+\frac{m^2-m}{m^2-1}$ равно 0.

359. Докажите, что при всех значениях переменных:
а) значение выражения

$$(a-b)^2+(a+b)^2-(a-b)(a+b)$$

является числом неотрицательным;
б) значение выражения

$$(x+2)(x-2)-(2x-1)(2x+1)+3$$

является числом неположительным.

Б

360. Найдите область определения выражения:

а) $\dfrac{b}{b^3-1}-\dfrac{1}{b}$; в) $\dfrac{x+3}{x^2-x-20}-\dfrac{3}{x^2-9}$;

б) $\dfrac{3}{a^2-4}+\dfrac{a}{(a-1)^2}$; г) $\dfrac{1}{2x^2+x}-\dfrac{1}{2x^2-x+1}$.

361. Какова область определения выражения? Укажите несколько пар значений x и y, при которых выражение не имеет смысла:

а) $\dfrac{xy}{x-y}$; б) $\dfrac{x-y}{x+y}$; в) $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$; г) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

362. Найдите область определения выражения:

а) $\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$; б) $\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+1}$; в) $\dfrac{\dfrac{1}{x+y}+z}{x^2+y^2+1}$.

363. На рисунке 3.2 изображены гиперболы — графики функций

$$y=\frac{1}{x},\quad y=\frac{1}{x-1},\quad y=\frac{1}{x+1}.$$

Соотнесите каждый график с формулой.

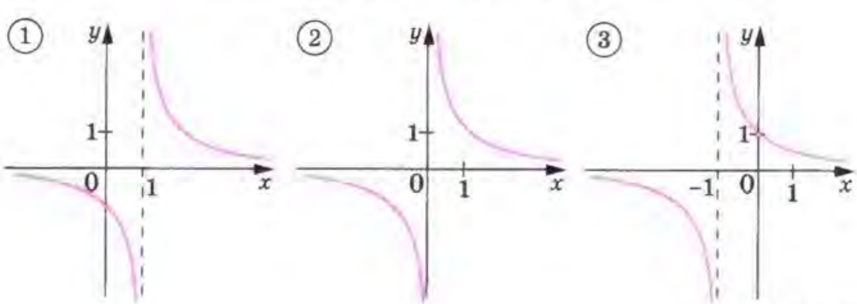


Рис. 3.2

364. Для каждой из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ укажите соответствующий ей график, если:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ (рис. 3.3);

б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$ (рис. 3.4).

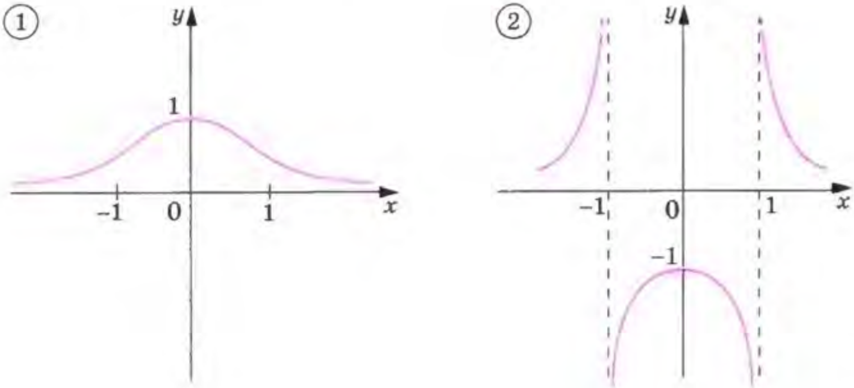


Рис. 3.3

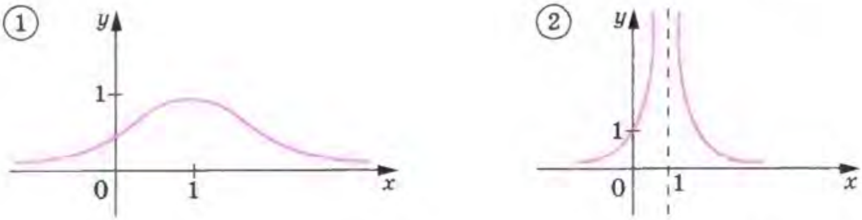


Рис. 3.4

Сократите дробь **(365—367)**:

365. а) $\dfrac{a^2 - 4a - 5}{a^2 - 9a + 20}$; в) $\dfrac{4x^2y + 3xy^2 - 6x^2y^2}{12xy}$; д) $\dfrac{2x^2 - 10x + 12}{3x - 6}$;

б) $\dfrac{c^2 - 5c - 14}{c^2 - 6c - 7}$; г) $\dfrac{a^3x - b^3x}{2ax - 2bx}$; е) $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{20 - 4x}$.

366. а) $\dfrac{1 - 3x}{9x^2 + 12x - 5}$; в) $\dfrac{5a^2 - 10a + 2b - ab}{2 + 3a - 2a^2}$; д) $\dfrac{8 - x^3}{3x^2 - 8x + 4}$;

б) $\dfrac{2x^2 + 5x}{15 + x - 2x^2}$; г) $\dfrac{y - x - 3y^2 + 3xy}{3y^2 + 8y - 3}$; е) $\dfrac{x^3 + 27}{6 - 13x - 5x^2}$.

367. а) $\dfrac{m^2-12mn+35n^2}{m^2-25n^2}$; в) $\dfrac{4y^2-x^2}{x^2-7xy+10y^2}$;

б) $\dfrac{a^2-7ab+6b^2}{a^2-2ab+b^2}$; г) $\dfrac{15p^2-8pq+q^2}{5pq-q^2}$.

Докажите тождество (**368—370**):

368. а) $a^3 + 3ab(a + b) + b^3 = (a + b)^3$;
б) $a^3 - 3ab(a - b) - b^3 = (a - b)^3$.

369. а) $(m - 1)(m + 1)(m^2 + 1) - (m^2 - 1)^2 - m^2 = m^2 - 2$;
б) $(a^2 + 3)^2 - (a - 3)(a + 3)(a^2 + 9) = 6(a^2 + 15)$.

370. а) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + 1$;
б) $(1+y\sqrt{2}+y^2)(1-y\sqrt{2}+y^2)=1+y^4$.

371. Найдите выражение, при подстановке которого вместо A в данное равенство получается тождество, и выполните проверку:

а) $\dfrac{2x+9}{x^2-x-6}=\dfrac{3}{x-3}+A$; в) $\dfrac{2}{x^2+3x+2}=A\cdot\dfrac{x+3}{x+2}$;

б) $A+\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{6x-15}{x^2-5x+4}$; г) $A:\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{x}{x^2-x-12}$.

372. Докажите тождество:

а) $\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{8}{x^2-6x+5}-\dfrac{2}{x-5}\right)\cdot\dfrac{x^2-1}{x}=-\dfrac{x+1}{x}$;

б) $\dfrac{x-1}{x+6}:\left(\dfrac{3}{x+6}+\dfrac{5x+2}{x^2+5x-6}-\dfrac{x}{x-1}\right)=-1$;

в) $\left(\dfrac{1}{25x^2-1}+\dfrac{4x^2-3x}{5x-1}\cdot\dfrac{25x}{3+11x-20x^2}\right)=-1$;

г) $\dfrac{9}{10x^2-11x-6}:\dfrac{2x+3}{10x^2+4x}-\dfrac{8x^3}{4x^2-9}=-2x$.

373. Докажите тождество:

а) $\dfrac{(x^2+x-1)^2-(x^2+x-4)^2}{(x^2+x-2)^2-(x^2+x-3)^2}=3$.

Указание. Используйте подстановку $y = x^2 + x$.

б) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(4x-\dfrac{4}{x}\right)\left(9x-\dfrac{9}{x}\right)-\left(2x-\dfrac{2}{x}\right)\left(3x-\dfrac{3}{x}\right)\left(6x-\dfrac{6}{x}\right)=0$.

Указание. Используйте подстановку $y=x-\dfrac{1}{x}$.

374. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2-2;$

б) $\left(\dfrac{a^2}{a+1}-a\right)\left(\dfrac{5a^2}{a+1}-a\right)-\left(\dfrac{2a^2}{a+1}-a\right)\left(\dfrac{4a^2}{a+1}-a\right).$

375. а) Найдите наименьшее значение выражения $x^2 - 2xy - y^2$, если $x + y = 1$.

б) Найдите наибольшее значение выражения $x^2 - 3xy + y^2$, если $x - y = 2$.

Указание. Выразите одну переменную через другую и выполните подстановку.

Постройте график функции (**376—377**):

376. а) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2};$ в) $y=\dfrac{x^2-4x-5}{x+1};$

б) $y=\dfrac{x-1}{x^2-x};$ г) $y=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}.$

377. а) $y=(\sqrt{x})^2;$ б) $y=\sqrt{x^2};$ в) $y=(\sqrt{x-1})^2.$

3.2 Целые уравнения

Обратимся вновь к вопросу о решении уравнений с одной переменной.

Уравнение с одной переменной называют целым уравнением, если обе его части являются целыми выражениями.

Например, уравнения

$$(x + 1)(1 + 3x) = 3x(x - 2) \text{ и } \frac{x^2-4}{2}-x=5$$

целые. А такие уравнения, как

$$\frac{3}{x}+x=1 \text{ и } \frac{2x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=0,$$

целыми не являются. Вы, наверное, догадались, что их называют *дробными уравнениями*: они содержат дроби с переменной в знаменателе.

Всякое целое уравнение с одной переменной можно преобразовать в равносильное ему уравнение вида $p(x) = 0$, где $p(x)$ — многочлен стандартного вида.

Возьмем, например, уравнение

$$x^2(x - 1) + 4 = x(8 - x^2).$$

Перенесем выражение $x(8 - x^2)$ в левую часть уравнения, раскроем скобки и приведем подобные члены. Получим уравнение

$$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0.$$

Наибольший показатель степени, в которой переменная x содержится в многочлене $2x^3 - x^2 - 8x + 4$, равен 3; иными словами, это многочлен третьей степени. Поэтому и уравнение $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$ — это *уравнение третьей степени*.

Точно так же уравнение $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$ является *уравнением четвертой степени*, а уравнение $x^5 + 4x^3 = 0$ — *уравнением пятой степени*.

Уравнения первой и второй степени в общем виде записываются так: $ax + b = 0$, где $a \neq 0$, и $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Это хорошо знакомые вам уравнения, которые обычно называют соответственно линейным и квадратным. Известны общие приемы решения этих уравнений. Для квадратного уравнения существует *формула корней*, которая указывает, какие действия и в каком порядке надо выполнить с его коэффициентами, чтобы вычислить корни. (Формула позволяет также выяснить, есть ли у уравнения корни и если есть, то сколько.)

Что же касается уравнений более высоких степеней, то здесь ваши возможности весьма ограниченны: их вы можете решить только в некоторых частных случаях. Вы, скорее всего, удивитесь, но решение таких уравнений является проблемой и для профессиональных математиков.

Дело в том, что уже для уравнений пятой степени общей формулы корней вообще не существует: в начале XIX в. норвежский математик Нильс Хенрик Абель доказал, что с помощью арифметических действий и действия извлечения корня нельзя получить корни даже такого сравнительно простого уравнения, как $x^5 + x - 1 = 0$.

Для уравнения третьей и четвертой степени такие формулы имеются. Способ решения уравнений третьей степени был открыт итальянскими математиками в XVI в. К этому открытию математики шли почти четыре века, и его история чрезвычайно интересна. Но формулы для решения уравнений третьей и четвертой степени настолько сложны, что ими практически не пользуются. Кроме того, для их применения необходимы новые, так называемые комплексные числа, которые для этого и были изобретены.

И все же некоторые «хорошие» уравнения третьей и четвертой степени вы решать можете, используя специальные приемы, позволяющие свести данное уравнение к линейным или квадратным уравнениям. Одним из таких приемов является *разложение на множители*. Приведем пример.

■ Пример 1. Решим уравнение

$$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0.$$

Разложим на множители левую часть уравнения:

$$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = x^2(2x - 1) - 4(2x - 1) =$$
$$= (2x - 1)(x^2 - 4) = (2x - 1)(x - 2)(x + 2).$$

Получим уравнение

$$(2x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Оно сводится к решению следующих линейных уравнений:

1) $2x - 1 = 0$; 2) $x - 2 = 0$; 3) $x + 2 = 0$.

Решив первое уравнение, найдем, что $x = \frac{1}{2}$; решив второе, найдем, что $x = 2$; наконец, решив третье, найдем, что $x = -2$.

Таким образом, уравнение $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$ имеет три корня: $\frac{1}{2}$; 2; −2.

Ответ. $\frac{1}{2}$; 2; −2.

Другим часто используемым приемом решения уравнений высших степеней является *введение новой переменной*. Рассмотрим еще один пример.

■ Пример 2. Решим уравнение

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3) = 15.$$

Если раскрыть скобки, то получится уравнение четвертой степени, и неизвестно, сумеем ли мы его решить. Однако это уравнение можно свести к более простому с помощью такой подстановки: $x^2 + x = y$.

Получим

$$(\underbrace{x^2 + x}_{y} + 1)(\underbrace{x^2 + x}_{y} + 3) = 15,$$

$$(y + 1)(y + 3) = 15,$$

$$y^2 + 4y - 12 = 0,$$

$$y_1 = -6,\ y_2 = 2.$$

Теперь нам надо решить два квадратных уравнения:

1) $x^2 + x = -6;$
$x^2 + x + 6 = 0;$
$D = 1 - 24 < 0;$
корней нет.

2) $x^2 + x = 2;$
$x^2 + x - 2 = 0;$
$x_1 = -2,\ x_2 = 1.$

Ответ. $-2;\ 1.$

A

Решите уравнение (**378—379**):

378. а) $\frac{x}{6} + \frac{x}{18} = \frac{10}{9};$ б) $\frac{y}{7} + 1 = \frac{y}{14};$ в) $\frac{z+3}{8} - z = 3;$ г) $\frac{y-5}{3} = \frac{y}{5} + 1;$ д) $\frac{u-2}{2} = \frac{u-6}{6};$ е) $\frac{t+2}{2} = \frac{5+2t}{3}.$

379. а) $\frac{x^2-x}{2} - \frac{x+1}{3} = 1;$ б) $\frac{t+8}{8} - t = \frac{1-t^2}{4};$ в) $\frac{y^2}{5} = \frac{11}{2} + \frac{y}{10};$ г) $\frac{5}{6} - \frac{z^2}{3} = \frac{2z+3}{2}.$

380. Найдите корни уравнения:
а) $(x - 1)(x + 2)(x + 10) = 0;$
б) $(3x + 6)(2x - 5)(x - 5) = 0;$
в) $(x - 2)(x^2 + 3) = 0;$
г) $3x(10x - 1)(1 - x) = 0;$
д) $(x - 5)(x + 3)^2 = 0;$
е) $-2x(x - 4)(x^2 + 1) = 0.$

381. (*Задание с выбором ответа.*) Какое уравнение имеет корни, равные 1, -1 и 2?
А. $(x + 1)(x^2 - 4) = 0.$
Б. $(x^2 - 1)(x + 2) = 0.$
В. $(x - 2)(x^2 - 1) = 0.$
Г. $(x + 1)^2(x - 2) = 0.$

382. 1) Убедитесь, что уравнения
$5x(x + 1)(x - 2) = 0,$ $x^2(x + 1)(2 - x) = 0,$
$x(x + 1)^2(x - 2) = 0,$ $x(x + 1)(2 - x)(x^2 + 1) = 0$
имеют одни и те же корни.
2) Составьте несколько уравнений, корнями которых являются числа:
а) $0;\ -3;\ 4;$ б) $0;\ -1;\ -2;\ 3.$

Решите уравнение (**383—384**):

383. а) $(2x - 1)(x - 5) = x(x - 5);$
б) $(4x - 3)(x + 1) = 2x(x + 1);$
в) $5x(8 - x) = x(x - 8);$
г) $x^2(x - 9) = 2(9 - x).$

384. а) $x^3 - 4x = 0$; г) $x^3 - 2x^2 + x = 0$; ж) $16x^3 = x$;
б) $3x + 3x^2 = 0$; д) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$; з) $x^3 + x = 2x$;
в) $81x^2 - x^4 = 0$; е) $6x^2 + 5x^3 + x^4 = 0$; и) $9x^2 = x^4$.

385. 1) Решите биквадратное уравнение:
а) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$; в) $2x^4 + 9x^2 + 4 = 0$; д) $x^4 + 3x^2 = 0$;
б) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$; г) $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$; е) $x^4 - 9x^2 = 0$.

Указание. Используйте подстановку $y = x^2$.

2) Составьте биквадратное уравнение, имеющее четыре корня, два корня, не имеющее корней.

Б

Найдите корни уравнения (**386—387**):

386. а) $3x^3 - x^2 - 27x + 9 = 0$; г) $5x^3 - x^2 + 20x - 4 = 0$;
б) $2x^3 + x^2 + 6x + 3 = 0$; д) $x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 20x = 0$;
в) $3 + x - 3x^2 - x^3 = 0$; е) $x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 = 0$.

387. а) $5x^4 + 2x^3 - 5x - 2 = 0$; в) $y^5 - 3y^4 - 8y^2 + 24y = 0$;
б) $z^5 - z^3 + z^2 - 1 = 0$; г) $8x^4 + 16x^3 - x - 2 = 0$.

388. Составьте какое-нибудь целое уравнение, которое имеет три корня, приведите его к виду $p(x) = 0$, где $p(x)$ — многочлен стандартного вида, и предложите своему соседу по парте решить его.

Решите уравнение, введя подходящую замену (**389—390**):

389. а) $(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) - 24 = 0$;
б) $(x^2 + x + 1)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 3 = 0$;
в) $(1 - x)^4 + (1 - x)^2 = 20$;
г) $(2 - x^2)^4 - 10(2 - x^2)^2 = -9$.

390. а) $(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x - 2) = 5$;
б) $(x^2 + x)(x^2 + x - 8) = -12$;
в) $(x^2 - 3x - 3)(x^2 - 3x + 2) = 6$;
г) $(x^2 - x)(x^2 - x - 5) = -6$.

Указание. а) Введите замену $x^2 - 4x = y$.

391. Решите уравнение и сделайте проверку:
а) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$; в) $(x - 1) - 2\sqrt{x - 1} - 35 = 0$;
б) $3x + 14\sqrt{x} - 5 = 0$; г) $(x + 2) + 3\sqrt{x + 2} - 18 = 0$.

Указание. Используйте подстановку: а) $y = \sqrt{x}$, в) $y = \sqrt{x - 1}$.

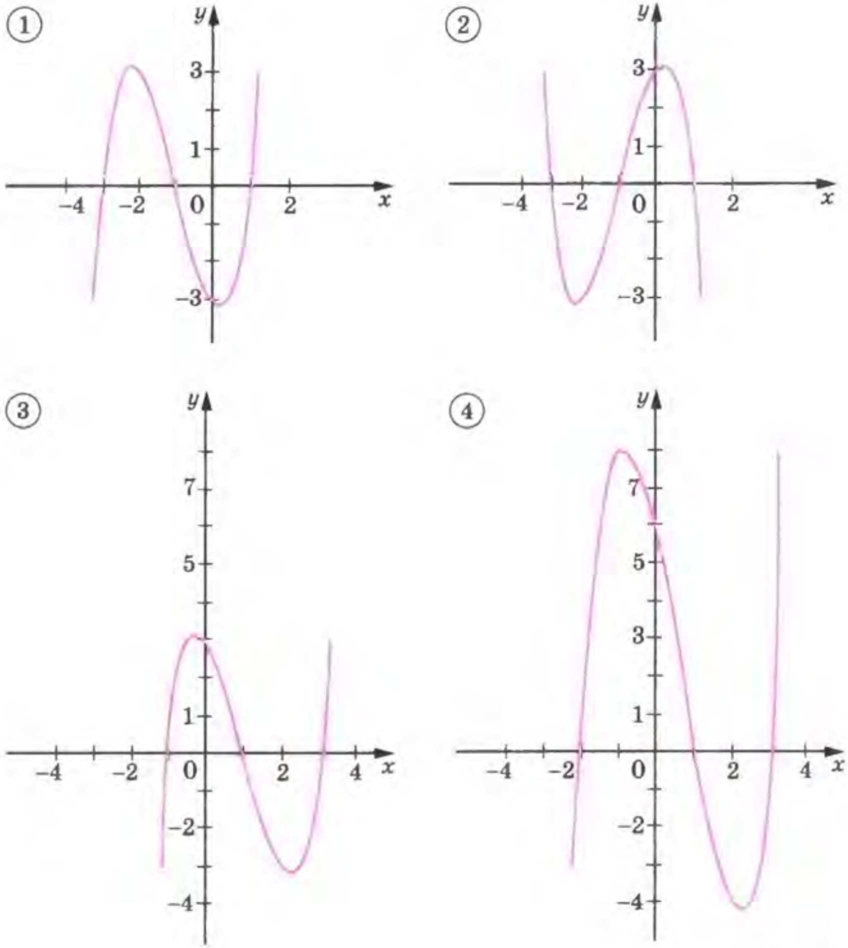


Рис. 3.5

392. На рисунке 3.5 изображены графики функций:
$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$, $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$,
$g(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 3)$, $q(x) = -(x + 1)(x - 1)(x + 3)$.
Соотнесите каждый график с формулой.

393. На рисунке 3.6 изображены графики функций:
$y = x^4 - 5x^2 + 4$ (рис. *а*) и $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ (рис. *б*).
Пользуясь соответствующим графиком, решите уравнение:
а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; б) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$.

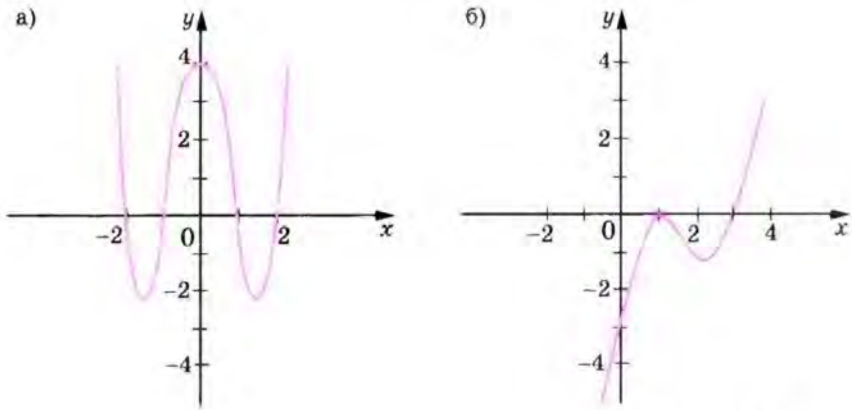


Рис. 3.6

394. Определите, пересекает ли график функции $y = f(x)$ ось x и если да, то в каких точках:

а) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 3$;

б) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$;

в) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$;

г) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 8x + 48$.

3.3 Дробные уравнения

Пусть требуется решить уравнения

$$\frac{x^2 + x}{3} - \frac{x - 2}{2} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{2x}{x - 3} + \frac{6}{(x - 3)(x - 4)} = \frac{x}{x - 4}.$$

Первое из этих уравнений целое, второе — дробное. Однако каждое из них содержит дроби. Поэтому при решении и того и другого уравнения естественно воспользоваться одним и тем же известным приемом — избавиться от дробей.

Решим сначала уравнение $\frac{x^2 + x}{3} - \frac{x - 2}{2} = 2$.

Умножим обе его части на число 6 — наименьший общий знаменатель дробей, получим

$$\frac{(x^2 + x) \cdot 6}{3} - \frac{(x - 2) \cdot 6}{2} = 2 \cdot 6,$$

$$2(x^2 + x) - 3(x - 2) = 12,$$

$$2x^2 - x - 6 = 0.$$

Квадратное уравнение, которое мы получили, имеет два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{2}$. Так как в процессе решения на каждом шаге мы заменяли уравнение ему равносильным, то числа 2 и $-\frac{3}{2}$ являются корнями исходного уравнения.

Теперь решим второе уравнение:

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{6}{(x-3)(x-4)} = \frac{x}{x-4}.$$

Чтобы избавиться от дробей в этом случае, умножим обе части уравнения на произведение $(x - 3)(x - 4)$ — простейший общий знаменатель дробей, входящих в уравнение. Получим

$$\left(\frac{2x}{x-3} + \frac{6}{(x-3)(x-4)}\right) \cdot (x-3)(x-4) = \frac{x}{x-4} \cdot (x-3)(x-4),$$

$$\left(\frac{2x(x-3)(x-4)}{x-3} + \frac{6(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-4)}\right) = \frac{x(x-3)(x-4)}{x-4},$$

$$2x(x-4) + 6 = x(x-3),$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет корни $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Однако сразу же видно, что число 3 корнем исходного уравнения быть не может. В самом деле, при $x = 3$ знаменатели дробей в левой части уравнения обращаются в нуль, т. е. при $x = 3$ эти дроби не имеют смысла.

Другой корень — число 2 — является и корнем исходного уравнения. В этом легко убедиться, подставив значение x, равное 2, в левую и правую части уравнения:

$$\frac{2 \cdot 2}{2-3} + \frac{6}{(2-3)(2-4)} = -1 \text{ и } \frac{2}{2-4} = -1.$$

Таким образом, данное уравнение имеет только один корень — число 2.

Почему так получилось? Дело в том, что, избавившись от дробей при решении второго уравнения, мы перешли от дробного уравнения к целому, у которого множество допустимых значений переменных шире. В результате получилось такое целое уравнение, у которого один из корней является *посторонним* для исходного дробного уравнения, и мы должны были этот корень отбросить.

При решении целого уравнения такой проблемы не было. Она и не могла возникнуть. Избавляясь от дробей с числовыми знаменателями, мы переходим от одного целого уравнения к другому целому уравнению, равносильному ему. Множество допустимых значений переменных остается при этом одним и тем же — это множество всех действительных чисел.

Из разобранных примеров становится ясно, что при решении дробных уравнений необходимо помнить о возможности появления посторонних корней.

Чтобы решить дробное уравнение, нужно:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3) решить получившееся целое уравнение;
4) исключить посторонние корни.

■ Пример 1. Решим уравнение $\frac{1}{x^2 - x} + 1 = \frac{3}{x}$.

Разложим на множители знаменатель первой дроби. Получим уравнение

$$\frac{1}{x(x-1)} + 1 = \frac{3}{x}.$$

Общий знаменатель дробей — произведение $x(x - 1)$. Умножим обе части уравнения на этот общий знаменатель (для краткости укажем только дополнительные множители):

$$\frac{1}{x(x-1)}^{\,1} + 1^{\,x(x-1)} = \frac{3}{x}^{\,x-1},$$

$$1 + x(x - 1) = 3(x - 1),$$

$$1 + x^2 - x = 3x - 3,$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

$$(x - 2)^2 = 0,\ x = 2.$$

Найденный корень не является посторонним, так как он не обращает в нуль произведение $x(x - 1)$ — общий знаменатель дробей: $2 \cdot (2 - 1) \neq 0$.

Ответ. 2.

Рассмотренный прием решения уравнений носит общий характер: его можно использовать при решении любого уравнения, содержащего переменную в знаменателе дроби. В то же время в некоторых частных случаях можно рассуждать иначе.

■ Пример 2. Решим уравнение $\frac{x^2 - 2x - 15}{3x + 9} = 0$.

Это уравнение типа «дробь равна нулю». Дробь равна нулю в том и только том случае, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

Приравнивая числитель дроби к нулю, получим уравнение

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Найдем его корни: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.

Проверим, нет ли среди чисел -3 и 5 постороннего корня. Для этого подставим каждое из них в знаменатель дроби $3x + 9$:

$$3 \cdot (-3) + 9 = 0, \ 3 \cdot 5 + 9 \neq 0.$$

Таким образом, число -3 — посторонний корень.

Ответ. $x = 5$.

■ Пример 3. Решим уравнение $\frac{x}{x+2} = \frac{x+1}{5x+1}$.

Это уравнение можно решить, используя основное свойство пропорции:

$$x(5x + 1) = (x + 2)(x + 1),$$
$$5x^2 + x = x^2 + 3x + 2,$$
$$4x^2 - 2x - 2 = 0,$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$
$$x_1 = -\frac{1}{2}, \ x_2 = 1.$$

Чтобы выяснить, нет ли здесь постороннего корня, можно, как и прежде, выполнить подстановку полученных чисел в знаменатели дробей. Однако можно поступить иначе: найти корни знаменателей и сопоставить их с числами $-\frac{1}{2}$ и 1.

Знаменатель первой дроби обращается в нуль при $x = -2$, а второй — при $x = -\frac{1}{5}$. Ни одно из этих чисел не совпадает с найденными корнями. Таким образом, посторонних корней нет.

Ответ. $1; -\frac{1}{2}$.

A

Решите уравнение **(395—398)**:

395. а) $\frac{4}{x} - \frac{7}{4x} = 6$; в) $\frac{z-2}{z} = \frac{4}{3z} - \frac{z}{3}$; д) $\frac{8}{t^2} - \frac{2-t}{t} = 2$;

б) $\frac{5}{2y} + \frac{1}{2} = \frac{3}{y} + 1$; г) $\frac{y-1}{y} - \frac{4}{y^2} = 1$; е) $\frac{4}{15x} - \frac{1}{5} = \frac{2-x}{3x}$.

396. а) $\frac{2}{y+1}-\frac{3}{2(y+1)}=5;$ г) $\frac{x+7}{3x-6}-\frac{2x-3}{x-2}=\frac{1}{3};$

б) $\frac{1}{3(z-2)}=\frac{3}{z-2}+1;$ д) $\frac{y+1}{y-1}=\frac{2}{y^2-y};$

в) $1+\frac{2}{x-1}=\frac{2}{x^2-x};$ е) $\frac{3z-1}{4z+12}+\frac{z+2}{z+3}=\frac{1}{4}.$

397. а) $\frac{5}{x}=\frac{8}{x+1}+1;$ д) $\frac{y}{y-1}+\frac{6}{y+1}=4;$

б) $\frac{z}{z-4}+\frac{6}{z}=1;$ е) $\frac{8}{z-2}-1=\frac{8}{z+2};$

в) $\frac{1}{t-6}+3=\frac{10}{t};$ ж) $\frac{4}{x}+\frac{7}{2x+3}=3;$

г) $\frac{4}{y-2}-\frac{3}{y}=\frac{1}{2};$ з) $\frac{3}{2t-1}=1-\frac{4}{2t+1}.$

398. а) $z-\frac{1}{z}=\frac{16}{15};$ в) $2y=5-\frac{3}{y};$ д) $8-\frac{1}{y}=7y;$

б) $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2};$ г) $\frac{5}{x}+x=6;$ е) $6=\frac{5}{z}-z.$

399. а) Известно, что сумма некоторого числа и числа, ему обратного, равна 2,9. Найдите это число.
б) Известно, что если из данного числа вычесть число, ему обратное, то получится 0,45. Найдите данное число.

400. (*Задание с выбором ответа.*) Какое из чисел 1 и 2 является корнем уравнения $\frac{(x-1)(x-2)}{3x^3-9x^2+6}=0$?

А. 1. **Б.** 2. **В.** Оба этих числа. **Г.** Ни одно из них.

Найдите корни уравнения (**401—403**):

401. а) $\frac{x^2-2x}{3x+6}=0;$ д) $\frac{x^2-4x}{x+4}=0;$

б) $\frac{x^2-1}{4x^2-x-3}=0;$ е) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+8x+12}=0;$

в) $\frac{x^2+x}{x+1}=0;$ ж) $\frac{x(x+1)-(x+1)}{x(x-9)-(x-9)}=0;$

г) $\frac{x^2-3x-18}{x+3}=0;$ з) $\frac{5(x+5)-x(x+5)}{x(x-2)}=0.$

402. а) $\frac{4}{x+7}=\frac{2}{5}$; д) $\frac{t}{2t-3}-\frac{3}{t}=0$;

б) $\frac{y-5}{y+5}=\frac{1}{3}$; е) $\frac{2-z}{3-z}=\frac{z}{z+4}$;

в) $\frac{15}{8-z}-\frac{1}{z}=0$; ж) $\frac{2y-1}{y}=\frac{y+7}{y+3}$;

г) $\frac{3}{x-4}=\frac{4}{x-3}$; з) $\frac{3(x-1)}{x(x+1)}-\frac{1}{2}=0$.

403. а) $\frac{x+9}{x+3}=x-1$; в) $\frac{2}{2z+5}=z+1$;

б) $y=\frac{2y}{3y-1}$; г) $\frac{5x-2}{x}=3x$.

404. Даны две дроби $\frac{a+2}{a-1}$ и $\frac{a-1}{a+2}$. Найдите значения переменной a, при которых:
а) значение первой дроби равно 10;
б) значение второй дроби равно 10;
в) значения дробей равны;
г) разность первой и второй дробей равна их произведению.

Б

Решите уравнение (405—407):

405. а) $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{x^2-1}$; в) $\frac{2x}{x+3}-\frac{x}{3-x}=\frac{9}{4x^2-36}$;

б) $\frac{4-x}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{x^2}{x^2-4}$; г) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{x}{2-x}=\frac{2x}{x+2}$.

406. а) $\frac{6}{x}+\frac{x+3}{x+2}=\frac{4x+6}{x^2+2x}$; в) $\frac{x-1}{x}-\frac{1}{x-6}=\frac{6}{6x-x^2}$;

б) $\frac{6}{x-2}+\frac{2}{x}=\frac{x-3}{x^2-2x}$; г) $\frac{4}{x}+\frac{3}{x-5}=\frac{x-20}{5x-x^2}$.

407. а) $\frac{3}{x-2}-\frac{6}{x+4}=\frac{3}{x}$; в) $\frac{3}{4-x}-\frac{5}{x}=\frac{7}{3-x}$;

б) $\frac{4}{x-2}=\frac{7}{x-3}+\frac{2}{15}$; г) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}=\frac{x+1}{x+2}$.

Найдите корни уравнения (**408—409**):

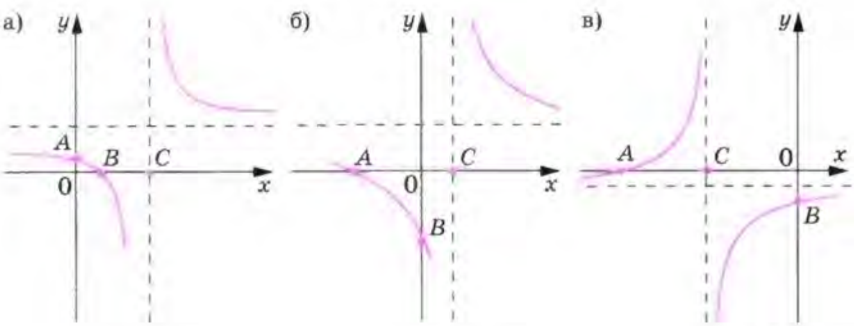
408. а) $\dfrac{x^2-4}{(x^2-3x+2)(x^2-2x-3)}=0;$ в) $\dfrac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2-1)}=0;$

б) $\dfrac{x^2-7x+6}{x^3-2x^2+1}=0;$ г) $\dfrac{2x^2-2}{(x^2-2x+2)^2}=0.$

409. а) $\dfrac{x^2}{x+4}=\dfrac{x}{x+1};$ в) $\dfrac{x^2}{x^2+4}-\dfrac{1}{x^2-2}=0;$

б) $\dfrac{x^3+3}{x}=3x+1;$ г) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x^2}{2x-9}=0.$

410. На рисунке 3.7, *а—в* изображены гиперболы (пунктиром проведены прямые, к которым гипербола неограниченно приближается, но не пересекает их) и указаны соответствующие формулы. В каждом случае определите координаты точек A, B и C.



$y=\dfrac{2x-1}{x-2}$ $y=\dfrac{2x+6}{x-1}$ $y=-\dfrac{0{,}5x+2}{x+2}$

Рис. 3.7

411. Функции заданы формулами:

$$y=\frac{1}{x^2+1};\ y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1};\ y=\frac{x^2}{x^2+1};\ y=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

Для каждой функции определите, пересекает ли ее график ось x, и если пересекает, то в каких точках.

412. Для заданного выражения определите:
1) существуют ли такие значения переменной, при которых значение выражения равно 0;

2) при каких значениях переменной выражение имеет смысл:

а) $\dfrac{y+\dfrac{1}{y-1}}{1-\dfrac{1}{y+1}}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c+1}}{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c-1}}$; в) $\dfrac{x}{x+\dfrac{2}{1+\dfrac{x+2}{x-1}}}$.

413. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{4}{(x-4)(x-2)}$; г) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{13}{x^2+x-2}$;

б) $\dfrac{x+2}{x-5}-\dfrac{3x}{(x-2)(x-5)}=\dfrac{2}{x-2}$; д) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{6}{x^2+x-2}$;

в) $\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{4}{(x-1)(x-3)}$; е) $\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{6}{x^2-3x-4}=\dfrac{x-1}{x-4}$.

Решите уравнение, используя подходящую подстановку **(414—415)**:

414. а) $\dfrac{15}{x^2+x+1}=2(x^2+x)+1$;

б) $\dfrac{1}{x^2-3x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x-2}=\dfrac{5}{x^2-3x+2}$;

в) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(2+\dfrac{1}{x}\right)+11=0$.

415. а) $x^2-3+\dfrac{1}{x^2-3}=2$; б) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{5}{2}$; в) $\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{3x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

3.4 Решение задач

Задача. Прогулочный катер «Ракета» спустился по течению реки на 60 км и после получасовой стоянки вернулся обратно. На все путешествие он затратил 5 часов. Чему равна скорость течения реки, если в стоячей воде катер развивает скорость 27 км/ч?

Решение.

Пусть скорость течения реки x км/ч. Тогда:

$27+x$ км/ч — скорость катера по течению;

$27-x$ км/ч — скорость катера против течения;

$\dfrac{60}{27+x}$ ч — время, затраченное на путь по течению;

$\dfrac{60}{27-x}$ ч — время, затраченное на путь против течения.

Так как стоянка заняла $\frac{1}{2}$ ч, то «чистое» время движения составило $4\frac{1}{2}$ ч. Получаем уравнение

$$\frac{60}{27+x}+\frac{60}{27-x}=\frac{9}{2}.$$

Решим его:

$$\frac{20}{27+x}+\frac{20}{27-x}=\frac{3}{2},$$

$$40(27-x)+40(27+x)=3(27-x)(27+x),$$

$$40\cdot 27-40x+40\cdot 27+40x=3(27^2-x^2),$$

$$80\cdot 27=3\cdot 27^2-3x^2,$$

$$80\cdot 9=27^2-x^2,$$

$$x^2=27^2-80\cdot 9.$$

Получим

$$x^2=9,$$

$$x_1=3,\ x_2=-3.$$

Каждое из найденных чисел является корнем исходного уравнения, однако отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи (скорость течения реки не может быть отрицательной).

Ответ. Скорость течения реки равна 3 км/ч.

A

416. а) Иван проехал на велосипеде 24 км. На автомобиле за это же время при скорости, на 30 км/ч большей, он проехал бы 84 км. С какой скоростью ехал Иван на велосипеде? За какое время он проехал это расстояние?

б) За одно и то же время пешеход прошел 16 км, а велосипедист проехал 40 км. Скорость велосипедиста была больше скорости пешехода на 6 км/ч. Поставьте возможные вопросы к задаче и ответьте на них.

417. а) Лодка проплыла 18 км по течению реки и за такое же время 10 км против течения реки. Скорость течения реки 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и время движения лодки вниз по реке.

б) Катер проплыл 33 км вниз по течению реки, а затем такое же время плыл против течения, пройдя при этом 27 км. В стоячей воде катер плывет со скоростью 20 км/ч. Сколько времени длилось путешествие?

418. а) Для класса купили несколько пачек тетрадей и столько же пачек блокнотов. Тетрадей в каждой пачке на 6 больше, чем блокнотов. Всего было куплено 120 тетрадей и 90 блокнотов. Сколько тетрадей в каждой пачке? Что еще можно узнать, используя полученные данные?

б) Упаковали несколько посылок, распределив между ними поровну 48 книг и 120 журналов. Сколько получилось посылок, если в каждой из них книг на 6 меньше, чем журналов?

419. а) Велосипедист проехал 7 км по шоссе и 5 км по проселочной дороге, затратив на весь путь 1 ч. По проселку он ехал со скоростью, на 4 км/ч меньшей, чем по шоссе. С какой скоростью велосипедист ехал по шоссе? Что еще можно узнать, используя полученные данные?

б) Улитка проползла по вертикальной стене 6 м вверх и спустилась на 5 м вниз, затратив на весь путь 14 ч. Ее скорость при подъеме была на 2 м/ч меньше, чем при спуске. Сколько времени улитка ползла по стене вверх и сколько вниз?

420. а) Катер спустился по течению реки, пройдя 28 км, и тотчас вернулся назад, затратив на весь путь 7 ч. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч? Что еще можно узнать, используя полученные данные?

б) Расстояние между двумя причалами по реке равно 12 км. Лодка проходит этот путь в два конца за 2 ч. Скорость течения реки 2,5 км/ч. Определите, какое время занимает у лодки путь по течению реки.

421. Составьте разные уравнения по условию задачи:
Премиальный фонд в 72 000 р. решено было распределить в конце года между сотрудниками отдела поровну. В течение года 6 человек ушли из отдела, поэтому каждый получил на 1000 р. больше, чем предполагалось. Сколько сотрудников было в отделе первоначально и сколько стало к концу года?

422. (*Задание с выбором ответа.*)
Расстояние между городами 600 км. Автомобиль проходит это расстояние со скоростью, на 20 км/ч большей, чем автобус, и тратит на дорогу на $1\frac{1}{2}$ ч меньше. С какой скоростью движется автомобиль?

Какое уравнение соответствует условию задачи, если буквой x обозначена скорость движения автомобиля (в км/ч)?

А. $\frac{600}{x} - \frac{600}{x-20} = \frac{3}{2}$. **В.** $\frac{600}{x-20} - \frac{600}{x} = \frac{3}{2}$.

Б. $\frac{600}{x} - \frac{600}{x+20} = \frac{3}{2}$. **Г.** $\frac{600}{x+20} - \frac{600}{x} = \frac{3}{2}$.

Ответьте на вопрос задачи, решив уравнение (**423—425**):

423. а) Книгу в 30 страниц Катя может прочитать на 15 мин быстрее Оли. Скорость чтения Кати в 1,5 раза больше скорости, с которой читает Оля. Сколько страниц в час читает каждая девочка?

б) Расстояние от дома до школы равно 1200 м. Таня проходит это расстояние на 5 мин быстрее, чем ее младший брат, так как ее скорость на 20 м/мин больше скорости брата. Сколько минут идет от дома до школы Таня и сколько ее брат?

424. а) Несколько человек договорились оплатить экскурсию, разделив ее стоимость, 720 р., поровну. Однако в назначенный день на экскурсию пришли на 3 человека меньше, поэтому каждому пришлось заплатить на 40 р. больше, чем предполагалось. Сколько человек участвовало в экскурсии?

б) Одна поездка на автобусе в город и обратно обходится Диме на 30 р. дороже, чем на электричке. У Димы есть 900 р., которые он может потратить на дорогу. Он подсчитал, что, пользуясь электричкой, он может сделать на 1 поездку больше, чем пользуясь автобусом. Найдите стоимость поездки в город и обратно на электричке.

425. а) Дорога от поселка Аникеевка до поселка Баковка состоит из двух участков: 6 км подъема и 5 км спуска. Велосипедист доехал от Аникеевки до Баковки за 1 ч. Его скорость при подъеме на 12 км/ч меньше, чем при спуске. Найдите скорость велосипедиста при подъеме и при спуске.

б) Пешеход прошел путь от Баковки до Аникеевки (см. задачу а) за 2 ч 40 мин. Его скорость при спуске на 3 км/ч больше, чем при подъеме. За какое время пешеход пройдет обратный путь?

Указание. Обозначьте буквой x скорость пешехода (в км/ч) на одном из участков пути.

Б

426. Чтобы проехать 36 км по проселочной дороге и 9 км по шоссе, велосипедисту потребуется на 1 ч больше, чем если бы он ехал все это расстояние по шоссе. Скорость велосипедиста по шоссе на 6 км/ч больше его скорости по проселочной дороге. Найдите скорость велосипедиста по шоссе.

427. Из города в поселок, расстояние до которого 40 км, одновременно выехали автобус и автомобиль. Скорость автомобиля на 30 км/ч больше скорости автобуса, а поэтому он пришел в поселок на 40 мин раньше автобуса. Какова скорость автобуса?

428. Из города A в город B, расстояние между которыми 140 км, выехал поезд. В середине пути он был задержан на 24 мин, но, увеличив скорость на 20 км/ч, прибыл в город B без опоздания. Найдите первоначальную скорость поезда.

429. Товарный поезд был задержан в пути на 21 мин, но на перегоне длиной 70 км он наверстал время, увеличив скорость на 10 км/ч. Найдите скорость поезда в начале пути и на перегоне.

430. Фирма получила заказ сшить к определенному сроку 60 костюмов. Подсчитав, каким должен быть ежедневный объем работы, мастер решил, что мастерская может шить на один костюм в день больше. В этом случае вся работа будет закончена на 3 дня раньше срока. За сколько дней требовалось выполнить заказ?

431. Прогулочный маршрут на лодках включал движение по течению реки на расстояние 10 км и против течения реки на расстояние 6 км. Скорость течения реки 1 км/ч. Какой должна быть собственная скорость лодки, чтобы поездка заняла 2 ч, включая 15-минутную стоянку?

432. Расстояние между городами A и B по железной дороге равно 80 км, а по водному пути 100 км. Из города A выходит теплоход, скорость которого на 30 км/ч меньше скорости поезда. Поезд выходит из города A на 1 ч 30 мин позже и прибывает в город B на 30 мин раньше теплохода. Найдите скорость теплохода.

433. Сергей, работая в фирме «Книга — почтой», получил задание упаковать за определенное время 60 бандеролей. В течение первых 2 ч он упаковывал на 2 бандероли в час меньше, чем предполагалось по норме, а затем стал упаковывать на 4 бандероли в час больше нормы. В результате уже за час до срока ему оставалось упаковать 2 бандероли. На какое время было рассчитано задание?

434. На первые и вторые премии в конкурсе студенческих дипломных работ было выделено 15 000 р., причем 40% этих денег пошло на первые премии. Вторых премий было выдано на 4 больше, чем первых. Сколько студентов получили первые премии и сколько вторые, если известно, что вторая премия составила 50% первой?

435. Заказ на пошив сумок был распределен между мастером и его учеником. Мастер выполнил 75% заказа, сшив 90 сумок. Количество сумок, которое шил в день ученик, составило 30% количества сумок, изготовляемых в день мастером, и он работал на один день дольше мастера. Сколько сумок в день шил мастер и сколько ученик?

436. Разберите, как составлено уравнение по условию задачи, и доведите решение задачи до конца.

Задача. Электротехник и его ученик вместе выполнили работу за 8 ч. За сколько часов эту работу мог бы выполнить электротехник, работая один, если известно, что его ученик работает в 2 раза медленнее?

Решение.
Пусть электротехник может выполнить работу за x ч. Тогда $2x$ ч — время, за которое выполнит работу ученик;

$\frac{1}{x}$ — такую часть работы выполняет электротехник за 1 ч;

$\frac{1}{2x}$ — такую часть работы выполняет ученик за 1 ч;

$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}$ — часть работы, которую выполняют за 1 ч электротехник и ученик, работая вместе.
За 8 ч, работая вместе, они выполнили всю работу, поэтому

$$8\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\right)=1.$$

437. Коля и Миша, работая вместе, выполнили сортировку газет за 4 мин. Коля может выполнить это задание на 6 мин быстрее Миши. За сколько минут Коля выполнит это задание, работая один?

438. Для ремонта участка дороги выделили две бригады, одна из которых могла бы выполнить весь ремонт на 7 дней быстрее другой. Работу начали одновременно с двух концов участка и через 9 дней выполнили 75% всей работы. Сколько дней потребовалось бы каждой бригаде на выполнение ремонта всей дороги?

439. Причалы A и B расположены на разных берегах озера. Катер отошел от причала A в направлении причала B. Через 12 мин навстречу ему от причала B отошел теплоход и встретил катер через 20 мин после своего выхода. За какое время катер проходит расстояние между причалами, если известно, что ему требуется на это на 12 мин меньше, чем теплоходу?

3.5 Системы уравнений с двумя переменными

Рассматривая уравнения с двумя переменными и их системы, мы, кроме алгебраического языка, широко используем и геометрический. В его основе — *графики уравнений*. Посмотрите на таблицу

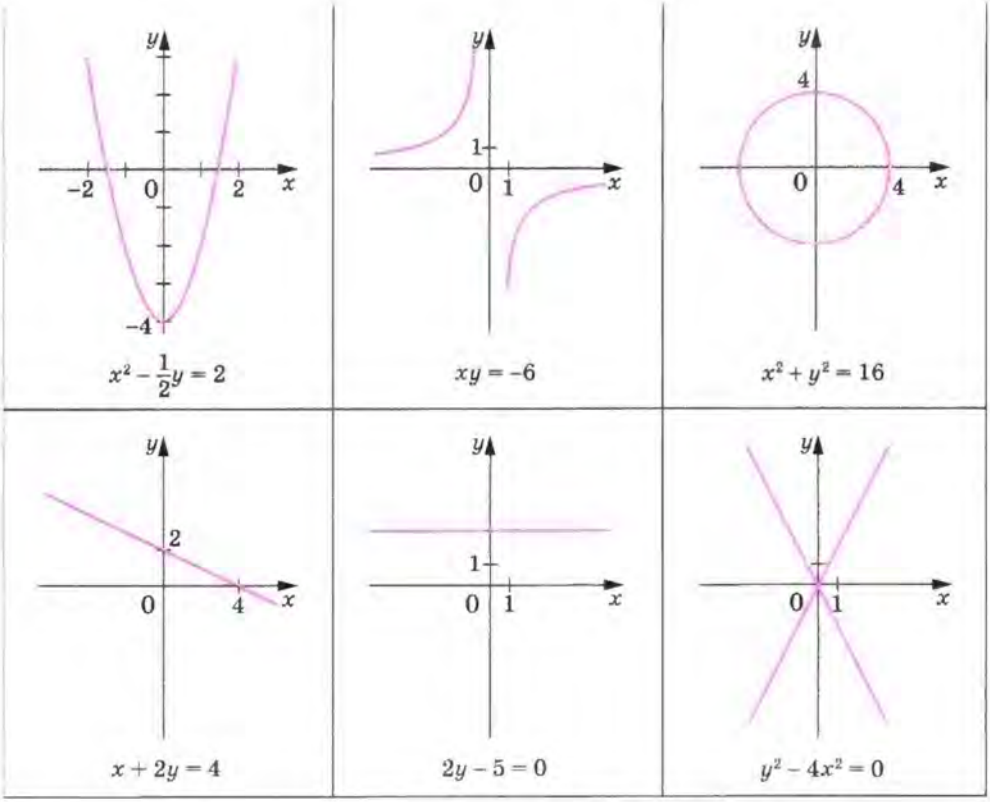


Рис. 3.8

(рис. 3.8), в которой изображены некоторые известные вам графики и записаны их уравнения.

График уравнения $x^2 - \frac{1}{2}y = 2$ — парабола. В этом легко убедиться, если выразить переменную y через переменную x. Получится уравнение знакомого вида $y = 2x^2 - 4$.

Графиком уравнения $xy = -6$ (т. е. уравнения $y = -\frac{6}{x}$) служит гипербола.

Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 16$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4.

Графики линейных уравнений $x + 2y = 4$ и $2y - 5 = 0$ — прямые. А графиком уравнения $y^2 - 4x^2 = 0$ является объединение двух прямых $y = 2x$ и $y = -2x$. В самом деле, разложив левую часть уравнения на множители, получим $(y - 2x)(y + 2x) = 0$. Отсюда ясно, что это уравнение распадается на два: 1) $y - 2x = 0$; 2) $y + 2x = 0$. Из первого получаем $y = 2x$, а из второго — $y = -2x$.

Вам уже приходилось использовать графики для исследования вопроса о числе решений системы линейных уравнений с двумя переменными. Если прямые — графики уравнений системы — пересекаются, то система имеет единственное решение, если они параллельны, то система не имеет решений, а если они совпадают, то система имеет бесчисленное множество решений. Точно так же можно использовать графические соображения для определения числа решений системы уравнений и в других случаях, когда система содержит уравнения, не являющиеся линейными. Каждая точка пересечения графиков дает нам пару чисел — решение системы. Сколько у графиков общих точек — столько решений имеет система.

Приведем примеры.

■ Пример 1. Выясним, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ xy = 4. \end{cases}$

График первого уравнения — окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 3. График второго уравнения — гипербола; ее ветви расположены в I и III координатных четвертях.

Построим окружность и гиперболу в одной системе координат (рис. 3.9). Мы видим, что графики пересекаются в четырех точках

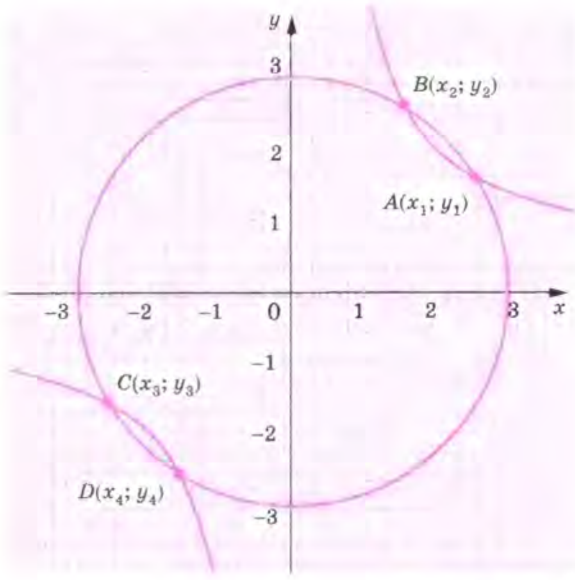


Рис. 3.9

(они обозначены буквами A, B, C и D). Следовательно, данная система имеет четыре решения.

С помощью рисунка можно приближенно определить координаты точек пересечения графиков, т. е. найти четыре пары чисел, являющиеся решениями системы. Получим

$$\begin{cases} x_1 \approx 2{,}6 \\ y_1 \approx 1{,}6; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \approx 1{,}6 \\ y_2 \approx 2{,}6; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \approx -2{,}6 \\ y_3 \approx -1{,}6; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 \approx -1{,}6 \\ y_4 \approx -2{,}6. \end{cases}$$

Вы, конечно, обратили внимание на симметрию найденных решений. Она является следствием геометрической симметрии. Точки A и C, а также точки B и D симметричны относительно начала координат, и поэтому их координаты — противоположные числа. Точки A и B, а также точки C и D симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов, поэтому их координаты «меняются местами».

■ Пример 2. Выясним, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 2y + 4x = x^2 \\ y - x = 8. \end{cases}$

Выразив в каждом случае переменную y через переменную x, получим систему

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x \\ y = x + 8. \end{cases}$$

График первого уравнения — парабола, график второго — прямая (рис. 3.10). На чертеже мы видим одну точку пересечения графиков (она обозначена буквой M). Однако графики должны пересечься еще в одной точке, которая просто не поместилась на рисунке.

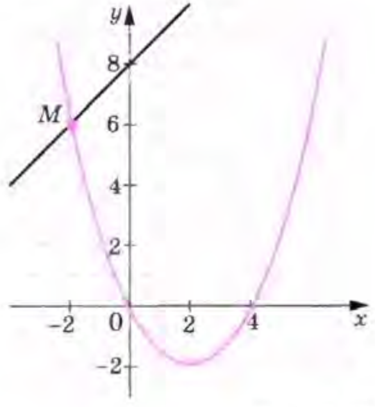


Рис. 3.10

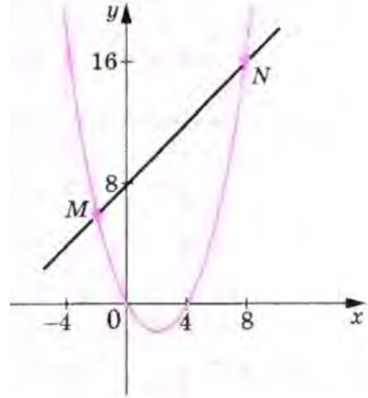


Рис. 3.11

В самом деле, линейная функция возрастает равномерно, а квадратичная функция на промежутке $[2; +\infty)$ растет все быстрее и быстрее, и парабола становится все более крутой. Поэтому парабола обязательно «догонит» прямую, и у графиков окажется еще одна общая точка. На рисунке 3.11 графики построены в другом масштабе, и вы можете видеть обе точки пересечения. Таким образом, данная система имеет два решения.

Вам известны два алгебраических способа решения систем уравнений: *способ сложения* и *способ подстановки*. Решая системы двух линейных уравнений, вы могли воспользоваться любым из них. Рассмотрим теперь примеры решения более сложных систем, в которых только одно уравнение линейное или вообще линейных уравнений нет.

■ Пример 3. Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 + xy = -6. \end{cases}$

Воспользовавшись линейным уравнением, выразим переменную y через x:

$$y = 1 - 2x.$$

Подставим во второе уравнение вместо y выражение $1 - 2x$:

$$x^2 + x(1 - 2x) = -6.$$

Теперь имеем уравнение с одной переменной x. Упростив его, получим квадратное уравнение

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Решив его, найдем, что $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Значения y, соответствующие найденным значениям x, удобно вычислить по формуле $y = 1 - 2x$:

$$y_1 = 1 - 2 \cdot (-2) = 5,\ y_2 = 1 - 2 \cdot 3 = -5.$$

Таким образом, система имеет два решения: $(-2; 5)$ и $(3; -5)$.

Система, которую мы только что решили, содержит одно уравнение *первой степени* (обычно мы его называем линейным) и одно уравнение *второй степени*. Уравнение с двумя переменными первой степени в общем виде записывается так: $ax + by = c$ (хотя бы один из коэффициентов a и b должен быть отличен от нуля). А уравнение с двумя переменными второй степени в общем виде записывается следующим образом: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (коэффициенты a, b и c одновременно нулю равняться не могут).

Систему двух уравнений с двумя переменными, которая содержит одно уравнение первой степени и одно уравнение второй степени, всегда можно решить способом подстановки. Для этого из уравнения первой степени выражают одну переменную через другую и подставляют найденное выражение во второе уравнение системы.

Что касается решения системы двух уравнений с двумя переменными, каждое из которых второй степени, то, вообще говоря, это очень трудная задача. Но в некоторых частных случаях возможны простые решения. Так, систему уравнений, рассмотренную в следующем примере, можно решить разными способами, в частности способом подстановки.

■ Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3. \end{cases}$$

Выразив из уравнения $xy = -3$ переменную y через x, получим $y = -\frac{3}{x}$. Подставив выражение $-\frac{3}{x}$ вместо y в другое уравнение, придем к уравнению с одной переменной:

$$x^2 + \left(-\frac{3}{x}\right)^2 = 10.$$

После упрощения получим уравнение

$$x^2 + \frac{9}{x^2} = 10,$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Уравнение $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ имеет корни:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1.$$

Соответствующие значения y легко найти по формуле $y = -\frac{3}{x}$.

Итак, система имеет четыре решения:

$$(3; -1), \quad (-3; 1), \quad (1; -3), \quad (-1; 3).$$

С другими способами решения этой системы вы можете познакомиться, прочитав пункт из рубрики «*Для тех, кому интересно*».

Вы знаете, что системы уравнений служат математическим аппаратом при решении многих задач. Вам уже приходилось решать с помощью систем задачи на координатной плоскости: например, находить точки пересечения параболы и прямой, составлять уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Рассмотрим еще одну задачу такого рода.

■ Пример 5. На рисунке 3.12 изображена парабола, которая проходит через точки $K(0; -2)$, $L(6; 0)$ и $M(3; -4)$. Зададим эту параболу уравнением.

Уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. И задача сводится к тому, чтобы найти коэффициенты a, b и c.

Координаты точек K, L и M должны удовлетворять уравнению параболы. Подставив последовательно эти координаты в уравнение $y = ax^2 + bx + c$, получим систему трех уравнений с переменными a, b и c:

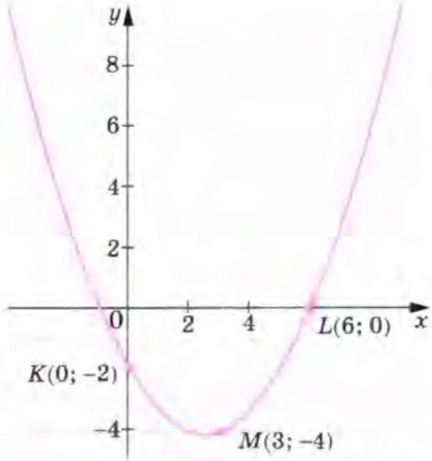


Рис. 3.12

$$\begin{cases} -2 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \\ 0 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c \\ -4 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c, \end{cases} \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} c = -2 \\ 36a + 6b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = -4. \end{cases}$$

Решим эту систему. Значение c нам уже известно. Подставив во второе и третье уравнения системы вместо c число -2, получим систему с двумя переменными a и b:

$$\begin{cases} 36a + 6b = 2 \\ 9a + 3b = -2. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем, что $a = \frac{1}{3}$ и $b = -\frac{5}{3}$. Таким образом, парабола, которая проходит через точки K, L и M (см. рис. 3.12), задается уравнением $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x - 2$.

A

440. Среди данных уравнений найдите уравнения параболы, гиперболы, окружности, прямой:

1) $x^2 - \frac{1}{3}y = 2$; 2) $xy = -4$; 3) $y + 2x = 6$; 4) $4 - 2xy = 0$;

5) $x^2 + y^2 = 25$; 6) $x^2 - x - y = 0$; 7) $3y - 6 = 0$; 8) $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Постройте график каждого уравнения.

441. Система двух линейных уравнений с двумя переменными может иметь одно решение, не иметь решений, иметь бесконечно много решений. Пользуясь рисунком 3.13, *а—в*, запишите

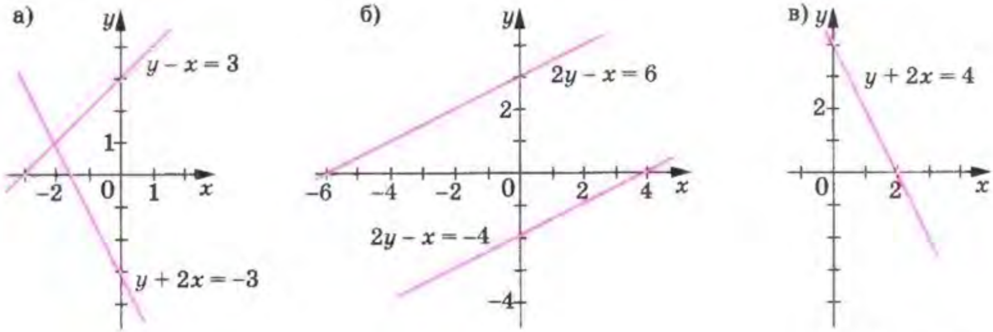


Рис. 3.13

систему, соответствующую каждому из этих случаев. Решите каждую систему алгебраически.

442. Решите систему уравнений графически, пользуясь рисунком 3.14. Проверьте свой ответ, выполнив подстановку:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 8 \\ y + x = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 12 \\ y + 6 = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6. \end{cases}$

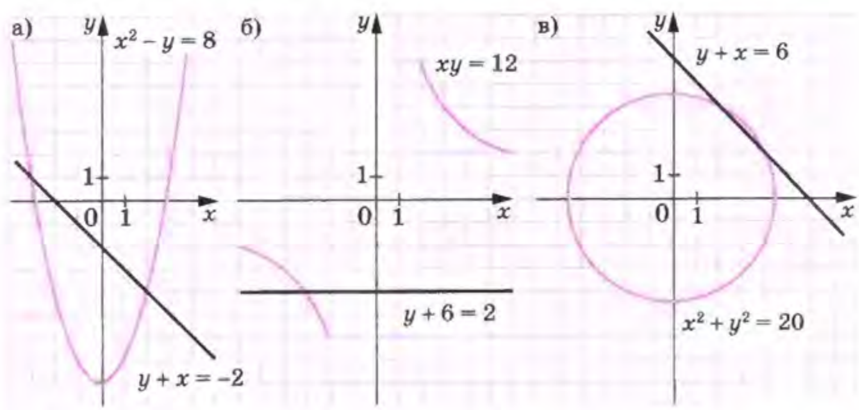


Рис. 3.14

443. Пользуясь рисунком 3.15, составьте систему уравнений: а) имеющую два решения; б) имеющую одно решение; в) не имеющую решений.

444. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + x^2 = 4 \\ y - x = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y - x = 0 \\ y = 4x - x^2. \end{cases}$

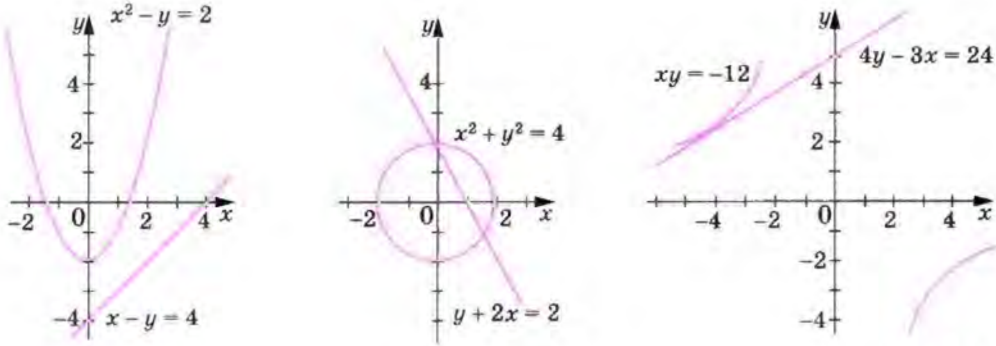


Рис. 3.15

Решите систему уравнений (**445—449**):

445. а) $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - y = -5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x+z}{2} = 1 \\ x - z = 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} t - 5s = 0 \\ 2t - s = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3m - 4n = 20 \\ m + 2n = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ 4x + 3y = -27; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{2} = \dfrac{1}{2} \\ 2y + 3z = 1. \end{cases}$

446. а) $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3x - y = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2s^2 - t = 2 \\ s + 2t = 14; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 6z + 2y = 12 \\ 2z^2 - 3y = -7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} u + v^2 = -3 \\ u - 5v = -3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - z = 3 \\ 4x^2 - 2z = 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2y + x = -2 \\ 2y^2 - 3x = 6. \end{cases}$

447. а) $\begin{cases} x + y = -11 \\ xy = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xz = -14 \\ x - z = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} u + v = 12 \\ 2uv = 70. \end{cases}$

448. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 101 \\ x + y = 11; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + 2xy = 40; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x^2 - y^2 = 15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - xy = 10 \\ 3x + y = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 64 \\ 3x + 5y = 0. \end{cases}$

449. а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy = 4 \\ x - y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2x - 2y = -4. \end{cases}$

450. Изобразите схематически графики заданных функций и определите, пересекаются ли они. Если да, то вычислите координаты точек пересечения этих графиков.

а) $y = 2x - 4$ и $y = \dfrac{6}{x}$; б) $y = \dfrac{6}{x}$ и $y = -2x$.

451. Вычислите координаты точек пересечения параболы и прямой:

а) $y = x^2 - 5x$ и $y = x - 8$;

б) $y = 2x - 6$ и $y = x^2 - 5$;

в) $y = x^2 - 3x - 10$ и $y = 2x + 4$;

г) $y = 10x + 1$ и $y = x^2 + 4x + 10$.

Б

452. Постройте график уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 0$;

б) $4x^2 = y^2$;

в) $xy = 0$;

г) $(x - y)(2x - y) = 0$;

д) $(x - y + 1)(x + y - 1) = 0$;

е) $(x - 1)(y - 1) = 0$.

453. С помощью графиков определите, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x - 2y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y + \sqrt{x} = 0 \\ y + x + 1 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = |x| \\ y = x^2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x| + y = 0 \\ x^2 - y = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xy = 8 \\ y - x^3 = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} xy = -1 \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

454. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y + 2 = 0 \\ xy + 4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y - 2 = 0 \\ x^3 - y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 2x + y = 0 \\ \sqrt{x} - y = 0. \end{cases}$

455. С помощью графиков определите, сколько решений имеет система уравнений. Укажите приближенно ее решения.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + 2x = 2 - y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y + 5 = 2x^2 - 4x. \end{cases}$

456. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 10y^2 - 4x = x^2 - 8y \\ 3y - x = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - xy - 2y^2 = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y + x = -2 \\ x^2 + 3y^2 = 9 - xy; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 - 5xy = 64 - 10y \\ 4y + x = 10; \end{cases}$

е) $\begin{cases} y + 2x = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2y = x^2 - 4x \\ 4y = 3x - 9; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 3x^2 + 2x = 3y \\ 6y = 30 + 12x. \end{cases}$

Указание. В качестве образца воспользуйтесь примером 3.

457. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = -10. \end{cases}$

Указание. В качестве образца воспользуйтесь примером 4.

458. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - x = 9 \\ \dfrac{10}{y} - \dfrac{4}{x} = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{10}{y+2} = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 1 \\ 3x - y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ \dfrac{6}{x+1} - \dfrac{4}{y+3} = 3. \end{cases}$

459. 1) Разберите, как решается система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Решение.
Представим левую часть первого уравнения в виде дроби:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{2} \\ x + y = 9; \end{cases}$$

подставим в первое уравнение системы значение $x + y$:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{xy} = \dfrac{1}{2} \\ x + y = 9; \end{cases}$$

преобразуем первое уравнение с помощью основного свойства пропорции:

$$\begin{cases} xy = 18 \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Теперь можно воспользоваться способом подстановки.
Доведите решение системы до конца.

2) Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 20 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{15}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ xy = -2. \end{cases}$

460. Вернитесь к упражнению **449** и решите системы, сведя их к более простым. (Указание. Воспользуйтесь тем, что левые части уравнений можно разложить на множители.)

461. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 4(x - y) \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3(x - y) = x + y \\ \dfrac{x^2 - y^2}{3} = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 2y = x + y \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 10 \\ 2(x + y) = 5(x - y). \end{cases}$

Указание. а) Введите замену $x + y = a$; $x - y = b$.

462. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{3}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{8}{x + y} + \dfrac{4}{x - y} = 3 \\ \dfrac{2}{x + y} - \dfrac{4}{x - y} = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{15} \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{6}{x + y} + \dfrac{1}{x - y} = 1 \\ \dfrac{9}{x + y} - \dfrac{6}{x - y} = -1. \end{cases}$

Указание. Сведите каждое уравнение к линейному с помощью подходящей замены.

463. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy + x^2 = 1 \\ xy - x^2 = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy - y = 1 \\ xy + x = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + xy = -6 \\ x + y - xy = 10. \end{cases}$

Указание. Воспользуйтесь методом сложения.

464. На параболе отмечены три точки $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$ и $C(3;\ 10)$. Задайте эту параболу уравнением и постройте ее.

465. На параболе отмечены три точки $A(0;\ 3)$, $B(-1;\ 0)$ и $C(1;\ 4)$.
1) Определите, проходит ли эта парабола через точку $M(4;\ -5)$; точку $N(-4;\ -5)$.
2) Запишите уравнение прямой, которая пересекает параболу в точках B и C.

466. (*Задача-исследование.*)

1) Система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + b, \end{cases}$ где b — произвольное число, может иметь одно, два, три или четыре решения, а также может не иметь решений. Проиллюстрируйте каждый случай

графически. Запишите конкретную систему, соответствующую каждому случаю.

2) Сколько решений может иметь указанная система, если известно, что:

а) b — произвольное положительное число;

б) b — произвольное отрицательное число?

3.6 Решение задач

Задача. Участок земли прямоугольной формы площадью 6 соток огорожен забором, длина которого 100 м. Найдите длины сторон этого участка.

Решение. Пусть одна сторона участка равна x м, а другая — y м. Так как площадь участка равна 600 м^2, то $xy = 600$. Периметр участка равен 100 м, поэтому $x + y = 50$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 600 \\ x + y = 50. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы найдем, что $y = 50 - x$. Подставив выражение для y в первое уравнение, получим

$$(50 - x)x = 600, \text{ т. е.}$$

$$x^2 - 50x + 600 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем, что $x_1 = 30$, $x_2 = 20$. Соответствующие значения y найдем по формуле $y = 50 - x$: $y_1 = 20$, $y_2 = 30$.

Таким образом, система имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 30 \\ y_1 = 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 20 \\ y_2 = 30. \end{cases}$$

Однако найденные значения x и y задают равные прямоугольники. Поэтому ответ у задачи только один: стороны участка равны 30 м и 20 м.

А

467. Существуют ли два числа, таких, что:

а) их сумма равна 10, а произведение равно -24;

б) их разность равна 2, а произведение равно -4?

468. а) Стройплощадка имеет форму прямоугольника. Длина ограждения вокруг стройплощадки 120 м, а ее площадь равна 800 м^2. Найдите стороны стройплощадки.

б) Сад заложен на участке прямоугольной формы. Площадь участка равна 700 м^2, а одна из его сторон на 15 м длиннее другой. Найдите стороны участка.

469. Имеется 84 фишки. Можно ли выложить их на столе одинаковыми рядами так, чтобы:
а) рядов было на 3 меньше, чем фишек в каждом ряду;
б) рядов было на 5 больше, чем фишек в каждом ряду?

470. а) Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, его гипотенуза равна 10 см. Найдите катеты этого треугольника.
б) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из его катетов больше другого на 17 см. Найдите катеты этого треугольника.

471. а) Периметр прямоугольника 14 см, а длина его диагонали 5 см. Найдите стороны прямоугольника.
б) Одна из сторон прямоугольника на 2 см короче другой, а его диагональ равна 10 см. Найдите стороны прямоугольника.

472. а) Начертите план участка прямоугольной формы, в котором отрезок AB (рис. 3.16) — это дорожка, идущая по диагонали участка. Длина дорожки 13 м, а периметр участка равен 34 м. Сколько решений имеет задача?

Рис. 3.16

Рис. 3.17

б) На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность (рис. 3.17). Ее радиус равен 10 см. Постройте на полуокружности точку C, такую, чтобы расстояние от этой точки до одного из концов диаметра было на 4 см больше, чем до другого. Сколько решений имеет задача?

Б

473. В аудитории расставили одинаковыми рядами 84 стула. Затем добавили 36 стульев и при этом сделали перестановку: в каждом ряду уменьшили число стульев на 2, но увеличили число рядов на 4. Сколько рядов и сколько стульев в каждом ряду было в аудитории первоначально?

474. Спортивная площадка прямоугольной формы занимает площадь, равную 600 м^2. Когда вокруг нее проложили дорожку шириной в 1 м, то площадка вместе с дорожкой стала занимать площадь 704 м^2. Найдите размеры площадки.

475. Площадь прямоугольного треугольника равна 30 см^2, а его гипотенуза равна 13 см. Найдите катеты треугольника.

476. Можно ли в круг радиуса 12,5 см вписать прямоугольник, площадь которого 168 см^2?

477. Решите задачу **437** из пункта 3.4, составив систему уравнений.

478. Два крана, открытые одновременно, могут наполнить водой детский надувной бассейн за 20 мин. Если сначала в течение 25 мин будет открыт только первый кран, а затем его закрыть и открыть второй, то через 16 мин бассейн наполнится. За сколько минут может наполнить бассейн каждый кран в отдельности?

479. Два ученика 9 класса вместе расчистили школьный каток за 20 мин. В следующий раз один из них расчистил $\frac{2}{3}$ площади катка, а после этого его сменил другой и закончил работу. При этом каток был расчищен за 40 мин. За какое время может расчистить каток каждый из школьников, работая отдельно?

480. Пароход прошел 100 км по течению реки и 64 км против течения за 9 ч. В другой раз за это же время он прошел 80 км против течения и вернулся обратно. Определите скорость парохода в стоячей воде и скорость течения.

481. Дорога от дома до школы состоит из двух участков: 300 м подъема и 600 м спуска. Дорога от дома до школы занимает у Дениса 16 мин, а обратная дорога — 17 мин. Определите скорость Дениса на подъеме и на спуске.

482. Расстояние между пунктами A и B равно 15 км. Два велосипедиста выехали из этих пунктов навстречу друг другу, встретились через 30 мин и, не останавливаясь, продолжили путь. Первый велосипедист прибыл в пункт B на 25 мин раньше, чем второй — в пункт A. Найдите скорость каждого велосипедиста.

483. Два катера вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 150 км. Через 1 ч 30 мин катера встретились и, не останавливаясь, продолжили путь с той же скоростью. Первый катер прибыл в пункт B

на 1 ч 15 мин позже, чем второй — в пункт A. Сколько времени был в пути каждый катер?

484. Соединили два раствора одной и той же кислоты разной концентрации и получили 10 кг нового раствора данной кислоты. Концентрация первого раствора (т. е. процентное содержание кислоты) на 10% больше концентрации второго раствора. Определите массу каждого раствора, если в первом содержалось 0,8 кг кислоты, а во втором — 0,6 кг. Определите процентное содержание кислоты в каждом растворе.

485. В одном куске сплава 6 кг меди, а в другом — 12 кг. Процентное содержание меди в первом сплаве на 40% меньше, чем во втором. Если эти два куска сплавить в один, то получится сплав, содержащий 36% меди. Определите процентное содержание меди в каждом из сплавов.

486. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда, если площадь его поверхности равна 148 см^2, а высота на 1 см меньше длины и на 2 см меньше ширины.

3.7 Графическое исследование уравнений

Пусть нужно решить уравнение $x^3 + x - 5 = 0$. «Лобовая» тактика здесь явно не подходит: мы не располагаем никакими формулами для решения уравнений третьей степени. Попытка разложить на множители левую часть уравнения также не приведет к успеху. Поэтому воспользуемся графиками.

Если бы мы смогли построить график функции $y = x^3 + x - 5$, то сумели бы найти и корни уравнения $x^3 + x - 5 = 0$ — это абсциссы точек пересечения графика с осью x. Однако строить графики функций подобного вида мы не умеем. Выход из положения связан с некоторым усложнением данного уравнения: перепишем его в виде $x^3 = 5 - x$. Это позволит нам воспользоваться графиками функций $y = x^3$ и $y = 5 - x$, которые легко построить.

На рисунке 3.18 графики функций $y = x^3$ и $y = 5 - x$ построены в одной системе координат. Они пересекаются в единственной точке. Абсцисса точки пересечения графиков — это то значение переменной x, при котором выражения x^3 и $5 - x$ принимают равные значения. Значит, эта абсцисса и есть корень уравнения $x^3 = 5 - x$. По рисунку видно, что корень находится в промежутке (1; 2) и приблизительно равен 1,5.

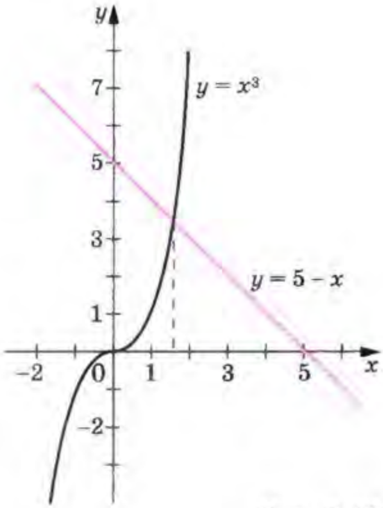


Рис. 3.18

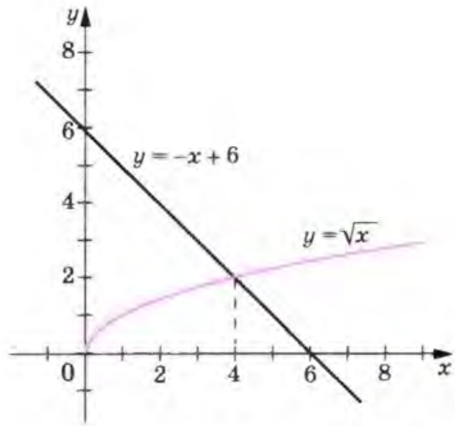


Рис. 3.19

Таким образом, решение уравнения $x^3 = 5 - x$ мы фактически свели к решению системы уравнений $y = x^3$ и $y = 5 - x$. Однако, найдя точку пересечения графиков, мы указали не обе ее координаты, как это было бы при решении системы, а только абсциссу. Итак,

для того, чтобы графическим способом найти корни уравнения $f(x) = g(x)$, нужно в одной и той же системе координат построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, отметить точки пересечения графиков и найти абсциссы этих точек; это и будут корни уравнения.

■ Пример 1. Решим уравнение $\sqrt{x} + x = 6$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{x} = -x + 6$ и построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -x + 6$ (рис. 3.19). Они пересекаются в единственной точке, абсцисса которой равна 4. Значит, корень уравнения — число 4.

Подставив $x = 4$ в уравнение, легко убедиться, что в данном случае найдено точное значение корня: $\sqrt{4} = -4 + 6$.

Иногда, для того чтобы сделать некоторые выводы о корнях уравнения, достаточно схематического рисунка.

■ Пример 2. Имеет ли корни уравнение $x^3 + x = 300$ и если имеет, то сколько?

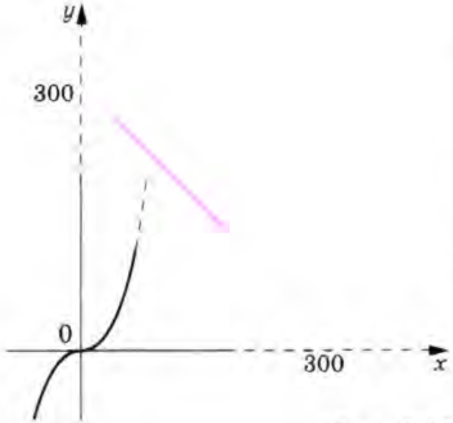


Рис. 3.20

Перепишем уравнение в виде $x^3 = 300 - x$. В тетради графики уравнений $y = x^3$ и $y = 300 - x$ в одном масштабе построить практически невозможно. Однако простой рисунок, показывающий взаимное расположение графиков, поможет нам ответить на вопрос (рис. 3.20).

По рисунку видно, что графики должны иметь точку пересечения в правой полуплоскости. В какой-то точке они встретятся. Значит, данное уравнение имеет по крайней мере один корень. Понятно, что этот корень — единственный. В самом деле, первая функция возрастающая, а вторая — убывающая, и, встретившись, их графики «продолжат движение» в своих направлениях, поэтому другой точки пересечения у них не будет.

Глядя на рисунок, мы можем сделать и другие заключения о корне уравнения. Например, что этот корень положительный, что он меньше 300.

С помощью графиков корни уравнения можно, как правило, найти лишь с невысокой точностью. Поэтому, если требуется бóльшая точность результата, найденное приближенное значение корня уточняют путем вычислений.

Вернемся к уравнению $x^3 = 5 - x$, рассмотренному в начале пункта. По рисунку видно, что корень принадлежит промежутку (1; 2). Этот промежуток можно указать более точно: (1,5; 2). Действительно, при $x = 1{,}5$ значение x^3 меньше, чем значение $5 - x$, а при $x = 2$ — больше. Значит, при $x = 1{,}5$ первый график находится ниже второго, а при $x = 2$ — выше.

Вычисляя и сравнивая значения левой и правой частей уравнения, можно все более точно находить промежуток, в котором находится корень: (1,5; 1,6), (1,51; 1,52) и т. д. Таким способом можно получать значения корня с любой точностью: $x \approx 1{,}5$; $x \approx 1{,}51$ и т. д.

Таким образом, графические соображения, а также использование свойств функций часто помогают сделать некоторые качественные заключения о корнях уравнения: проверить наличие корней, найти их число, указать промежутки, которым принадлежат корни.

А

487. Запишите уравнения вида $f(x) = 0$, графические решения которых приведены на рисунке 3.21, *а*, *б*. В каждом случае выясните, сколько корней имеет уравнение. Найдите эти корни. Есть ли среди найденных корней точные?

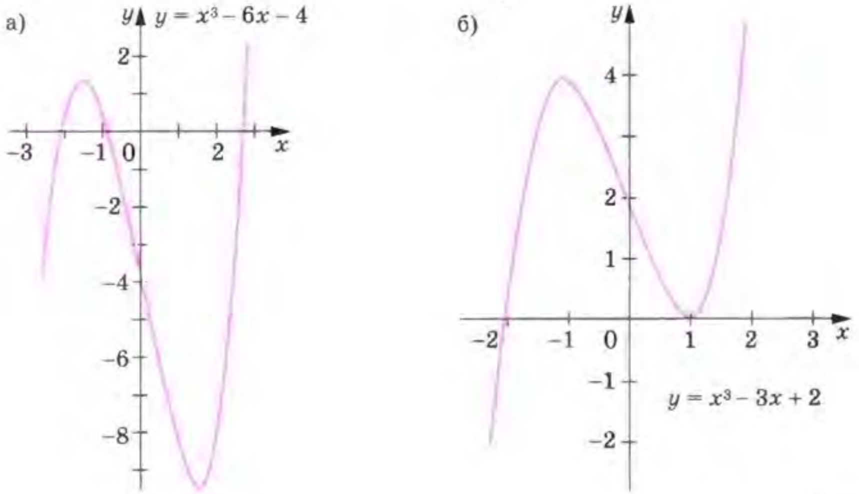


Рис. 3.21

488. Запишите уравнения, графические решения которых приведены на рисунке 3.22, *а*, *б*. В каждом случае найдите корни уравнения.

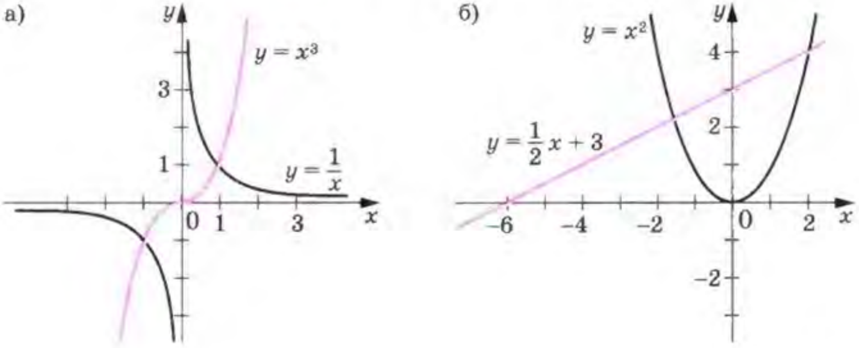


Рис. 3.22

489. Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2x - 6$ пересекаются в точке (4; 2). Найдите:

а) корень уравнения $\sqrt{x} = 2x - 6$;

б) решение системы уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2x - 6. \end{cases}$

490. С помощью графиков определите, сколько корней имеет уравнение, и найдите эти корни:

а) $x^2 = 1{,}5x + 1$; б) $x^3 + x - 2 = 0$; в) $x^2 + \frac{8}{x} - 1 = 0$.

491. Имеет ли уравнение корни и если имеет, то сколько? Укажите знаки корней:

а) $x^3 = \frac{6}{x}$; б) $x^3 = -\frac{1}{x}$; в) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$; г) $\sqrt{x} = 1 - x^2$.

492. С помощью графиков определите, сколько корней имеет уравнение; для каждого корня укажите два целых числа, между которыми он находится:

а) $\frac{1}{x} = x^2 - 4$; б) $x^3 - x - 9 = 0$.

Б

493. Найдите с помощью графиков приближенные значения корней уравнений:

$x^2 - x - 3 = 0$, $x^2 + 2x - 2 = 0$, $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$, $3 - x - 3x^2 = 0$.

Указание. Представьте каждое уравнение в виде $x^2 = ax + b$ и выполните задание, построив в системе координат одну параболу $y = x^2$ и несколько прямых. Воспользуйтесь миллиметровой бумагой.

494. Найдите подбором корень уравнения и, используя графические соображения, докажите, что других корней нет:

а) $\sqrt{x} = 12 - x$; б) $x^3 + x + 10 = 0$; в) $x^2 + 3 = \frac{4}{x}$.

495. (*Задание с выбором ответа.*) В каком промежутке находится корень уравнения $\sqrt{x} = 0{,}5x - 4$?

А. $(-\infty; 0]$. **Б.** $[0; 10]$. **В.** $[10; 20]$. **Г.** $[20; +\infty)$.

496. Выберите из данных промежутков те, которым принадлежит корень уравнения $x^3 = 4 - x^2$:

[1; 2], [1; 1,5], [1,5; 2], [1; 1,2], [1,2; 1,5].

497. Используя схематические графики, определите, сколько корней имеет уравнение; укажите два последовательных целых числа, между которыми находятся корни уравнения:

а) $\sqrt{x} = x - 500$; б) $\sqrt{x} = 100 - x^2$.

498. С помощью графиков определите количество корней уравнения $x^2 - 4x - \sqrt{x} + 4 = 0$. Найдите приближенное значение большего корня с двумя знаками после запятой.

3.8 Уравнения с параметром

(Для тех, кому интересно)

Когда говорят «уравнение с параметром», то это означает, что речь идет об уравнении, в котором есть буквенные коэффициенты. Так, в квадратном уравнении $x^2 - bx + 1 = 0$ буква b — параметр. Подставив вместо b какое-либо число, мы получим обычное квадратное уравнение с числовыми коэффициентами. Понятно, что b можно заменить любым числом, поэтому, в сущности, мы имеем дело с целым «семейством» квадратных уравнений. Исследуя уравнение с параметром, мы получаем информацию о всем бесконечном множестве «порождаемых» им уравнений.

Исследуем уравнение $x^2 - bx + 1 = 0$. Для этого найдем его дискриминант: $D = b^2 - 4$.

Выясним, при каких значениях b выполняются условия:

$$D = 0, \quad D > 0, \quad D < 0.$$

Получим:

$b^2 - 4 = 0$, если $b = -2$ или $b = 2$;

$b^2 - 4 > 0$, если $|b| > 2$, т. е. если $b < -2$ или $b > 2$;

$b^2 - 4 < 0$, если $|b| < 2$, т. е. если $-2 < b < 2$.

Значит, при $b = -2$ и $b = 2$ уравнение $x^2 - bx + 1 = 0$ имеет один корень. (Подставьте вместо b найденные значения параметра и, решив получившиеся уравнения, убедитесь, что каждое из них имеет единственный корень.)

При $b < -2$ и при $b > 2$ уравнение $x^2 - bx + 1 = 0$ имеет два корня. При $-2 < b < 2$ уравнение не имеет корней. (Запишите какое-нибудь конкретное уравнение для каждого из этих случаев и решите его.)

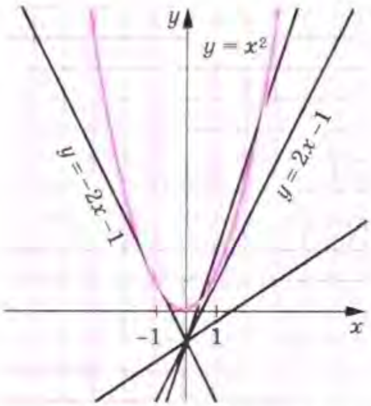


Рис. 3.23

Результат, который мы получили, можно проиллюстрировать с помощью графиков. Для этого представим уравнение $x^2 - bx + 1 = 0$ в виде $x^2 = bx - 1$ и построим графики уравнений $y = x^2$ и $y = bx - 1$.

График уравнения $y = x^2$ — это парабола, а уравнение $y = bx - 1$ задает пучок прямых, проходящих через точку $(0; -1)$. При $b = -2$ и $b = 2$ мы имеем прямые $y = 2x - 1$ и $y = -2x - 1$. Каждая из этих прямых имеет с параболой одну общую точку (рис. 3.23). При $|b| > 2$, т. е. при $b < -2$ и при $b > 2$, прямые идут более круто; каждая из них пересекает параболу в двух точках. При $-2 < b < 2$ прямые более пологие, они не имеют с параболой общих точек.

Задача исследования уравнения с параметром всегда предполагает рассмотрение нескольких случаев, ни один из которых нельзя «потерять». Важно также полно и точно ответить на вопрос, поставленный в задаче. Рассмотрим два примера.

■ Пример 1. Выясним, при каких значениях параметра a уравнение $(a + 2)x = a^2 + a - 2$ имеет корни и чему они равны. (Можно сказать иначе: решим уравнение $(a + 2)x = a^2 + a - 2$, где x — переменная, a — параметр.)

Подставляя вместо параметра a числа, мы будем получать разные уравнения, но все они окажутся линейными. Вы решали много линейных уравнений и встречали, например, такие, как $2x = 3$ или $0x = 5$, $0x = 0$. Чтобы найти корень уравнения $2x = 3$, нужно обе его части разделить на 2. Для уравнений $0x = 5$ и $0x = 0$ этот прием не годится, так как на нуль делить нельзя.

В рассматриваемом уравнении $(a + 2)x = a^2 + a - 2$ коэффициент при переменной x буквенный. Поэтому необходимо рассмотреть два случая:

$$a + 2 = 0 \quad \text{и} \quad a + 2 \neq 0.$$

1) Пусть $a + 2 = 0$, т. е. $a = -2$. Подставив $a = -2$ в уравнение $(a + 2)x = a^2 + a - 2$, получим уравнение $0x = 0$. Его корнем является любое число.

2) Пусть $a + 2 \neq 0$, т. е. $a \neq -2$. Как и при решении линейного уравнения с числовым коэффициентом, разделим обе части уравнения $(a + 2)x = a^2 + a - 2$ на коэффициент при x. Получим $x = \dfrac{a^2 + a - 2}{a + 2}$. Сократив дробь, найдем, что $x = a - 1$.

(Подставьте в уравнение вместо a какое-нибудь число, не равное -2, и решите соответствующее уравнение. Убедитесь, что получится тот же корень, что и по формуле $x = a - 1$.)

Таким образом, если $a = -2$, то корнем уравнения $(a + 2)x = a^2 + a - 2$ является любое число; если $a \neq -2$, то уравнение имеет единственный корень, равный $a - 1$.

■ Пример 2. Решим уравнение $ax^2 - 2(a - 1)x - 4 = 0$, где x — переменная.

Это уравнение кажется квадратным. Но на самом деле квадратным оно будет только при том условии, что коэффициент при x^2 отличен от нуля. Поэтому необходимо рассмотреть два случая: 1) $a = 0$; 2) $a \neq 0$.

1) Пусть $a = 0$. Подставим $a = 0$ в данное уравнение. Получим линейное уравнение $2x - 4 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = 2$.

2) Пусть $a \neq 0$. Теперь у нас уравнение квадратное. Оно имеет корни, если $D_1 \geqslant 0$. Имеем

$$D_1 = (a - 1)^2 + 4a = (a + 1)^2.$$

Если $a = -1$, то $D_1 = 0$. В этом случае квадратное уравнение имеет единственный корень. Его легко найти, подставив в уравнение $a = -1$. Получим $-x^2 + 4x - 4 = 0$, т. е. $x^2 - 4x + 4 = 0$, откуда находим, что $x = 2$.

Если $a \neq -1$, то $D_1 > 0$. По формуле корней получим

$$x = \frac{(a-1) \pm (a+1)}{a}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{2}{a}.$$

Ответ. При $a = 0$ и $a = -1$ уравнение имеет единственный корень $x = 2$. При $a \neq 0$ и $a \neq -1$ уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{2}{a}$.

Часто при исследовании уравнения (или системы) требуется найти только те значения параметра, при которых выполняются некоторые требования, заданные в условии задачи. Рассмотрим пример.

■ Пример 3. Выясним, при каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x - y = a \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$ имеет единственное решение, и найдем это решение.

Такие системы мы решаем способом подстановки, поступим так же и в этом случае. Выразим из первого уравнения переменную y и подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$y = x - a,\ x^2 + (x - a)^2 = 8,\ 2x^2 - 2ax + a^2 - 8 = 0.$$

Теперь задача сводится к исследованию квадратного уравнения с параметром a: нам надо найти все такие значения a, при которых это уравнение имеет один корень. В этом случае исходная система уравнений будет иметь одно решение.

Квадратное уравнение имеет единственный корень в том и только том случае, когда его дискриминант D (или сокращенный дискриминант D_1) равен нулю. Найдем D_1 и решим уравнение $D_1 = 0$:

$$D_1 = a^2 - 2(a^2 - 8) = -a^2 + 16.$$

Имеем уравнение $16 - a^2 = 0$, откуда $a = \pm 4$.

Таким образом, система уравнений имеет единственное решение, если $a = 4$ или $a = -4$. Найдем решение системы в каждом из этих случаев.

Если $a = 4$, то получаем систему уравнений $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

Решив ее, получим $x = 2$, $y = -2$. Решением системы служит пара чисел $(2; -2)$.

Если $a = -4$, то получаем систему уравнений $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

Решив ее, получим $x = -2$, $y = 2$. Решением системы служит пара чисел $(-2; 2)$.

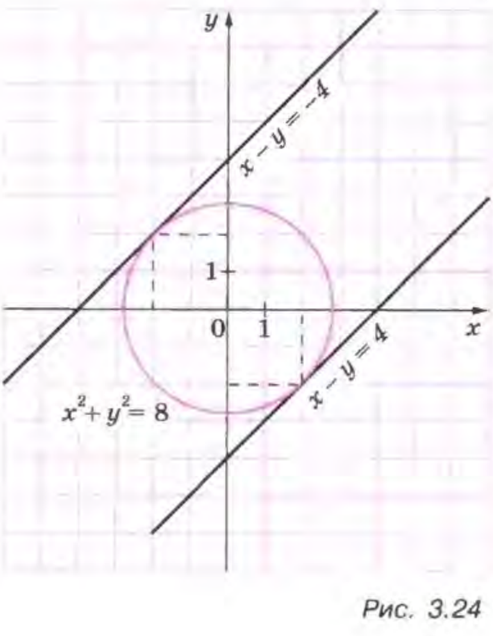


Рис. 3.24

Ответ. Система имеет единственное решение при $a = 4$ и при $a = -4$; в первом случае решение системы — пара $(2; -2)$, во втором — пара $(-2; 2)$.

Полученный результат имеет и графическую трактовку. График уравнения $x^2 + y^2 = 8$ — это окружность с центром в начале координат и радиусом, равным $\sqrt{8}$, а графики уравнений $x - y = 4$ и $x - y = -4$ — это прямые. Каждая из прямых касается окружности (рис. 3.24), т. е. имеет с окружностью одну общую точку, координаты которой и служат решением соответствующей системы уравнений.

499. Решите уравнение с переменной x:

а) $(m - 1)x = m^2 - 1$; в) $(2 - a)x = a^2 - 4$;

б) $(c - 2)x = c + 2$; г) $(b^2 - 1)x = b + 1$.

500. Выясните, при каких значениях a уравнение имеет два корня:

а) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$;

б) $cx^2 - (c^2 + 4)x + 4c = 0$.

501. Докажите, что при любых значениях a уравнение имеет корни:

а) $x^2 - 5ax + 6a^2 = 0$;

б) $(x + a)(x - a) = 1 - 2a$.

502. При каких значениях c данное уравнение имеет два корня; имеет два корня разных знаков:

а) $x^2 - 12x + c = 0$;

б) $x^2 + cx - 4 = 0$;

в) $2x^2 + cx + 2 = 0$?

503. С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь уравнение (a — параметр):

а) $|x| = ax - 1$; б) $|x| = ax + 2$.

504. Дана система уравнений с переменными x и y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = |x| + a. \end{cases}$$

а) С помощью графиков установите, сколько решений может иметь система уравнений;
б) найдите значения a, при которых система имеет два решения; три решения.

505. Сколько решений может иметь система уравнений

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x^2 + c? \end{cases}$$

Укажите значения c, при которых система имеет одно решение; не имеет решений.

506. При каких значениях c прямая $x + y = c$ касается окружности $x^2 + y^2 = 2$? пересекает эту окружность в двух точках?

507. Найдите значения b, при которых точка пересечения прямых $y = 18 - 2x$ и $y = 3x + b$ находится в четвертой четверти.

3.9 График дробно-линейной функции

(Для тех, кому интересно)

В этом пункте вы познакомитесь с классом дробно-линейных функций и научитесь строить их графики.

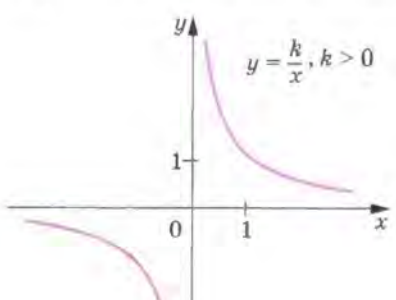
Приведем примеры дробно-линейных функций:

$$y = \frac{3x-1}{x+5},\ y = \frac{3}{2x+4},\ y = \frac{8-x}{3x}.$$

Вообще, *дробно-линейной называют функцию, которую можно задать формулой вида* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

(Строго говоря, это определение нужно было бы дополнить ограничениями на числовые коэффициенты. Так, коэффициент c не должен быть равен нулю, в противном случае мы будем иметь не дробно-линейную, а обыкновенную линейную функцию. Однако полный список ограничений мы сейчас рассматривать не будем.)

Частным случаем дробно-линейной функции является хорошо вам знакомая *обратно пропорциональная зависимость*, т. е. *к дробно-линейным функциям относят и всякую функцию, которая задается формулой вида* $y = \frac{k}{x}$. Вы знаете, что гипербола — график функции $y = \frac{k}{x}$ — состоит из двух бесконечных ветвей (рис. 3.25). Эти ветви, удаляясь в бесконечность, неограниченно приближаются к осям координат, однако общих точек с осями они не имеют. Говорят, что координатные оси являются *асимптотами* графика функции $y = \frac{k}{x}$ (от греческого слова, означающего в переводе «несовпадающий»); ось x — *горизонтальная асимптота*, а ось y — *вертикальная асимптота*.



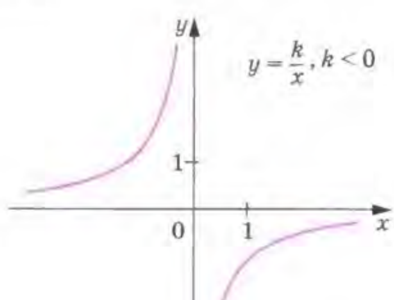


Рис. 3.25

В общем случае графиком дробно-линейной функции также является гипербола, причем этот график может быть получен с помощью сдвигов вдоль координатных осей гиперболы $y=\frac{k}{x}$.

Чтобы понять, как строится график произвольной дробно-линейной функции, разберем несколько примеров. При этом будут полезны знания, которые вы приобрели при построении графиков квадратичных функций. (Вспомните, что, например, график функции $y = 2x^2 - 4$ получается сдвигом параболы $y = 2x^2$ на 4 единицы вниз, а график функции $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$ — сдвигом параболы $y=\frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы влево.)

■ Пример 1. Возьмем функцию $y=\frac{6}{x}+1$. (Убедитесь, что она является дробно-линейной.) График этой функции можно получить сдвигом на одну единицу вверх гиперболы $y=\frac{6}{x}$ (рис. 3.26). Так как график перемещается вдоль оси y, то вертикальной асимптотой новой гиперболы по-прежнему служит ось y. А горизонтальная асимптота вместе с графиком «переезжает» на единицу вверх; теперь это прямая $y = 1$.

■ Пример 2. Рассмотрим функцию $y=\frac{6}{x-2}$. Ее график тоже гипербола. Она получается сдвигом графика $y=\frac{6}{x}$ на 2 единицы

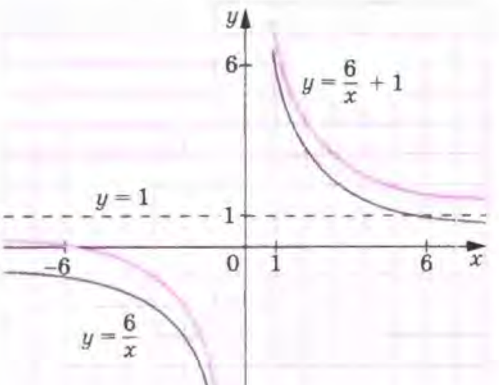


Рис. 3.26

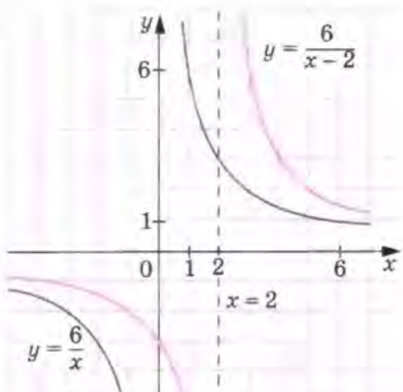


Рис. 3.27

вправо (рис. 3.27). У графика функции $y = \frac{6}{x-2}$ горизонтальная асимптота осталась прежней — это ось x. Но в этом случае другой стала вертикальная асимптота: теперь это прямая $x = 2$.

Обратите внимание: число 2 не входит в область определения функции $y = \frac{6}{x-2}$ и точка $x = 2$ «разрывает» координатную прямую на два открытых луча ($x < 2$ и $x > 2$), на каждом из которых выражение $\frac{6}{x-2}$ имеет смысл.

■ Пример 3. Построим график функции $y = \frac{4}{x+2} - 1$.

Для этого графика исходной является гипербола $y = \frac{4}{x}$.

Ее надо сдвинуть на 2 единицы влево и на 1 единицу вниз (рис. 3.28). «Крест асимптот» новой гиперболы образуют вертикальная прямая $x = -2$ и горизонтальная прямая $y = -1$. Эти прямые ограничивают четыре области на координатной плоскости, в двух из которых располагаются ветви гиперболы.

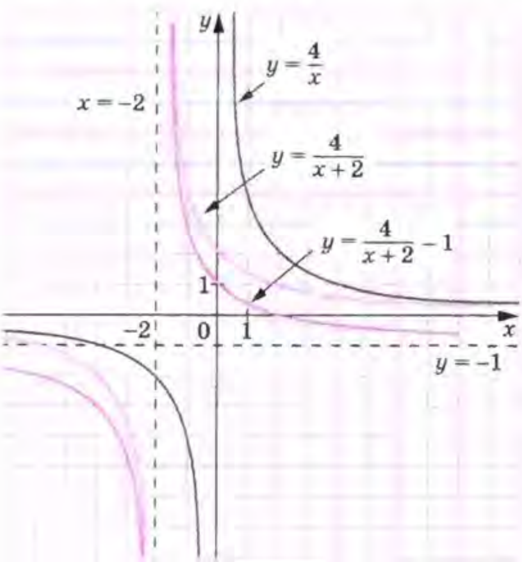


Рис. 3.28

■ Пример 4. Построим график функции $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Прежде всего формулу следует преобразовать так, чтобы по ее внешнему виду можно было судить об асимптотах графика. Для этого выделим целую часть дроби $\frac{x+1}{x-1}$:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Таким образом, требуется построить график функции, заданной формулой $y = \frac{2}{x-1} + 1$. Это можно сделать и не выполняя непосредственно параллельные переносы.

Из формулы $y = \frac{2}{x-1} + 1$ ясно, что асимптотами графика являются прямые $x = 1$ и $y = 1$ (рис. 3.29, a). Эти прямые делят коор-

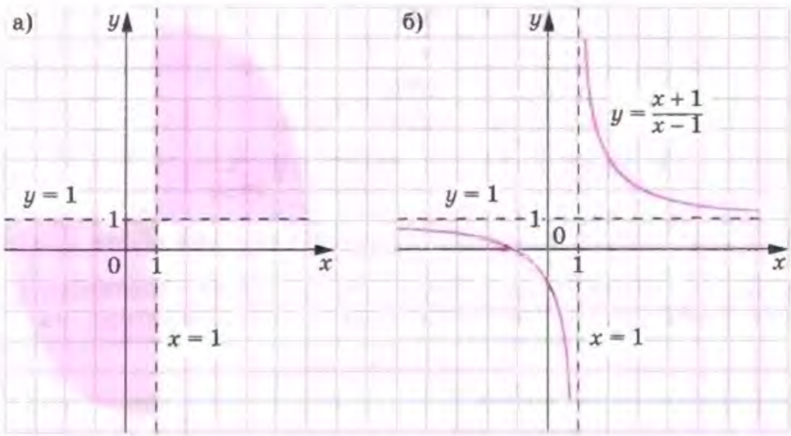


Рис. 3.29

динатную плоскость на четыре угла. Так как график получается сдвигом гиперболы $y = \frac{2}{x}$, то он расположен в верхнем правом и нижнем левом углах.

Ветви новой гиперболы можно построить по точкам. Для этого составим две таблицы значений функции $y = \frac{x+1}{x-1}$, отдельно для $x > 1$ и для $x < 1$:

x	1,5	2	3	5	7
y	5	3	2	1,5	$1\frac{1}{3}$

x	0,5	0	−1	−3	−5
y	−3	−1	0	0,5	$\frac{2}{3}$

График функции $y = \frac{x+1}{x-1}$ изображен на рисунке 3.29, *б*.

■ Пример 5. Найдем асимптоты графика функции $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

Вертикальная асимптота графика очевидна — это прямая $x = 1$. А чтобы найти уравнение горизонтальной асимптоты, поступим следующим образом: понаблюдаем, как меняется значение дроби $\frac{2x+3}{x-1}$ с увеличением переменной x.

Если $x = 100$, то $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{203}{99} = 2\frac{5}{99}$.

Если $x = 1000$, то $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2003}{999} = 2\frac{5}{999}$.

Если $x = 10\ 000$, то $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{20003}{9999} = 2\frac{5}{9999}$.

Мы видим, что, чем больше x, тем ближе значение дроби $\frac{2x+3}{x-1}$ к числу 2. Это станет еще очевиднее, если преобразовать рассматриваемую дробь, разделив ее числитель и знаменатель на x:

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$

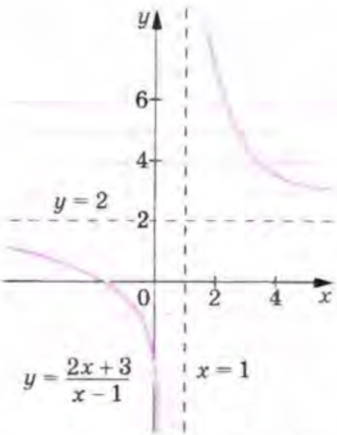


Рис. 3.30

Чем больше x, тем ближе к нулю дроби $\frac{3}{x}$ и $\frac{1}{x}$ и тем меньше влияют они на значение частного $\frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}$. Поэтому с увеличением x это частное стремится к дроби $\frac{2}{1}$, т. е. к числу 2. Таким образом, горизонтальной асимптотой графика функции $y = \frac{2x+3}{x-1}$ является прямая $y = 2$. График изображен на рисунке 3.30.

В заключение запишем уравнения асимптот графика произвольной дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Вертикальной асимптотой является прямая $x = -\frac{d}{c}$. Чтобы получить уравнение горизонтальной асимптоты, преобразуем дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$, разделив ее числитель и знаменатель на x:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}.$$

С увеличением x частное $\dfrac{a+\dfrac{b}{x}}{c+\dfrac{d}{x}}$ стремится к числу $\dfrac{a}{c}$. Поэтому горизонтальной асимптотой графика функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ является прямая $y=\dfrac{a}{c}$. Иными словами, *чтобы получить уравнение горизонтальной асимптоты графика функции* $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, *нужно найти отношение коэффициентов при переменной* x.

508. Укажите асимптоты графика функции и постройте этот график по точкам:

а) $y=\dfrac{1}{x}-3$; б) $y=-\dfrac{2}{x}+4$.

509. Покажите с помощью схематического рисунка, как расположена в координатной плоскости гипербола, заданная формулой $y=\dfrac{k}{x}+q$, если:

а) $k>0,\ q>0$; в) $k<0,\ q>0$;
б) $k>0,\ q<0$; г) $k<0,\ q<0$.

510. Укажите асимптоты графика функции и постройте этот график по точкам:

а) $y=\dfrac{2}{x+3}$; б) $y=-\dfrac{1}{x-4}$.

511. Покажите с помощью схематического рисунка, как расположена в координатной плоскости гипербола, заданная формулой $y=\dfrac{k}{x+p}$, если:

а) $k>0,\ p>0$; в) $k<0,\ p>0$;
б) $k>0,\ p<0$; г) $k<0,\ p<0$.

512. Постройте в координатной плоскости асимптоты графика заданной функции и изобразите этот график схематически:

а) $y=\dfrac{1}{x+3}-2$; в) $y=\dfrac{2}{x-1}-4$;

б) $y=-\dfrac{3}{x+4}+6$; г) $y=-\dfrac{6}{x-3}-2$.

В каждом случае найдите координаты точек пересечения графика с осью x и осью y и отметьте эти точки на рисунке.

513. Постройте график функции:

а) $y=\frac{2x+7}{x+3}$; б) $y=\frac{4x+2}{x+1}$.

Образец. Построим график функции $y=\frac{4x-5}{x-2}$.

Преобразуем дробь $\frac{4x-5}{x-2}$, выделив ее целую часть:

$\frac{4x-5}{x-2}=\frac{4(x-2)+3}{x-2}=4+\frac{3}{x-2}$. Теперь легко найти асимптоты. Продолжите решение.

514. Постройте график функции:

а) $y=\frac{x+4}{x+2}$; б) $y=\frac{3-x}{x-1}$; в) $y=\frac{x+1}{x+2}$.

Указание. В качестве образца воспользуйтесь примером 4, разобранным в тексте.

515. Найдите асимптоты графика функции и изобразите этот график схематически:

а) $y=\frac{6x}{2x+1}$; б) $y=\frac{x+3}{4-2x}$; в) $y=\frac{3x-5}{2x+8}$.

516. Постройте график функции:

а) $y=\frac{1}{|x-3|}$; б) $y=\frac{1}{|x|-3}$.

Д3 Дополнительные задания к главе 3

Рациональные выражения

Сократите дробь (**517—519**):

517. а) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$; б) $\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$; в) $\frac{m^4-n^4}{m^2-n^2}$; г) $\frac{a^4-b^4}{b^2+a^2}$.

518. а) $\frac{ac-bc-ad-bd}{ac+bc-ad-bd}$; б) $\frac{xy+1+x+y}{xy+x}$; в) $\frac{ac+ad-c^2-cd}{ax+ay-cx-cy}$.

519. а) $\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{a+b+c}$; б) $\frac{x^2+y^2-2xy-c^2}{x^2-y^2-c^2-2yc}$; в) $\frac{a^3+ab^2-2a^2b}{a^3-ab^2}$.

Упростите выражение (**520—522**):

520. а) $\frac{1}{x-5}-\frac{9}{x^2-x-20}$; б) $\frac{1}{a+7}+\frac{10}{21-4a-a^2}$.

521. а) $\left(\frac{a-2}{a^2-2a-3}-\frac{a-1}{a^2-a-6}\right)(a^2+3a+2)$;

б) $\left(\frac{b+6}{b^2-4a-5}-\frac{b+5}{b^2-5b-6}\right)(b^2-11b+30)$.

522. а) $((a^2-2)a^{-2}-a^{-1}):(a+a^{-2})$; б) $(1+c^{-1}+c^{-2}):(c^{-2}-c)$.

523. Найдите значение выражения:

а) $(1-y)(1+y^2)+(1+y)(1+y^2)$ при $y=-\frac{3}{2}$; 0,1; –100;

б) $(a+b)^2+(a-b)^2-(2a+b)(a+2b)$ при $a=-\frac{1}{3}$ и $b=\frac{1}{5}$;

$a=0{,}2$ и $b=10$; $a=-5$ и $b=-\frac{1}{125}$.

524. Вычислите значение выражения при заданных значениях переменных (если оно имеет смысл):

а) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ при $x=3$ и $y=6$; $x=-2$ и $y=4$; $x=15$ и $y=15$; $x=0{,}2$ и $y=0{,}3$;

б) $\frac{a-\frac{b^2}{a}}{b-\frac{a^2}{b}}$ при $a=4$ и $b=-1$; $a=0$ и $b=10$; $a=1{,}5$ и $b=0{,}3$;

$a=-16$ и $b=16$.

525. 1) Найдите наименьшее значение выражения a^2+b^2-2a+ $+4b+10$ и укажите пару значений a и b, при которых оно достигается.

2) Найдите наибольшее значение выражения $\frac{1}{a^2+b^2-2a+4b+10}$.

При каких значениях a и b оно достигается?

Указание. 1) Выделите в выражении квадраты двучленов.

526. Найдите область определения выражения:

а) $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}{x-y}$; б) $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}$.

В каждом случае для заданного значения одной переменной подберите такое значение другой переменной, чтобы выражение не имело смысла: $x = -8$, $y = ...$; $x = ...$, $y = 12$.

527. Докажите, что при всех значениях переменных значение выражения:

а) $(2 - x)(4 + x^2) + (2 + x)(4 + x^2) - 4(2 + x)(x - 2)$ равно 32;
б) $(x + z)(x - z) - y(2x - y) - (x - y + z)(x - y - z)$ равно 0;
в) $(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) + (a - b - c)(b - a - c)(c - b - a)$ равно 0;
г) $(y^2 - 1)(y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1) - y^6$ равно -1.

Сократите дробь (**528—530**):

528. а) $\dfrac{(3-a)(a-2)}{2(a-3)-a(a-3)}$; б) $\dfrac{(a^2-b^2)(a-c)}{(b-a)^2}$; в) $\dfrac{(x^3-y^3)(x-1)}{y^2-x^2}$.

529. а) $\dfrac{(2a-2b)^2}{8b-8a}$; б) $\dfrac{4m^2-4n^2}{(4n-4m)^2}$; в) $\dfrac{(3x-3y)^2(2x-2y)^2}{(6y-6x)^3}$.

530. а) $\dfrac{x^4-x^2-2x-1}{x^4-3x^2+1}$; б) $\dfrac{x^4-y^4}{x^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3+y^4}$.

531. Докажите, что:

а) если $a^2 = b^2 + c^2$ и $abc \neq 0$, то

$$\frac{bc-a}{bc}-\frac{ac-b}{ac}-\frac{ab-c}{ab}=-1;$$

б) если $a + b + c = 0$ и $abc \neq 0$, то

$$\frac{bc-1}{bc}+\frac{ac-1}{ac}+\frac{ab-1}{ab}=3.$$

Докажите тождество (**532—534**):

532. а) $\dfrac{x^2+4x+4}{2x^3-x^2-8x+4}:\dfrac{x+2}{2x^2-5x+2}=1$;

б) $\dfrac{2x-6}{x^4+x^2-2}:\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3-x}=-\dfrac{2}{x+1}$.

533. а) $\dfrac{x^2-(y+z)^2}{(x-z)^2-y^2}+\dfrac{(x-y)^2-z^2}{x^2-(y-z)^2}+\dfrac{y^2-(z+x)^2}{(x+y)^2-z^2}=1;$

б) $\dfrac{ac-bc-c^2}{(a-c)^2-b^2}-\dfrac{ab+bc-b^2}{a^2-(b-c)^2}-\dfrac{ac+ab+a^2}{(a+b)^2-c^2}=-1.$

Указание. Сначала сократите каждую дробь.

534. а) $(a+b+c)(bc+ac+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b);$
б) $(a-b)(b-c)(a-c)=ab(a-b)-ac(a-c)-bc(c-b).$

535. Постройте график функции:

а) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{если } x>0\\ \dfrac{x^2-1}{1-x}, & \text{если } x\leqslant 0;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{если } x\geqslant 0\\ \dfrac{x^2-4}{x+2}, & \text{если } x<0.\end{cases}$

Уравнения с одной переменной

Решите уравнение (**536—540**):

536. а) $y^2(y+1)-2y(y+1)-3(y+1)=0;$
б) $2y^2(2y-3)+y(2y-3)-(2y-3)=0;$
в) $(3x-2)(x-1)=4(x-1)^2;$
г) $(6x-1)(x-2)=5(x-2)^2.$

537. а) $(2x-7)^2=(9-x)^2;$ в) $(x^2-8x+10)^2=(x^2-2x+2)^2;$
б) $(x-4)^2=(3x+2)^2;$ г) $(x^2-4x-10)^2=(x^2-2x+2)^2.$

538. а) $(5x-2)^2+(5x+2)^2=2(5x-3)^2;$
б) $(7x-3)^2+(7x+3)^2=2(7x-4)^2.$

Указание. Преобразуйте уравнение так, чтобы и в левой, и в правой его части стояла разность квадратов.

539. а) $(x^2-5x)^2+(x^2-25)^2=0;$
б) $(x^2-4)^2+(x^2+4x)^2=0;$
в) $(x^2-5x+6)^2+(x^2-3x+2)^2=0;$
г) $(x^2-3x-4)^2+(x^2-x-2)^2=0.$

Указание. Воспользуйтесь тем, что при любом a верно неравенство $a^2\geqslant 0$.

540. 1) а) $x^3-2x=0;$ в) $x^4+x=0;$ д) $16x-2x^3=0;$
б) $5x^3+5x=0;$ г) $7x^4+14x^2=0;$ е) $x^4-8x=0.$

2) Составьте уравнение третьей степени и уравнение четвертой степени, каждое из которых имеет два корня: 0 и -2.

541. Решите уравнение двумя способами:
а) $x^6 - 1 = 0$; б) $x^6 - 64 = 0$.

Указание. *1-й способ*: преобразуйте левую часть уравнения как разность квадратов;
2-й способ: преобразуйте левую часть уравнения как разность кубов.

Решите уравнение (**542—546**):

542. а) $\frac{6}{x^2-2x}-\frac{12}{x^2+2x}=\frac{1}{x}$; б) $\frac{27}{x^2+3x}-\frac{2}{x}=\frac{3}{x^2-3x}$.

543. а) $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12}$; б) $\frac{1}{x-3}-\frac{x+8}{2x^2-18}=\frac{1}{3-x}-1$.

544. а) $1+\frac{x-4}{x-3}=\frac{x}{x+4}+\frac{7x}{x^2+x-12}$; в) $\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x^2-2x+4}=\frac{24}{x^3+8}$;

б) $1-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x^2-2x-3}-\frac{4}{x-3}$; г) $\frac{3x}{x^3-1}-\frac{3}{x^2+x+1}=\frac{1}{x-1}$.

545. а) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$; б) $4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x-\frac{1}{x}\right)=5$.

Указание. а) Используя формулу $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, выразите $x^2+\frac{1}{x^2}$ через $x+\frac{1}{x}$. Далее введите замену $x+\frac{1}{x}=y$.

б) Выразите $x^2+\frac{1}{x^2}$ через $x-\frac{1}{x}$.

546. а) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-5}$; б) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$.

Указание. Преобразуйте отдельно левую и правую части уравнения.

Решите задачу (**547—553**):

547. Два велосипедиста отправились одновременно из города в поселок. Скорость первого велосипедиста была на 2 км/ч больше, чем скорость второго велосипедиста. Поэтому он приехал в поселок на 15 мин раньше второго велосипедиста. Найдите скорость второго велосипедиста, если расстояние от города до поселка 36 км.

548. Из города A в город B, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали два велосипедиста. Скорость одного из них на 4 км/ч меньше скорости другого, поэтому в город B он приехал на 1 ч 15 мин позже другого велосипедиста. Сколько времени затратил на первые 12 км пути велосипедист, который ехал с меньшей скоростью?

549. Два велосипедиста одновременно выехали из поселка в город. Скорость одного велосипедиста была на 6 км/ч больше скорости другого, и на каждые 800 м он затрачивал на 1 мин 20 с меньше, чем второй велосипедист. Сколько времени затратил на путь из поселка в город велосипедист, который ехал с большей скоростью?

550. Из пункта A в пункт B выехал автобус, и одновременно с ним из B в A выехал автомобиль. Они встретились в пункте C, причем расстояние, пройденное автомобилем до места встречи, оказалось на 50 км больше пройденного автобусом. Автобус прибыл в конечный пункт через 3 ч после встречи, а автомобиль — через 1 ч 20 мин. На каком расстоянии от пункта A произошла встреча? За какое время автомобиль прошел все расстояние?

551. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Спустя полчаса из пункта B в пункт A вышел турист. Они встретились в пункте C, расположенном на 14 км ближе к пункту B, чем к пункту A. Велосипедист прибыл в пункт B через $\frac{3}{5}$ ч после встречи, а турист прибыл в пункт A через 5 ч после встречи. Каково расстояние от пункта A до места встречи? С какой скоростью шел турист?

552. Туристский маршрут состоит из двух участков: 9 км подъема и 12 км спуска. При подъеме скорость туристов на 3 км/ч меньше, чем при спуске, а их средняя скорость на всем маршруте равна 4,2 км/ч. Чему равна скорость туристов при спуске?

553. Николай ездит с биостанции за почтой на велосипеде. Дорога от биостанции до почты идет сначала 4 км в гору, а затем 8 км под гору. При подъеме скорость Николая в 2 раза меньше, чем при спуске. Найдите скорость, с которой Николай едет на каждом из этих участков, если его средняя скорость на пути к почте на 2,4 км/ч больше, чем на обратном пути.

Системы уравнений

Решите систему уравнений **(554—556)**:

554. а) $\begin{cases}(x^2-y^2)(x+y)=32\\ x-y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x^2-y^2)(x-y)=20\\ x+y=5.\end{cases}$

555. а) $\begin{cases}(x-3y)(x+4)=0\\ x-5y=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}(x-1)(y+4)=0\\ y^2+xy-2=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+4y)(x-3)=0\\ x+3y=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(x+2)(y-1)=0\\ x^2-xy-12=0.\end{cases}$

556. а) $\begin{cases}(x-2)(y-2)=-1\\ x+y=4;\end{cases}$ в) $\begin{cases}xy=3\\ (x+1)(y+1)=8;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x-y=4\\ (x-1)(y+1)=-1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}xy=-4\\ (x+1)(y-1)=-10.\end{cases}$

Указание. а) Представьте первое уравнение в виде

$$xy - 2(x + y) + 4 = -1.$$

Далее используйте условие $x + y = 4$.

557. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=18\\ (x-1)(y-2)=9\end{cases}$ с помощью подходящей замены.

558. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y=\dfrac{8}{x-1}$ и $y = x + 1$; б) $y = x$ и $y=\dfrac{12}{x+4}$.

559. При каких значениях p система уравнений имеет решение:

а) $\begin{cases}x-y=7\\ 2x+3y=-1\\ 0{,}5x+2y=p;\end{cases}$ б) $\begin{cases}y-2x=3\\ 3x-2y=-7\\ x+y=p?\end{cases}$

560. Найдите значение c, при котором прямые $4x + 5y = 10$ и $2x - y = c$ пересекаются в точке, принадлежащей:

а) оси абсцисс; б) оси ординат.

561. 1) Докажите алгебраическим методом, что система уравнений $\begin{cases}2x-y=4\\ x+y=2\\ x^2+y^2=4\end{cases}$ имеет решение, и притом только одно. Дайте графическую иллюстрацию данного утверждения.

2) Найдите такое значение r, при котором система уравнений $\begin{cases}x-y=-3\\ x+2y=6\\ x^2+y^2=r^2\end{cases}$ имеет решение.

562. На рисунке 3.31, *а*, *б* изображены графики уравнений $(y - 0{,}5x^2)(y - 2) = 0$ и $\frac{y - 0{,}5x^2}{y - 2} = 0$. График первого уравнения состоит из параболы $y = 0{,}5x^2$ и прямой $y = 2$, т. е. он является их объединением. График второго уравнения — это парабола $y = 0{,}5x^2$ без точек, принадлежащих прямой $y = 2$.

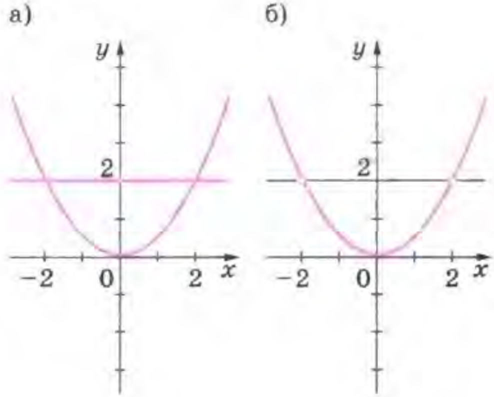


Рис. 3.31

Рассуждая аналогично, постройте графики уравнений:

а) $(x^2 + y^2 - 4)(y^2 - x^2) = 0$, $\frac{x^2 + y^2 - 4}{y^2 - x^2} = 0$, $\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2 - 4} = 0$;

б) $(xy - 2)(y - 2x) = 0$, $\frac{xy - 2}{y - 2x} = 0$, $\frac{y - 2x}{xy - 2} = 0$.

Решите задачу (**563—567**):

563. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал второй велосипедист. Они встретились через 48 мин после начала движения. Известно, что на каждые 300 м пути первый велосипедист тратил столько же времени, сколько второй — на каждые 200 м пути. Сколько часов затратил на путь из пункта A в пункт B первый велосипедист, если расстояние от пункта A до пункта B равно 28 км?

564. Два велосипедиста одновременно стартовали по кольцевому шоссе на 50 км. Известно, что первый велосипедист через 30 мин после старта опережал второго на 500 м и пришел к финишу на 5 мин раньше второго. Найдите скорость первого велосипедиста.

565. Два мотоциклиста одновременно стартовали по шоссе на 100 км. Известно, что первый мотоциклист пришел к финишу на 6 мин 40 с раньше второго и каждые 100 м проезжал за то время, за которое второй проезжал 90 м. Найдите скорость первого мотоциклиста.

566. Художник выставил на продажу две картины — пейзаж и натюрморт. Первая была продана на 20% дешевле первоначальной цены, а вторую удалось продать на 20% дороже ее первоначальной стоимости. В результате обе картины были проданы по одной и той же цене. У какой картины первоначальная стоимость была выше и во сколько раз?

567. Утром в магазин завезли груши и яблоки. За день было продано 60% груш и 50% яблок. К концу рабочего дня груш в магазине оказалось в 2 раза больше, чем яблок. Каких фруктов было завезено больше и во сколько раз?

Вопросы для повторения к главе 3

1. Из выражений $x^2 - 3$; $\frac{2}{x-3}$; $\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1$; $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$; $5a^2bc^3$ выберите:
   а) целые выражения; б) дробные выражения.
2. Приведите пример буквенного выражения, областью определения которого является множество всех действительных чисел.
3. Как найти область определения дробного выражения? Найдите область определения выражения $\frac{3a-6}{(2a+1)(a-5)}$. Может ли областью определения дробного выражения служить множество всех действительных чисел?
4. Какие два рациональных выражения называют равными? Из данных выражений выберите те, которые равны произведению $a(a + b)$: $a^2 - ab$; $a^2 + ab$; $2a^2 + ab - a^2$; $a^2 + b$; a^2b; $aa + ba$.
5. Как доказывают тождества? Докажите тождество:
   $$x(x + y) - y(x + y) = x^2 - y^2.$$
6. Покажите с помощью числовой подстановки, что равенство $(x - 1)^2 = x^2 - 1$ не является тождеством.
7. Выберите из уравнений $\frac{2}{x} + x = -2$; $\frac{x^2}{2} - 3x = 0$; $2x^2 = 3x + 7$; $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} = 3$:
   а) целые уравнения (укажите степень каждого из них);
   б) дробные уравнения.
8. Разберите пример 1 из п. 3.2. Какой прием использован для решения уравнения $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$? Решите этим же приемом уравнение $x^3 - 4x = 0$.
9. Разберите пример 2 из п. 3.2. Какой прием использован для решения уравнения $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3) = 15$? Укажите замену, с помощью которой решается уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

10. На примере уравнения $\frac{x^2}{x-4} - 1 = \frac{16}{x-4}$ расскажите, как решают дробные уравнения.

11. Покажите на примере системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 2, \end{cases}$ в чем состоит графический способ решения системы двух уравнений с двумя переменными.

12. Как решают системы двух уравнений с двумя переменными способом подстановки? Продемонстрируйте этот прием на примере системы $\begin{cases} y - 2x = 2 \\ y - 5x^2 = -1. \end{cases}$

Задания для самопроверки к главе 3

(Обязательные результаты обучения)

1. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3a^2 - a}{4}$ при $a = \frac{1}{3}$; б) $\frac{ab-1}{ab+1}$ при $a = -5$, $b = 0{,}4$.

2. Укажите значения переменной, при которых данное выражение имеет смысл:

а) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$; б) $\frac{x-4}{12x+3x^2}$; в) $\frac{x^2-3}{x^2+3}$.

3. Упростите выражение $\frac{a^2-1}{a^2} - \frac{a^2-9}{a} \cdot \frac{1}{a+3}$.

4. Упростите выражение $\left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}\right) : \frac{4}{x^2-y^2}$.

5. Найдите корни уравнения:

а) $(2x - 3)(x + 1)(3 - x) = 0$; в) $x^2 - 16x^4 = 0$;

б) $x^3 - 9x = 0$; г) $x^3 - 3x^2 - 10x = 0$.

6. Решите уравнение:

а) $\frac{3}{x+2} - 5 = \frac{4}{x-2}$; в) $x + \frac{4}{x} = 4$; д) $\frac{x}{x-2} = \frac{10}{x+1}$;

б) $\frac{x-3}{x} + \frac{7}{x+3} = \frac{5}{4}$; г) $\frac{x^2-7x-8}{x+1} = 0$; е) $\frac{1-x}{2-x} = 2$.

7. Решите задачу:

а) Лодка за одно и то же время может проплыть по течению реки 45 км, а против течения — 27 км. Скорость течения реки 3 км/ч. С какой скоростью плывет лодка в стоячей воде?

б) Велосипедист проехал 4 км по участку шоссе, на котором шел ремонт, и 6 км — по уже отремонтированному участку. Его скорость на первом участке была на 4 км/ч меньше, чем на втором. На весь путь у него ушел 1 ч. С какой скоростью ехал велосипедист на каждом участке?

8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 2y = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = -14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x - y = 4. \end{cases}$

9. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций $y = 4 - x^2$ и $y = x - 2$.

10. Решите задачу:

а) Прямоугольный участок земли площадью 60 м^2 обнесен изгородью, длина которой 32 м. Найдите стороны участка.

б) Диагональ прямоугольника равна 20 см, а одна сторона на 4 см больше другой. Найдите стороны прямоугольника.

11. Используя графики (см. рис. 3.22, *а*), решите уравнение $x^3 = \frac{1}{x}$.

Тест к главе 3

1. Какое из выражений не является целым?

А. $c^2 + 4$. **Б.** $c^2 + 4c$. **В.** $c^2 + \frac{4}{c}$. **Г.** $c^2 + \frac{c}{4}$.

2. Даны выражения: 1) $\frac{x}{x+2}$; 2) $\frac{x+2}{x}$; 3) $\frac{x+\frac{1}{x}}{2}$.

Какие из них не имеют смысла при $x = 0$?

А. Только 1. **Б.** Только 2. **В.** 2 и 3. **Г.** 1, 2 и 3.

3. Найдите значение выражения $(a - 1)(a + 1) - (a - 1)^2 - a$ при $a = -0{,}5$.

Ответ. ____________________

4. Какое из равенств не является тождеством?

А. $a - b = -(b - a)$. **В.** $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$.

Б. $(a - b)^2 = (b - a)^2$. **Г.** $(b + a)(a - b) = b^2 - a^2$.

5. Какая из дробей не равна выражению $\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{1}{2-x}$?

А. $\frac{1}{2x - x^2}$. **Б.** $\frac{2x-1}{x^2 - 2x}$. **В.** $-\frac{1}{x(x-2)}$. **Г.** $\frac{1}{x(2-x)}$.

6. Решите уравнение $(x + 1)(x + 4)(x - 3) = 0$.

О т в е т. ____________________

7. Сколько корней имеет уравнение $x^4 - x^2 = 0$?

А. Один корень. **Б.** Два корня. **В.** Три корня. **Г.** Корней нет.

8. Какое из уравнений имеет три корня?

А. $\frac{x^2+1}{x-1}=0$. **Б.** $\frac{x(x^2-1)}{x-1}=0$. **В.** $\frac{x(x^2+4)}{x-1}=0$. **Г.** $\frac{x(x^2-4)}{x-1}=0$.

9. Теплоход прошел 21 км по течению реки и 10 км против течения. Скорость течения реки 2 км/ч. Какова собственная скорость теплохода, если на весь путь он затратил 2,5 ч?
Какое из уравнений соответствует условию задачи, если буквой x обозначена собственная скорость теплохода (в км/ч)?

А. $\frac{21}{x+2}+\frac{10}{x-2}=2{,}5$. **В.** $10(x + 2) + 21(x - 2) = 2{,}5$.

Б. $\frac{21}{x-2}+\frac{10}{x+2}=2{,}5$. **Г.** $21(x + 2) + 10(x - 2) = 2{,}5$.

10. Вычислите координаты точек пересечения параболы $y = 2x^2 - 5$ и прямой $y = 4x - 5$.

А. $(0;\ 2)$ и $(-5;\ 3)$. **В.** $(0;\ -5)$ и $(3;\ 2)$.
Б. $(-5;\ 0)$ и $(2;\ 3)$. **Г.** $(0;\ -5)$ и $(2;\ 3)$.

11. Периметр прямоугольника равен 15 см, а его площадь 14 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

О т в е т. ____________________

12. Для каждой системы уравнений укажите число ее решений (используйте графические соображения).

1) $\begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ y=-5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ y=5-x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ y=5. \end{cases}$

А. 1 решение. **Б.** 2 решения. **В.** 3 решения. **Г.** Нет решений.

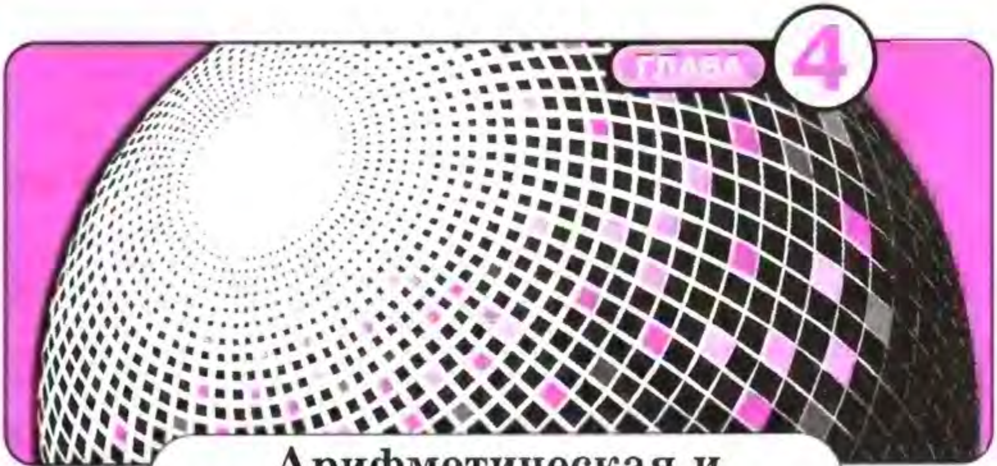
О т в е т. 1) ________; 2) ________; 3) ________

13. С помощью графиков решите систему уравнений $\begin{cases} y=|x| \\ y=(x+2)^2. \end{cases}$

О т в е т. ____________________

14. Какому промежутку принадлежит положительный корень уравнения $\sqrt{x} = 0{,}5x^2$?

А. $[0;\ 1]$. **Б.** $[1;\ 2]$. **В.** $[2;\ 3]$. **Г.** $[3;\ 4]$.



Арифметическая и геометрическая прогрессии

4.1 Числовые последовательности

Рассмотрим одну старинную з а д а ч у, известную математикам еще с XIII в. и описанную в книге итальянского математика Леонардо Фибоначчи (1180—1240).

Пара кроликов начиная с двухмесячного возраста ежемесячно производит новую пару. Сколько всего пар кроликов будет в декабре, если первая пара новорожденных кроликов появилась в январе (при условии, что все кролики останутся живы)?

Месяц	Пары кроликов	Число пар
Январь		1
Февраль		1
Март		2
Апрель		3
Май		5
Июнь		8
Июль		13

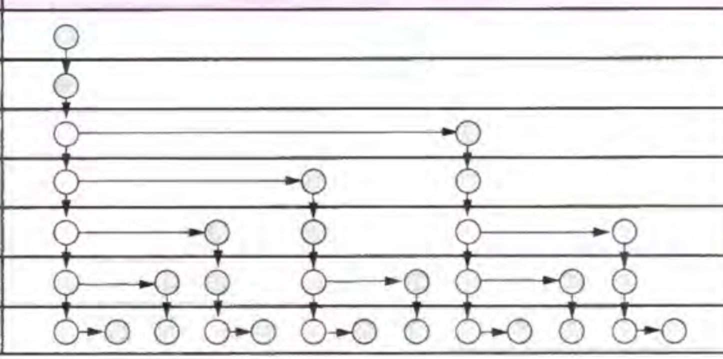


Рис. 4.1

Чтобы ответить на вопрос задачи, воспользуемся следующей схемой (рис. 4.1). Кружочек — это пара кроликов. Стрелка, направленная вниз, указывает на эту же пару в следующем месяце; а стрелка, направленная вправо, указывает на появившееся потомство этой пары.

На схеме видно, как шел прирост кроликов в первые семь месяцев. Если выписывать число пар по месяцам, то получим:

$$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13.$$

Можно заметить закономерность, которой подчиняются эти числа: *каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих*. Посмотрите, как, например, образовалось поголовье кроликов в июле: оно сложилось из июньских кроликов (их было 8 пар) и вновь родившихся (их оказалось 5 пар — ровно столько, сколько пар было двумя месяцами раньше, т. е. в мае). Теперь нетрудно подсчитать, сколько пар кроликов окажется в декабре:

Месяц	Пары кроликов
Август	$13 + 8 = 21$
Сентябрь	$21 + 13 = 34$
Октябрь	$34 + 21 = 55$
Ноябрь	$55 + 34 = 89$
Декабрь	$89 + 55 = 144$

Числа, возникающие при решении данной задачи, называют *числами Фибоначчи*.

Числа Фибоначчи — пример *числовой последовательности*. Вот еще некоторые последовательности, которые вам наверняка знакомы:

$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots$ — последовательность натуральных чисел;

$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ \ldots$ — последовательность четных чисел;

$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ \ldots$ — последовательность нечетных чисел;

$1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ \ldots$ — последовательность квадратов натуральных чисел;

$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots$ — последовательность чисел, обратных натуральным.

Бывают и такие последовательности, как, например, последовательность 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; ... . Она составлена из двух чисел — нуля и единицы, расположенных соответственно на четных и нечетных местах.

А последовательность 3; 3; 3; 3; 3; 3; ... составлена из единственного числа. Такую последовательность называют *постоянной*.

Чтобы изучать последовательности, нам надо договориться о терминах и символах, которые мы будем при этом употреблять.

Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности*; число, стоящее на первом месте, называют *первым членом*, на втором месте — *вторым членом*, на сотом месте — *сотым членом*, на месте с номером n — *n-м членом последовательности*.

Обозначают члены последовательности буквами с индексами, указывающими на порядковый номер члена:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ ...;\ a_{100};\ ...;\ a_n;\ ...\ .$$

Член последовательности, следующий за членом с номером n, имеет номер $n + 1$, поэтому его обозначают символом a_{n+1}. А член, предшествующий a_n, обозначается a_{n-1}. Саму последовательность принято обозначать так: (a_n).

Конечно, для записи членов последовательности вместо буквы a можно использовать и другие буквы, например b, c, x.

Последовательности задают разными способами. Чтобы познакомиться с одним из них, вернемся к числам Фибоначчи. Вот как начинается эта последовательность:

$$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ 34;\ 55.$$

Запишем, используя введенные обозначения, правило ее построения. В этой последовательности

$$\begin{aligned} a_1 &= 1; \\ a_2 &= 1; \\ a_3 &= a_2 + a_1; \\ a_4 &= a_3 + a_2; \\ a_5 &= a_4 + a_3; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Для члена с произвольным номером n соответствующее равенство будет выглядеть так:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Таким образом, последовательность чисел Фибоначчи задается следующими условиями:

$$a_1 = 1;\ a_2 = 1;\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ где } n \geqslant 3.$$

Формула $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, которую мы составили, относится к так называемым *рекуррентным формулам* (от латинского слова *recurro* — возвращаться). Рекуррентная формула выражает любой член последовательности, начиная с некоторого, через один или несколько предыдущих членов. При рекуррентном способе задания члены последовательности вычисляются поочередно один за другим.

■ Пример 1. Последовательность (c_n) задана рекуррентным способом:

$$c_1 = 2,\ c_{n+1} = 2c_n.$$

Требуется найти пятый член этой последовательности.

С помощью последовательных вычислений получим:

$$c_2 = 2c_1 = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4;$$
$$c_3 = 2c_2 = 2 \cdot 2^2 = 2^3 = 8;$$
$$c_4 = 2c_3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4 = 16;$$
$$c_5 = 2c_4 = 2 \cdot 2^4 = 2^5 = 32.$$

Познакомимся еще с одним способом задания последовательностей. Возьмем опять последовательность (c_n), рассмотренную в примере 1. Легко увидеть, что это последовательность натуральных степеней числа 2.

Понятно, что $c_6 = 2^6$, $c_7 = 2^7$ и т. д. Член с произвольным номером n равен n-й степени числа 2:

$$c_n = 2^n.$$

Формула, которую мы записали, является *формулой n-го члена последовательности* (c_n).

Формула n-го члена очень удобна. С ее помощью можно найти нужный член последовательности, не вычисляя всех предыдущих. Для этого достаточно подставить в формулу номер члена и вычислить значение получившегося выражения.

Рассмотрим пример.

■ Пример 2. Последовательность задана формулой n-го члена $x_n = \frac{n}{n+1}$. Найдем члены x_{100}, x_{250}, x_k, x_{k+10}.

Подставив в формулу $n = 100$, найдем x_{100}:

$$x_{100} = \frac{100}{100+1} = \frac{100}{101}.$$

Аналогично

$$x_{250} = \frac{250}{251},\quad x_k = \frac{k}{k+1},\quad x_{k+10} = \frac{k+10}{(k+10)+1} = \frac{k+10}{k+11}.$$

В заключение заметим, что последовательность не всегда можно задать с помощью формулы. Например, не существует формулы, описывающей последовательность простых чисел:

$$2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ \ldots\ .$$

A

568. Пусть (a_n) — последовательность треугольных чисел (рис. 4.2).

Рис. 4.2

а) Заполните таблицу, вычислив первые восемь членов этой последовательности.

Номер члена последовательности	1	2	...	8
Обозначение	a_1	a_2		
Член последовательности	1	3		

б) Найдите a_9, a_{10}.

569. Пусть (c_n) — последовательность правильных несократимых дробей со знаменателем 100.

а) Заполните таблицу, занеся в нее первые десять членов этой последовательности.

Номер члена последовательности	1	2	...	10
Обозначение	c_1	c_2		
Член последовательности	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$		

б) Закончите равенства: $c_5 = \ldots$, $c_9 = \ldots$, $c_{12} = \ldots$.

в) Укажите номер члена последовательности, равного $\frac{3}{100}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{29}{100}$.

г) Найдите последний член этой последовательности и укажите его номер.

570. а) Запишите все члены последовательности, предшествующие указанному: ...; a_{12}; ... .

б) Запишите все члены последовательности, содержащиеся между двумя указанными:

$$\ldots;\ a_{25};\ \ldots;\ a_{32};\ \ldots;$$
$$\ldots;\ a_{k-1};\ \ldots;\ a_{k+5};\ \ldots .$$

в) Для каждого из указанных членов последовательности запишите два предыдущих и два последующих члена:

$$\ldots;\ a_{104};\ \ldots;$$
$$\ldots;\ a_k;\ \ldots;$$
$$\ldots;\ a_{n-3};\ \ldots .$$

571. Предположим, что родители дали вам 1 рубль и у вас имеются две возможности дальнейшего получения денег. Первый способ: ежедневно вы будете получать сумму, на 2 рубля большую, чем получили в предыдущий день. Второй способ: во второй день вы получите 1 рубль, а начиная с третьего дня будете получать ежедневно столько рублей, сколько получили за предшествующие два дня вместе.

1) Заполните таблицу для первых десяти дней.

День	Сумма (в рублях)	
	I способ	II способ
1	1	1
2	3	1
3		
4		
...		

2) Изобразите каждую из получившихся последовательностей точками в координатной плоскости: по горизонтальной оси

откладывайте номер дня, а по вертикальной — полученную в этот день сумму денег. Какой из способов выгоднее, если вы планируете получать деньги в течение одной недели? в течение одного месяца?

3) Задайте каждую из этих последовательностей рекуррентным способом, обозначив первую из них через (a_n), а вторую — через (b_n).

572. Определите правило, по которому строится последовательность, запишите следующие два члена и задайте ее рекуррентным способом:

а) 64; 60; 56; 52; 48; ... (a_n); в) 1; 3; 9; 27; 81; ... (x_n);

б) 3; 8; 13; 18; 23; ... (c_n); г) 500; 50; 5; 0,5; 0,05; ... (b_n).

573. Выпишите первые шесть членов последовательности, если:

а) $x_1 = 7,\ x_{n+1} = 10x_n$;

б) $a_1 = -10,\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$;

в) $c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_n = c_{n-2} - c_{n-1}$, где $n \geqslant 3$;

г) $b_1 = -1,\ b_2 = -2,\ b_n = \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}$, где $n \geqslant 3$.

574. Плата за парковку машины на автостоянке начисляется следующим образом: за первый час берется 20 р., а за каждый следующий час (полный или неполный) автовладелец платит 12 р. Заполните таблицу и запишите формулу, по которой можно вычислить плату за n часов.

Количество часов	Сумма оплаты (в рублях)
1	$c_1 = 20$
2	$c_2 = 20 + 12$
3	$c_3 = (20 + 12) + 12 = 20 + 12 \cdot 2$
4	
5	
6	
7	
8	

Сколько должен заплатить автовладелец за парковку, если он оставит автомобиль на стоянке на 20 ч 40 мин? на 10 суток?

575. Николай начал заниматься в тренажерном зале. В первый день он занимался 10 мин, а в каждый следующий день увеличивал время занятий в 1,1 раза. Используя калькулятор, заполните таблицу и запишите формулу, по которой можно вычислить время занятий Николая в n-й день.
Через три недели Николай перестал увеличивать время занятий. Сколько минут он стал проводить в тренажерном зале?

День занятий	Длительность занятий (в минутах)	Правило вычисления
1	10	10
2	$10 \cdot 1{,}1 = 11$	$10 \cdot 1{,}1$
3	$(10 \cdot 1{,}1) \cdot 1{,}1 = 12{,}1 \approx 12$	$10 \cdot 1{,}1^2$
4		
5		
6		

576. Определите правило, по которому строится последовательность, запишите следующие два числа в этой последовательности и задайте ее формулой n-го члена. Найдите десятый и двадцатый члены последовательности.

а) 1; 4; 9; 16; 25; ... (c_n);
б) 5; 10; 15; 20; 25; ... (x_n);
в) 4; 5; 6; 7; 8; ... (a_n);
г) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots$ (b_n);
д) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \ldots$ (y_n);
е) $\frac{2}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{6}{5};\ \ldots$ (z_n).

577. Вычислите первые шесть членов последовательности (a_n), заданной формулой n-го члена, и дайте ей «имя»:
а) $a_n = n$; б) $a_n = 2n - 1$; в) $a_n = 4n$; г) $a_n = 1 - n$.

Образец. Формулой $a_n = 2n$ задается последовательность, которая начинается так: 2; 4; 6; 8; 10; 12; ... . Это последовательность четных чисел.

578. Последовательность задана формулой n-го члена:

$$a_n = 5 - 3n.$$

а) Вычислите первые восемь членов этой последовательности.
б) Найдите a_{100}; a_{99}; a_{101}.
в) Найдите a_k; a_{k-1}; a_{k+1}.

579. Последовательность задана формулой n-го члена:

$$b_n = 0{,}1 \cdot 2^{n-1}.$$

а) Вычислите первые семь членов этой последовательности.
б) Найдите b_{10}; b_{11}; b_9.
в) Найдите b_{n-1}; b_{n+2}.

580. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена:

$$x_n = n^2 - n.$$

а) Найдите x_{10}; x_{15}; x_k; x_{k+1}.
б) Каким членом этой последовательности является число 56? число 110?

Б

581. Последовательность (z_n) задана формулой n-го члена:

$$z_n = n - \frac{1}{n}.$$

а) Выпишите все члены этой последовательности, меньшие 10. Сколько таких членов?
б) Сравните $z_{10} - z_9$ и $z_{100} - z_{99}$.

582. Последовательность (y_n) задана формулой n-го члена:

$$y_n = 3^{n-5}.$$

а) Выпишите все члены этой последовательности, большие $\frac{1}{10}$ и меньшие 10. Укажите номера этих членов.
б) Сравните отношения: $\frac{y_{10}}{y_9}$ и $\frac{y_{100}}{y_{99}}$.

583. Найдите первые десять членов последовательности:

а) $b_n = (-1)^n$;
б) $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{10}$;
в) $y_n = (-1)^{n+1} + 1$;
г) $a_n = (-1)^n \cdot n$;
д) $z_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$;
е) $c_n = 3^{(-1)^n}$.

584. Вычислите первые шесть членов последовательности и найдите формулу n-го члена этой последовательности:
а) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = -a_n$; б) $a_1 = -5,\ a_{n+1} = -a_n$.

585. а) Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена: $a_n = \frac{2n+1}{n}$. Вычислите первые семь членов последовательности и изобразите их точками на координатной плоскости. Докажите, что все члены последовательности больше 2.
б) Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена: $b_n = \frac{2n-1}{n}$. Вычислите первые семь членов последовательности и изобразите их точками на координатной плоскости. Докажите, что все члены последовательности меньше 2.
в) Последовательность (y_n) задана формулой n-го члена: $y_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$. Вычислите первые семь членов последовательности и изобразите их точками на координатной плоскости. Докажите, что каждый следующий член последовательности ближе к 2, чем предыдущий.

4.2 Арифметическая прогрессия

Рассмотрим такую задачу.

На турбазе можно взять напрокат лодку. Стоимость проката определяется следующим образом: за первые сутки надо заплатить 100 р., а за каждые следующие (полные или неполные) — 50 р. Сколько рублей надо заплатить за лодку, взятую на один день, на два дня, на три дня и т. д.?

Выполняя подсчеты, мы получим такую последовательность:

$$100;\ 150;\ 200;\ 250;\ 300;\ \ldots\ .$$

Каждый следующий ее член получается прибавлением к предыдущему одного и того же числа, равного 50. Последовательности, обладающие подобным свойством, встречаются очень часто, и для них есть специальное название — *арифметическая прогрессия* (от латинского слова *progression*, означающего движение вперед).

Определение

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему одного и того же числа.

Понятно, что прибавляемое число равно разности между любыми двумя соседними членами прогрессии — последующим и предыдущим. Это число называют *разностью арифметической прогрессии* и обозначают буквой d (первой буквой французского слова *différence*, которое как раз и означает «разность»).

Используя введенное обозначение, можно правило, по которому образуются члены арифметической прогрессии, записать в виде рекуррентной формулы:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Или иначе:

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Разность арифметической прогрессии может быть любым числом — положительным, отрицательным и даже нулем. Так, в прогрессии

$$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ \dots$$

разность положительна:

$$d = 3 - 1 = 2.$$

Обратите внимание: в этой последовательности каждый следующий член больше предыдущего. Такую последовательность, естественно, называют *возрастающей*.

В прогрессии

$$100;\ 90;\ 80;\ 70;\ 60;\ \dots$$

разность отрицательна:

$$d = 90 - 100 = -10.$$

Каждый следующий член этой последовательности меньше предыдущего, и поэтому последовательность называют *убывающей*.

Последовательность

$$5;\ 5;\ 5;\ 5;\ 5;\ \dots,$$

все члены которой равны между собой, оказывается, тоже является арифметической прогрессией, так как разность между любыми двумя ее членами одна и та же:

$$d = 5 - 5 = 0.$$

Вернемся к задаче о стоимости проката лодки. Допустим, группа туристов хочет взять лодку на 3 недели. Какова будет стоимость проката?

Чтобы ответить на этот вопрос, можно, конечно, последовательно прибавлять к исходной сумме по 50 р., пока не получим сумму, которую нужно заплатить за 21 день проката лодки. Удобнее, однако, воспользоваться формулой, позволяющей вычислять стоимость проката непосредственно по количеству дней, на которое взята лодка.

Для того чтобы получить эту формулу, обратимся к таблице.

Количество дней	Стоимость проката (в рублях)
1	$P_1 = 100$
2	$P_2 = 100 + 50$
3	$P_3 = (100 + 50) + 50 = 100 + 50 \cdot 2$
4	$P_4 = (100 + 50 \cdot 2) + 50 = 100 + 50 \cdot 3$
5	$P_5 = (100 + 50 \cdot 3) + 50 = 100 + 50 \cdot 4$

Проведенные вычисления позволяют увидеть закономерность, которой подчиняются члены прогрессии:

$$P_n = 100 + 50 \cdot (n - 1).$$

Подставив в формулу $n = 21$, найдем плату за 21 день проката лодки:

$$P_{21} = 100 + 50 \cdot (21 - 1) = 100 + 50 \cdot 20 = 1100 \text{ (р.)}.$$

Решая задачу, мы составили формулу n-го члена прогрессии

$$100;\ 150;\ 200;\ 250;\ \dots .$$

Рассуждая точно так же, легко получить формулу n-го члена произвольной арифметической прогрессии.

Пусть последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Тогда по определению арифметической прогрессии

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d; \\ a_3 &= (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2; \\ a_4 &= (a_1 + 2d) + d = a_1 + d \cdot 3; \\ a_5 &= (a_1 + 3d) + d = a_1 + d \cdot 4. \end{aligned}$$

Понятно, что $a_6 = a_1 + d \cdot 5$, $a_{25} = a_1 + d \cdot 24$, $a_{100} = a_1 + d \cdot 99$.

И вообще

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n - 1).}$$

Это равенство и является *формулой n-го члена арифметической прогрессии*, в которой первый член равен a_1 и разность равна d.

Приведем примеры решения задач с использованием этой формулы.

■ Пример 1. Найдем 157-й член арифметической прогрессии

$$120;\ 116;\ 112;\ 108;\ 104;\ \ldots\ .$$

В этой прогрессии $a_1 = 120$, $d = 116 - 120 = -4$.
По формуле $a_n = a_1 + d(n - 1)$ получим

$$a_{157} = 120 - 4(157 - 1) = -504.$$

■ Пример 2. Дана арифметическая прогрессия

$$1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16;\ \ldots\ .$$

Каков номер члена прогрессии, равного 1249?

Подставим $a_1 = 1$, $d = 3$, $a_n = 1249$ в формулу

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Получим уравнение

$$1249 = 1 + 3(n - 1).$$

Решив его, найдем номер члена n:

$$3(n - 1) = 1248,$$
$$n - 1 = 416,$$
$$n = 417.$$

Таким образом, число 1249 — это 417-й член данной прогрессии.

■ Пример 3. Является ли число 250 членом арифметической прогрессии 0; 4,5; 9; 13,5; 18; ... ?

Подставим $a_1 = 0$, $d = 4{,}5$, $a_n = 250$ в формулу

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Получим уравнение

$$250 = 0 + 4{,}5(n - 1).$$

Решив его, найдем, что $n = 56\frac{5}{9}$. Корень уравнения — число не натуральное. Значит, число 250 не является членом данной арифметической прогрессии.

■ Пример 4. Возьмем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 1$ и $d = 3$. Докажем, что точки, изображающие на координатной плоскости члены этой прогрессии, лежат на одной прямой.

Изобразим сначала точками на координатной плоскости несколько первых членов прогрессии. Для этого по горизонтальной оси будем откладывать номер члена, а по вертикальной — соответствующий член прогрессии (рис. 4.3). Мы видим, что все отмеченные точки лежат на прямой. Это и понятно: с каждым шагом по горизонтальной оси мы поднимаемся вверх на одно и то же число единиц, равное разности арифметической прогрессии (рис. 4.4).

Проведем теперь доказательство сформулированного утверждения. Для этого запишем формулу n-го члена данной прогрессии и упростим ее правую часть:

$$a_n = 1 + 3(n - 1),\ a_n = 3n - 2.$$

Мы видим, что зависимость n-го члена прогрессии от номера n является линейной. А это как раз и означает, что наше утверждение верно.

Заметим, что свойство, которое мы установили на примере, справедливо для любой арифметической прогрессии.

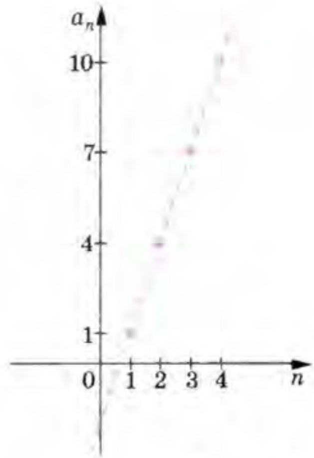


Рис. 4.3

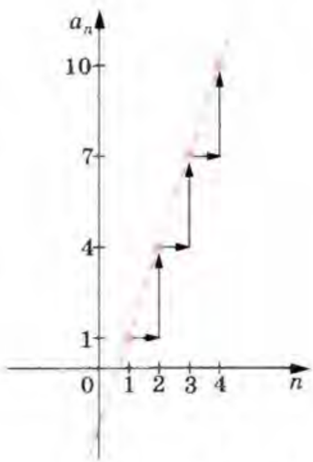


Рис. 4.4

Пример 5. Докажем, что последовательность (a_n), которая задана формулой $a_n = 1 - 2n$, является арифметической прогрессией.

Прежде чем проводить доказательство, вычислим первые несколько членов последовательности. Получим

$$-1;\ -3;\ -5;\ -7;\ -9;\ \dots\ .$$

Мы видим, что разность между соседними членами одна и та же. Чтобы доказать наше утверждение, необходимо убедиться, что постоянной является разность между любыми двумя соседними членами данной последовательности:

$$a_{n+1} - a_n = (1 - 2(n + 1)) - (1 - 2n) =$$
$$= 1 - 2n - 2 - 1 + 2n = -2.$$

Таким образом, при любом натуральном n разность $a_{n+1} - a_n$ постоянна. Значит, последовательность, заданная формулой $a_n = 1 - 2n$, есть арифметическая прогрессия, причем ее разность равна коэффициенту при переменной n.

Вообще

если последовательность задана формулой вида $a_n = kn + b$, где k и b — некоторые числа, то она является арифметической прогрессией, причем ее разность равна коэффициенту k.

А

586. Определите, является ли последовательность, описанная в задаче, арифметической прогрессией, и если да, то укажите ее разность.

а) В начале учебного года ученику 9 класса купили 300 тетрадей. Он тратит 6 тетрадей в неделю. Сколько тетрадей будет оставаться у него в конце каждой из первых шести недель учебного года?

б) В понедельник Андрей заполнил бак автомобиля, залив в него 40 л бензина. Во вторник он истратил 4 л, а в каждый следующий день тратил на 2 л бензина больше, чем в предыдущий. Сколько литров бензина оставалось в баке в каждый из дней недели с понедельника по пятницу, если он не делал дополнительных заправок?

587. (*Задание с выбором ответа.*) Какая из следующих последовательностей является арифметической прогрессией?

А. 1; 2; 3; 5; 8; ... . **В.** 16; 13; 10; 7; ... .
Б. 4; 9; 16; 25; ... . **Г.** 32; 16; 8; 4; ... .

588. Запишите следующие пять членов арифметической прогрессии:

а) 0; 4; 8; 12; ... ; б) 0; -3; -6; -9; ... .

589. Впишите все пропущенные члены арифметической прогрессии, если известно, что ее разность равна -3:

60; ...; 39.

Сколько членов прогрессии вы вписали?

590. В арифметической прогрессии, разность которой равна 12, известен восьмой член:

...; 54; ... .

Восстановите начало прогрессии. Начиная с какого номера члены этой прогрессии положительны? Сколько в ней отрицательных членов?

591. Известны пятый и шестой члены арифметической прогрессии:

...; 11; 7; ... .

Запишите все предшествующие члены этой прогрессии и все последующие до десятого члена включительно. Сколько положительных членов в этой прогрессии? Начиная с какого номера члены прогрессии отрицательны?

592. Первые шесть членов арифметической прогрессии (a_n) изображены точками на координатной плоскости (рис. 4.5, *а*, *б*). Найдите a_1 и d.

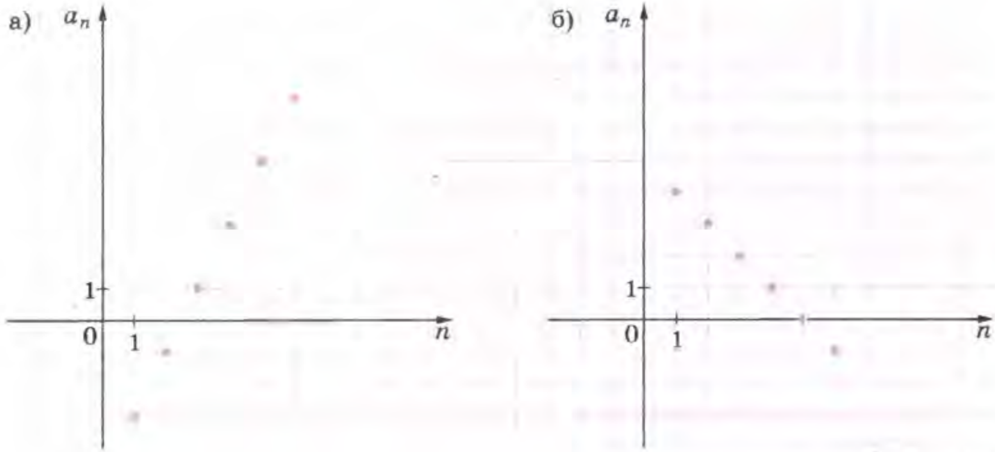


Рис. 4.5

593. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Запишите формулу ее n-го члена и найдите a_{15}, a_{26}, a_{101}:
а) $-14; -9; -4; ...;$ б) $12; 6; 0; ... .$

594. В арифметической прогрессии (y_n) известны первый член y_1 и разность d. Найдите y_{12} и y_{20}:
а) $y_1 = -9{,}9$; $d = 1{,}8$; б) $y_1 = 10$; $d = -0{,}2$.

595. В арифметической прогрессии (c_n) известны первый член c_1 и разность d. Найдите все ее члены с пятнадцатого по двадцатый включительно:
а) $c_1 = 3$; $d = -0{,}5$; б) $c_1 = -1$; $d = 5$.

596. а) Дана арифметическая прогрессия

$$-12;\ -10{,}5;\ -9;\ -7{,}5;\ ... .$$

Какой номер имеет член прогрессии, равный 48?
б) Первый член арифметической прогрессии равен 2,7, а разность равна $-0{,}3$. Какой номер имеет член этой прогрессии, равный $-2{,}7$?

597. а) Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии

$$1;\ 8;\ 15;\ 22;\ ... .$$

Определите, является ли членом этой прогрессии число 88; число 99. Если является, то укажите его номер и найдите предшествующий и последующий члены.
б) Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 15$ и $d = -4$. Определите, является ли членом этой прогрессии число -105; число -200. Если является, то

укажите его номер и найдите предшествующий и последующий члены.

598. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) d, если $a_1 = 11$, $a_{20} = 20{,}5$;

б) a_1, если $d = -3$, $a_{36} = -15$.

599. Самолет начал снижение на высоте 8000 м и в первые десять минут снижался на 500 м в минуту.

а) Запишите формулу для вычисления высоты h_n, на которой будет находиться самолет через n минут после начала снижения.

б) С помощью этой формулы определите, на какой высоте будет самолет через 3 мин после начала снижения; через 8 мин.

в) На какой минуте самолет окажется ниже 4000 м над уровнем земли?

г) Изобразите точками координатной плоскости десять членов последовательности (h_n).

600. В школе-новостройке сейчас учатся 200 учеников. Допустим, что каждый год число учащихся будет увеличиваться на 20 человек.

а) Запишите формулу для вычисления числа учащихся в школе через n лет.

б) Сколько учащихся будет в школе через 5 лет, если тенденция сохранится?

в) Школа рассчитана на обучение 350 учащихся. Через сколько лет будет до-стигнута норма?

г) Закончите построение столбчатой диаграммы, иллюстрирующей прирост учащихся в течение пяти лет (рис. 4.6).

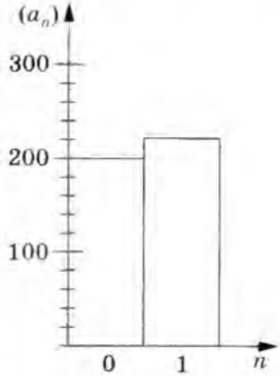


Рис. 4.6

Б

601. а) В арифметической прогрессии (a_n) известны $a_{15} = 5$ и $a_{20} = 40$. Найдите разность и первый член этой арифметической прогрессии.

б) В арифметической прогрессии (x_n) $x_{20} = 1{,}4$ и $x_{30} = 2{,}4$. Найдите разность и первый член этой арифметической прогрессии.

602. Известно, что (a_n) — арифметическая прогрессия. Выразите:

а) a_5 и a_{10} через a_3 и d;

б) a_7 и a_{12} через a_{10} и d;

в) a_{n+2} и a_{n-3} через a_n и d.

603. В арифметической прогрессии (b_n) третий член равен 10, а десятый 12,1. Найдите все члены прогрессии (b_n), расположенные между ними.

604. а) Между числами 6 и 30 вставьте пять чисел так, чтобы вместе с данными они образовали арифметическую прогрессию.
б) Между числами −7 и 23 вставьте три числа так, чтобы они вместе с данными образовали арифметическую прогрессию.

605. Начиная с какого номера члены арифметической прогрессии −101; −96; −91; ... положительны? Подумайте, как можно убедиться в том, что ваш ответ верен.

606. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = 10$, $d = -0{,}2$. Проверьте свой ответ.

607. В арифметической прогрессии (y_n) известны пятый и шестой члены: $y_5 = -150$ и $y_6 = -147$. Сколько членов этой прогрессии отрицательны? Проверьте свой ответ.

608. Определите, является ли последовательность, заданная формулой n-го члена, арифметической прогрессией (если является, то найдите ее разность):

а) $a_n = 2n + 5$; б) $a_n = 10 - 3n$; в) $a_n = n^2$; г) $a_n = -4n$.

609. Докажите, что если последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, то ее члены, взятые через один, также образуют арифметическую прогрессию. Конкретизируйте это примером.

610. а) Пусть последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Докажите, что если к каждому члену этой прогрессии прибавить одно и то же число, то полученная последовательность также будет арифметической прогрессией. Конкретизируйте это примером.
б) Докажите, что если каждый член некоторой арифметической прогрессии (a_n) умножить на одно и то же число, то полученная последовательность также будет арифметической прогрессией. Конкретизируйте это примером.

611. (*Задача-исследование.*)
1) Рассмотрите арифметическую прогрессию 4; 8; 12; ... . Возьмите какой-нибудь член этой прогрессии, кроме первого, и убедитесь в том, что он равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов.
2) Докажите, что любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

3) Найдите члены последовательности, обозначенные буквами, если известно, что эта последовательность — арифметическая прогрессия:

а) a_1; 12; a_3; 18; a_5; a_6; ... ;

б) −7; a_2; −17; ...; a_{15}; −82; a_{17}; ... .

4.2 Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Напомним известную историю о знаменитом немецком математике К. Гауссе (1777—1855). В детстве на уроке математики он поразил учителя тем, что очень быстро сложил все натуральные числа от 1 до 100. Гаусс записал только ответ 5050, выполнив все вычисления в уме. Учитель, который надеялся, что эта задача надолго займет учащихся, был обескуражен. Однако он смог понять, что способности этого мальчика удивительны. Никто не знает, как считал Гаусс. Но возможно, что он воспользовался таким приемом:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1 \end{array} \\ \hline \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{100 \text{ раз}} \end{array}$$

Произведение $101 \cdot 100$ дает нам удвоенную сумму всех натуральных чисел от 1 до 100. Поэтому сама эта сумма равна

$$\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$$

Вспоминая историю о К. Гауссе, мы на самом деле нашли сумму первых ста членов арифметической прогрессии:

$$1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 99;\ 100;\ \ldots .$$

Метод Гаусса можно применить и к любой другой арифметической прогрессии. Найдем, например, сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n):

$$3;\ 7;\ 11;\ 15;\ 19;\ \ldots .$$

Сначала найдем 20-й член этой прогрессии. Так как $a_1 = 3$ и $d = 4$, то $a_{20} = 3 + 4 \cdot 19 = 79$.

Обозначим сумму первых двадцати членов через S. Тогда

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} S = 3 + 7 + 11 + \ldots + 71 + 75 + 79 \\ S = 79 + 75 + 71 + \ldots + 11 + 7 + 3 \end{array} \\ \hline 2S = \underbrace{82 + 82 + 82 + \ldots + 82 + 82 + 82}_{20 \text{ раз}} \end{array}$$

Таким образом,

$$2S = 82 \cdot 20.$$

Отсюда

$$S = \frac{82 \cdot 20}{2} = 820.$$

Возьмем теперь произвольную арифметическую прогрессию

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ ...\ ;\ a_n;\ ...\ .$$

Сумму первых n членов прогрессии обозначим символом S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 ... + a_n.$$

Найдем эту сумму, рассуждая так же, как и в рассмотренных примерах. Запишем сумму дважды. В первой строке начнем с a_1 и будем получать каждый следующий член прибавлением разности d. Во второй строке начнем с a_n и будем получать каждый следующий член вычитанием разности d:

$$+\begin{array}{l} S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n-1) \cdot d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - (n-1) \cdot d) \end{array}$$

Каждая пара чисел, расположенных друг под другом, в сумме дает $a_1 + a_n$. Всего таких пар n. Сложив записанные равенства, получим

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... (a_1 + a_n)}_{n \text{ раз}}.$$

Отсюда

$$2S_n = (a_1 + a_n)n,$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Таким образом, мы получили *формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии*:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}.$$

Эту формулу удобно применять, когда известны первый и последний из суммируемых членов прогрессии.

■ Пример 1. Найдем сумму всех натуральных чисел от 1 до 1000:

$$1 + 2 + 3 + ... + 1000.$$

Слагаемые в этой сумме образуют арифметическую прогрессию. Подставив в формулу суммы $a_1 = 1$, $a_n = 1000$, $n = 1000$, получим:

$$S_{1000} = \frac{(1 + 1000) \cdot 1000}{2} = 500\,500.$$

Формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии можно записать и в другом виде.

Выразим a_n через a_1 и d. Получим

$$S_n = \frac{(a_n + a_1 + d(n-1)) \cdot n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1)) \cdot n}{2}.$$

Перепишем формулу в более удобном виде:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.}$$

■ Пример 2. Студент, устраиваясь на работу разносчиком газет, ознакомился с условиями оплаты: в первый месяц он получит 1500 р., а в каждый следующий месяц в течение года он будет получать на 50 р. больше, чем в предыдущий. Сколько студент заработает за год?

Имеем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 1500$, $d = 50$. Надо найти сумму первых двенадцати ее членов:

$$S_{12} = \frac{(2 \cdot 1500 + 50 \cdot 11) \cdot 12}{2} = 21\,300.$$

Таким образом, студент заработает 21 300 р.

■ Пример 3. Найдем сумму всех двузначных чисел, кратных 3.

Последовательность 12; 15; 18; ... ; 99 является арифметической прогрессией, разность которой равна 3. Нам известны первый и последний члены этой прогрессии: $a_1 = 12$, $a_n = 99$. Чтобы воспользоваться формулой суммы, надо найти число членов этой прогрессии, или, что то же самое, номер последнего члена.

Подставив в формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_1 = 12$, $a_n = 99$ и $d = 3$, получим уравнение

$$99 = 12 + 3(n - 1).$$

Решив уравнение, найдем, что $n = 30$.

Теперь можно найти требуемую сумму. При этом считать можно, вообще говоря, по любой формуле суммы, но удобнее воспользоваться первой:

$$S_{30} = \frac{(12 + 99) \cdot 30}{2} = 1665.$$

Заметим, что число суммируемых членов можно было бы найти по-другому. Так как $99 : 3 = 33$, то в первой сотне содержится 33 числа, кратных 3. Среди них три числа — однозначные. Значит, двузначных чисел, кратных 3, остается $33 - 3 = 30$.

A

612. а) Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до 500.
б) Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до n.

613. Пользуясь формулой суммы первых n натуральных чисел, выведенной в упражнении **612**, *б* выполните следующее задание:
а) найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до 1500;
б) определите, сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы в сумме получить 210.

614. Треугольные числа изображаются треугольниками, составленными из шаров (см. рис. 4.2). Определите:
а) сколько шаров в двадцать пятом треугольнике;
б) в каком по счету треугольнике 55 шаров.

615. Запишите сумму первых десяти членов данной арифметической прогрессии и вычислите ее:
а) 0,2; 0,5; 0,8; ...; б) −50; −35; −20; ... .

616. Дана сумма, слагаемые которой являются членами арифметической прогрессии. Впишите недостающие слагаемые и найдите значение этой суммы:
а) $23 + 27 + 31 + ... + 51$; б) $28 + 25 + 22 + ... + 1$.

617. Последовательность (x_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:
а) S_{10}, если $x_1 = 38$, $d = -4$;
б) S_{64}, если $x_1 = -25$, $d = 3$;
в) S_{15}, если $x_1 = 1{,}2$, $d = 1{,}5$.

618. В первом ряду лекционной аудитории 20 мест, а в каждом следующем ряду на 4 места больше, чем в предыдущем. В аудитории 16 рядов. Сколько всего мест в аудитории?

619. В амфитеатре концертного зала 15 рядов, и число кресел в каждом ряду увеличивается на 2 по сравнению с предыдущим. В последнем ряду 35 кресел. Сколько кресел в первом ряду? Сколько всего кресел в амфитеатре?

620. Продолжительность прогулки грудного ребенка в первый день составляет 20 мин. Затем она увеличивается ежедневно на 10 мин и доводится до 2 ч в день. На какой по счету день длительность прогулки достигнет 2 ч и сколько всего времени за эти дни ребенок проведет на воздухе?

621. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 3n + 5$. Найдите:
а) S_{10}; б) S_{20}; в) S_n.

622. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой

$$a_n = 10 - 4n.$$

а) Составьте формулу для вычисления суммы первых n членов этой прогрессии.

б) Пользуясь этой формулой, найдите сумму первых тридцати членов этой прогрессии.

в) Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, сложили, если в сумме получилось -120?

5

623. Найдите сумму:

а) всех натуральных чисел от 45 до 90;

б) всех целых чисел от -100 до -65;

в) всех двузначных чисел;

г) всех трехзначных чисел.

624. Найдите сумму:

а) четных чисел от 30 до 98;

б) нечетных чисел от 15 до 85.

625. Найдите сумму:

а) всех двузначных чисел, кратных 5;

б) всех трехзначных чисел, кратных 15;

в) всех двузначных чисел, которые не делятся на 6.

626. Найдите сумму:

а) всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 120;

б) всех натуральных чисел, кратных 4 и заключенных между 50 и 150;

в) всех натуральных чисел, меньших 100, которые не делятся на 5.

627. Треугольники, соответствующие треугольным числам, составляют пирамиду (рис. 4.7).

а) Сколько шаров в основании пирамиды, если она состоит из 8 слоев?

б) Можно ли найти общее число шаров в пирамиде из 8 слоев по формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии? Сколько всего шаров в такой пирамиде?

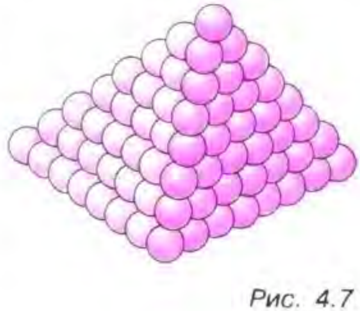


Рис. 4.7

628. Круги укладывают в форме шестиугольника так, как показано на рисунке 4.8: в центре расположен 1 круг, и вокруг него уложено 6 кругов, образующих первый пояс. Рассмотрите рисунок и определите закономерность, по которой увеличивается число кругов в каждом следующем поясе.

а) Сколько всего кругов в шестиугольнике, содержащем 3 пояса; 10 поясов?

б) Сколько поясов содержится в шестиугольнике, если в нем 127 кругов?

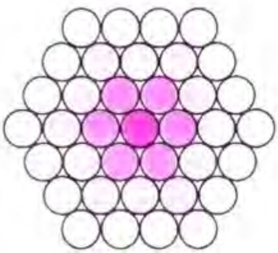


Рис. 4.8

629. Фигура, изображенная на рисунке 4.9, состоит из столбцов, каждый из которых на 2 единицы длиннее предыдущего. Основание каждого столбца равно 1.

а) Найдите площадь фигуры (в кв. ед.), если в ней 8 столбцов; 100 столбцов; n столбцов.

б) Сколько всего столбцов в фигуре, если ее площадь равна 100 кв. ед.?

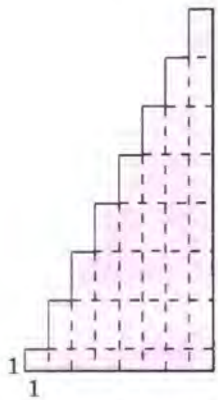


Рис. 4.9

630. Игорь начал утренние тренировки в беге с 2 км в день. Каждую неделю он решил увеличивать эту дистанцию в арифметической прогрессии так, чтобы в одиннадцатую неделю пробегать 4 км в день. На какое расстояние ему надо увеличивать дистанцию еженедельно? Сколько всего километров он пробежит за 11 недель?

631. Премиальный фонд 10 000 р. надо разделить между десятью сотрудниками так, чтобы каждый следующий получил на 150 р. больше предыдущего. Как это сделать?

632. а) В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 5$, $d = 4$. Найдите сумму всех членов этой прогрессии с 20-го по 30-й включительно.

б) В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 40$, $d = -3$. Найдите сумму всех членов этой прогрессии с 25-го по 35-й включительно.

633. а) В арифметической прогрессии (b_n) $b_6 = 20$, $b_{10} = 18$. Найдите S_{20}.

б) В арифметической прогрессии (c_n) $c_5 = 16$, $c_{15} = 36$. Найдите S_{25}.

634. Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 4,6; 4,2; ... .

635. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии −102; −99; ... .

636. Сколько натуральных чисел, кратных 5, надо сложить, чтобы получить сумму, большую 275? большую 330?

637. Найдите сумму, слагаемые которой являются членами арифметической прогрессии:

а) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n$; б) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$.

638. Известно, что четыре положительных четных числа образуют арифметическую прогрессию. Их сумма равна 100. Найдите эти числа. Сколько решений имеет задача?

4.4 Геометрическая прогрессия

Известны телевизионные игры, в которых участник отвечает на предлагаемые ведущим вопросы и за верные ответы ему по определенным правилам начисляется выигрыш. Условия игры могут быть такими: за первый правильный ответ участнику начисляется 500 р. и с каждым следующим правильным ответом выигранная сумма увеличивается еще на 500 р. Таким образом, выигрыш (в рублях) растет в арифметической прогрессии:

$$500;\ 1000;\ 1500;\ 2000;\ 2500;\ 3000;\ \ldots .$$

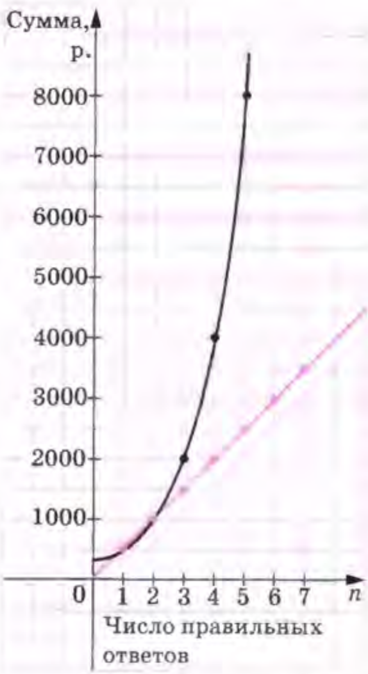


Рис. 4.10

Изменим условия игры: пусть за первый правильный ответ участник по-прежнему получает 500 р., но с каждым следующим правильным ответом выигранная сумма удваивается. Теперь начисляемые игроку суммы (в рублях) образуют такую последовательность:

$$500;\ 1000;\ 2000;\ 4000;\ 8000;\ \ldots .$$

Это уже не арифметическая прогрессия. Здесь другая закономерность: каждый следующий член последовательности получается из предыдущего *умножением на одно и то же число*, в данном случае на 2. Для таких последовательностей тоже есть специальное название — *геометрическая прогрессия*.

Для сравнения изобразим две наши последовательности точками на координатной плоскости (рис. 4.10). Арифметическая прогрессия растет равномерно; она изображается точками, расположенными на прямой. Скорость роста геометрической прогрессии все время увеличивается, и точки, соответствующие ее членам, резко «уходят» вверх. Все они лежат на кривой, которая носит красивое название *экспонента*. С этой кривой вы познакомитесь в старших классах. Заметим только, что чем выше поднимается экспонента, тем она становится круче.

Разбирая пример, мы, в сущности, уже объяснили, какую последовательность называют геометрической прогрессией. Дадим теперь «официальное» определение.

Определение

Геометрической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

Заметим, что первый член геометрической прогрессии также считают отличным от нуля.

Число, на которое умножаются члены прогрессии, называют *знаменателем геометрической прогрессии*. Его принято обозначать буквой q. Используя это обозначение, можно записать в символической форме правило, по которому строится геометрическая прогрессия:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Таким образом, геометрическая прогрессия, так же как и арифметическая прогрессия, определяется с помощью рекуррентного соотношения; только действие сложения заменяется умножением.

Записанную формулу можно заменить такой:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$$

Это равенство выражает очевидный факт: *в геометрической прогрессии отношение любого члена, начиная со второго, к предыдущему члену постоянно и равно знаменателю прогрессии*. Заметим, что именно этим объясняется выбор буквы q для обозначения знаменателя прогрессии: это первая буква французского слова *quotient*, которое переводится как «частное».

Приведем примеры геометрических прогрессий.

Пусть $b_1 = 1$ и $q = 3$. Получаем геометрическую прогрессию:

$$1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 243;\ \ldots .$$

Каждый следующий ее член больше предыдущего, т. е. это возрастающая последовательность.

Пусть $b_1 = 8$ и $q = \frac{1}{2}$. Прогрессия начинается так:

$$8;\ 4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \ldots .$$

Это убывающая последовательность.

Пусть $b_1 = 5$ и $q = -2$. В этом случае знаки у членов прогрессии чередуются, и она имеет вид:

$$5;\ -10;\ 20;\ -40;\ 80;\ -160;\ 320;\ \dots\ .$$

Заметим, однако, что у геометрических прогрессий, которые встречаются в реальной жизни, члены всегда положительны. И если $q > 1$, то такая прогрессия является возрастающей; если $0 < q < 1$, то убывающей.

Для геометрической прогрессии, как и для арифметической, полезно иметь формулу n-го члена. Прежде чем получить формулу в общем виде, рассмотрим такую задачу:

Задача. Известно, что бактерии размножаются делением: одна бактерия делится на две; каждая из этих двух в свою очередь тоже делится на две, и получаются четыре бактерии; из этих четырех в результате деления получаются восемь бактерий и т. д. Результат каждого удвоения будем называть поколением. В лабораторном опыте численность первого поколения бактерий равнялась 1000. Какой будет численность колонии бактерий в десятом поколении?

Будем последовательно вычислять численность колонии бактерий второго, третьего, четвертого и т. д. поколений.

Номер поколения	Численность колонии бактерий
1	$G_1 = 1000$
2	$G_2 = 1000 \cdot 2 = 2000$
3	$G_3 = (1000 \cdot 2) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^2 = 4000$
4	$G_4 = (1000 \cdot 2^2) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^3 = 8000$
5	$G_5 = (1000 \cdot 2^3) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^4 = 16\ 000$

Понятно, что численность колонии 10-го поколения должна быть $G_{10} = 1000 \cdot 2^9$. И вообще в n-м поколении должно быть $G_n = 1000 \cdot 2^{n-1}$ бактерий.

Формула $G_n = 1000 \cdot 2^{n-1}$, которую мы составили, является формулой n-го члена геометрической прогрессии

$$1000;\ 1000 \cdot 2;\ 1000 \cdot 2^2;\ 1000 \cdot 2^3;\ \dots\ .$$

Проведем теперь такие же рассуждения для произвольной геометрической прогрессии. Пусть последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Тогда

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$
$$b_3 = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$
$$b_4 = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3;$$
$$b_5 = (b_1 \cdot q^3) \cdot q = b_1 \cdot q^4;$$
$$\dots$$

И вообще

$$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}}.$$

Записанное равенство является *формулой n-го члена геометрической прогрессии*, первый член которой равен b_1, а знаменатель равен q.

Обратите внимание: переменная n в этой формуле содержится в показателе степени, поэтому зависимость b_n от n называют *экспоненциальной* (от латинского слова *exponentis* — показывающий). С этим связано и происхождение названия линии (экспонента), по которой располагаются точки, изображающие геометрическую прогрессию (см. рис. 4.10).

Итак, теперь у вас есть формулы n-го члена как для арифметической, так и для геометрической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad \text{и} \quad b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Давайте сопоставим их. Вы видите, что вторую формулу можно было бы получить из первой, заменив сложение умножением, а умножение возведением в степень.

Рассмотрим несколько примеров использования формулы n-го члена геометрической прогрессии.

■ Пример 1. Известны первый член и знаменатель геометрической прогрессии: $b_1 = 324$ и $q = \frac{1}{3}$. Найдем восьмой ее член.

Подставим в формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$ значения $b_1 = 324$ и $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$.

$$b_8 = 324 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{324}{3^7} = \frac{4 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{4}{27}.$$

■ Пример 2. Найдем n-й член геометрической прогрессии (x_n), если $x_1 = 12$ и $q = 3$.

Подставив в формулу $x_n = x_1 q^{n-1}$ значения x_1 и q, получим

$$x_n = 12 \cdot 3^{n-1}.$$

Эту формулу можно записать в более красивом виде, перейдя от показателя $n - 1$ к показателю n:

$$x_n = 12 \cdot 3^{n-1} = \frac{12 \cdot 3^n}{3} = 4 \cdot 3^n, \quad \text{т. е.}$$

$$x_n = 4 \cdot 3^n.$$

■ **Пример 3.** В 2005 г. население нового района составляло 38 тыс. человек. Ежегодно оно увеличивалось в 1,2 раза. Сколько жителей будет в районе в 2015 г., если эта тенденция сохранится?

Запишем число жителей района в 2005 г., через год и т. д. Получим геометрическую прогрессию. Ее первый член равен 38 тыс., а знаменатель равен 1,2. Чтобы узнать, сколько жителей будет в районе в 2015 г., т. е. через 10 лет, нужно вычислить 11-й член этой прогрессии:

N_1	N_2	N_3	...	N_{11}
38 тыс.	38 тыс. $\cdot$ 1,2	38 тыс. $\cdot$ $1{,}2^2$	...	38 тыс. $\cdot$ $1{,}2^{10}$
2005 г.	через 1 год	через 2 года	...	через 10 лет

Вычислять значение выражения $38\,000 \cdot 1{,}2^{10}$, естественно, нужно с помощью калькулятора; при этом число, появившееся на экране, следует округлить до тысяч:

$$N_{11} = 38\,000 \cdot 1{,}2^{10} \approx 235\,000.$$

Таким образом, при сохранении тенденции в 2015 г. в районе будет 235 тыс. жителей.

Заметим, что значение выражения $38\,000 \cdot 1{,}2^{10}$ с помощью калькулятора можно находить по-разному. Если на калькуляторе есть кнопка $\boxed{y^x}$, то результат можно найти такой последовательностью действий:

$$1{,}2 \; \boxed{y^x} \; 10 \; \boxed{\times} \; 38000 \; \boxed{=}$$

Но можно обойтись и без этой кнопки, вычислив значение выражения $1{,}2^{10}$ путем повторных умножений.

■ **Пример 4.** Докажем, что последовательность (y_n), заданная формулой

$$y_n = 4 \cdot 5^n,$$

является геометрической прогрессией.

Найдем отношение $\frac{y_{n+1}}{y_n}$. Получим $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{4 \cdot 5^{n+1}}{4 \cdot 5^n} = 5$.

Так как отношение $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ постоянно, то данная последовательность — геометрическая прогрессия. Ее знаменатель равен 5. (Подтвердите для себя этот вывод, вычислив несколько первых членов прогрессии по формуле n-го члена.)

А

639. Выпишите следующие три члена геометрической прогрессии:

а) 2; 10; 50; ...; в) −1000; 100; −10; ...;

б) 9; 3; 1; ...; г) $\frac{1}{16}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \ldots$.

640. В геометрической прогрессии со знаменателем 11 известен четвертый член. Выпишите все предыдущие члены этой прогрессии:

...; 14 641; ... .

641. Запишите два предыдущих и два последующих члена геометрической прогрессии, если ее знаменатель равен $\frac{1}{5}$:

а) ...; 125; ...; б) ...; $\frac{1}{5}$; ... .

642. Андрей и Борис, готовясь к зачету по английскому языку, каждый день с понедельника по пятницу выписывали слова из словаря. Андрей ежедневно увеличивал число выписываемых слов в геометрической прогрессии, а Борис — в арифметической.

а) Закончите заполнение таблицы, записав в соответствующие строки число слов, выписанных Андреем и Борисом в каждый из пяти дней.

День недели	1	2	3	4	5
Андрей	16	24			
Борис	16	24			

б) Отметьте члены полученных последовательностей точками в координатной плоскости.

643. (*Задание с выбором ответа.*) Какая последовательность не является геометрической прогрессией?

А. 6; 3; 12; 24; 48. **В.** 30; 20; 10; 0; −10.
Б. −100; 10; −1; 0,1; −0,1. **Г.** 162; 54; 18; 6; 2.

644. Запишите первые шесть членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что:

а) $b_1 = -4$, $q = \frac{1}{2}$; б) $b_1 = 0{,}001$, $q = -10$.

В каждом случае задайте прогрессию с помощью рекуррентной формулы и запишите формулу n-го члена для этой прогрессии.

645. Последовательность (y_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) y_8 и y_{11}, если $y_1 = \frac{1}{81}$ и $q = 3$;

б) y_6 и y_9, если $y_1 = 256$ и $q = \frac{1}{2}$;

в) y_7 и y_{10}, если $y_1 = \frac{3}{8}$ и $q = -2$.

646. Фирма, выпускающая игрушки, начала изготовлять для детей набор столярных инструментов, который стал пользоваться популярностью у покупателей. В первый год фирма выпустила 2000 наборов, а в каждый следующий год число выпущенных наборов увеличивалось в 1,5 раза по сравнению с предыдущим. Сколько наборов было выпущено в течение пятого года?

647. Вернитесь к задаче о колонии бактерий (с. 226).
а) Пусть численность первого поколения бактерий составляла 300 единиц. Определите численность десятого поколения бактерий.
б) Численность шестого поколения бактерий составила 12 800 единиц. Какова была численность колонии бактерий первого поколения?

648. Мяч бросают вертикально вниз, и после каждого удара о землю он подскакивает на высоту, равную $\frac{4}{5}$ предыдущей.

а) После первого удара о землю мяч подскочил на высоту, равную 250 см. На какой высоте окажется мяч после пятого удара о землю?
б) После четвертого удара о землю мяч подскочил на высоту, равную 64 см. На какую высоту поднялся мяч после первого удара?

649. Ученик начальной школы решил в течение декабря копить деньги к Новому году. Действовать он решил следующим образом: 1 декабря положить в копилку 1 к., 2 декабря — 2 к., 3 декабря — 4 к. и т. д., ежедневно удваивая вкладываемую сумму.

а) Сможет ли он выполнить свое намерение? Сколько рублей ему пришлось бы положить в копилку 31 декабря?

б) Сколько рублей ему придется положить в копилку 31 декабря, если он изменит свой план и будет ежедневно увеличивать вкладываемую сумму на 10 к.?

650. Три фирмы A, B и C одновременно начали свою деятельность, и в первый год каждая из них получила доход 5 млн р. В последующие пять лет их доход рос следующим образом: в фирме A доход ежегодно увеличивался на 1 млн р.; в фирме B доход ежегодно возрастал в 1,8 раза; в фирме C доход ежегодно увеличивался в 1,5 раза. Какой из графиков соответствует каждой из этих ситуаций (рис. 4.11)? Для каждой из этих последовательностей запишите формулу n-го члена.

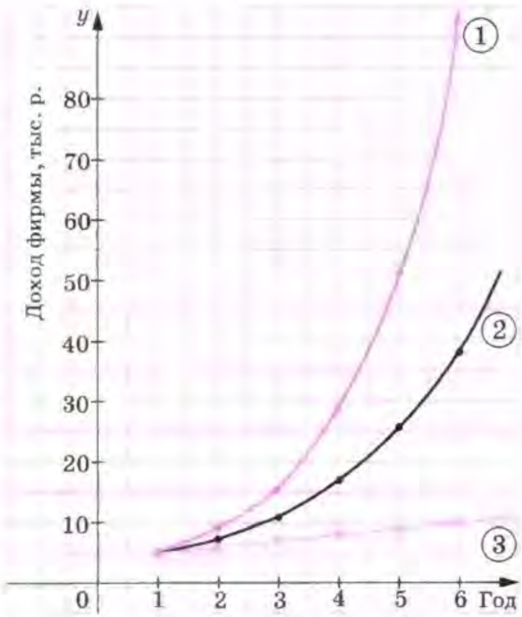


Рис. 4.11

651. Маятник, раскачиваясь, прошел сначала расстояние, равное 50 см (рис. 4.12), а затем в каждое следующее движение — расстояние, составляющее 80% предыдущего. Рассмотрите последовательность, составленную из расстояний, которые проходил маятник за каждое качание.

а) Объясните, почему эта последовательность является геометрической прогрессией, и выпишите ее первые пять членов.

б) Отметьте найденные члены прогрессии точками в координатной плоскости.

в) Запишите формулу n-го члена для этой прогрессии.

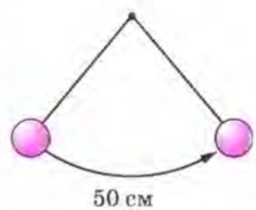


Рис. 4.12

652. Является ли геометрической или арифметической прогрессией последовательность, n-й член которой вычисляется по формуле:

а) $b_n = 2 \cdot 3^n$; б) $b_n = 2 - 3n$; в) $b_n = 2 - 3^n$; г) $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$?

Б

653. Дана геометрическая прогрессия. Найдите ее знаменатель и выпишите следующие три члена этой прогрессии:

а) $2;\ 2\sqrt{2};\ 4;\ 4\sqrt{2};\ \ldots$; б) $5;\ \sqrt{5};\ 1;\ \frac{\sqrt{5}}{5};\ \ldots$.

В каждом случае запишите формулу n-го члена этой прогрессии и найдите: 15-й член; 20-й член.

654. Дан треугольник, периметр которого равен 64 см. Середины сторон этого треугольника являются вершинами второго треугольника, середины сторон второго треугольника являются вершинами третьего треугольника и т. д. (рис. 4.13).
а) Найдите периметр восьмого треугольника.
б) Периметр какого по счету треугольника равен 4 см?

Рис. 4.13

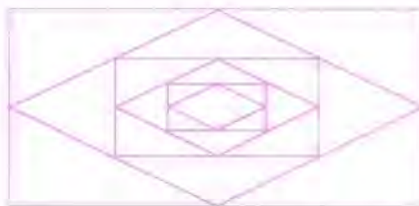


Рис. 4.14

655. Дан прямоугольник. Середины сторон этого прямоугольника соединили отрезками и получили ромб. Середины сторон ромба соединили отрезками и получили прямоугольник и т. д. (рис. 4.14). В каком отношении находятся площади двух соседних фигур (последующей и предыдущей)?
а) Какой фигурой — прямоугольником или ромбом — является восьмой по счету четырехугольник? Если его площадь равна $\frac{3}{4}$ см^2, то чему равна площадь исходного прямоугольника?
б) Площадь какого по счету четырехугольника равна 6 см^2? Какая это фигура — прямоугольник или ромб?

656. Дан квадрат, сторона которого равна 12 см. Середины сторон квадрата являются вершинами второго квадрата, середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т. д. (рис. 4.15).

Рис. 4.15

а) Площади первого, второго, третьего и т. д. квадратов образуют некоторую последовательность. Объясните, почему эта последовательность является геометрической прогрессией. Запишите несколько ее членов. Запишите формулу n-го члена этой последовательности.

б) Запишите несколько членов последовательности, составленной из длин сторон квадратов. Является ли эта последовательность геометрической прогрессией? Запишите формулу n-го члена этой последовательности.

657. а) В геометрической прогрессии (x_n) $x_{10} = \frac{1}{243}$, $q = \frac{1}{3}$. Найдите первый член этой прогрессии.

б) В геометрической прогрессии (b_n) $b_{12} = 32$, $q = -2$. Найдите первый член этой прогрессии.

658. а) Известны два члена геометрической прогрессии (y_n): $y_3 = 25$ и $y_6 = -3125$. Найдите знаменатель прогрессии q и выпишите все ее члены с первого по шестой.

б) Известны два члена геометрической прогрессии (b_n): $b_2 = 10$ и $b_5 = 10^{-2}$. Выпишите все члены этой прогрессии с первого по пятый включительно.

659. а) Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если известны два ее члена: $b_3 = 10^7$ и $b_5 = 10^5$. Восстановите прогрессию с первого по пятый член включительно. Сколько решений у вас получилось?

б) Известны два члена геометрической прогрессии (c_n): $c_4 = -48$ и $c_8 = -768$. Выпишите все ее члены с первого по шестой. Сколько решений у вас получилось?

660. а) Между числами 3 и 27 вставьте три числа так, чтобы вместе с данными они образовывали геометрическую прогрессию.

б) Между числами 0,2 и 12,8 вставьте два числа так, чтобы вместе с данными числами они образовывали геометрическую прогрессию.

661. Является ли арифметической или геометрической прогрессией последовательность:

а) x; x^2; x^3; x^4; x^5; ..., где $x \neq 0$;

б) x; $x + 1$; $x + 2$; $x + 3$; $x + 4$; ...;

в) x; $2x$; $3x$; $4x$; $5x$; ...;

г) x; ax; a^2x; a^3x; a^4x; ..., где $x \neq 0$ и $a \neq 0$?

662. Пусть последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Является ли геометрической прогрессией последовательность, которая получится, если:

а) к каждому члену последовательности (b_n) прибавить одно и то же не равное нулю число;

б) каждый член последовательности (b_n) умножить на одно и то же не равное нулю число?

663. (*Задача-исследование.*)

1) Рассмотрите геометрическую прогрессию

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ \dots\ .$$

Возьмите любой член этой прогрессии и убедитесь в том, что он равен среднему геометрическому двух соседних членов. (Напомним, что среднее геометрическое двух положительных чисел a и b равно $\sqrt{ab}$.)

2) Пусть последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, членами которой являются положительные числа. Докажите, что любой член, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов.

3) Найдите члены последовательности, обозначенные буквами, если известно, что эта последовательность — геометрическая прогрессия, в которой $q > 0$:

а) b_1; 6; b_3; 54; b_5; b_6; ...;

б) 9; b_2; 27; ...; b_6; 243; b_8; ... .

4.5 Сумма первых n членов геометрической прогрессии

С геометрической прогрессией связано немало легенд. Одну из них, пожалуй наиболее известную, вы уже слышали, когда изучали степени.

По этой легенде, индийский принц приказал наградить изобретателя шахмат чем только тот пожелает. Изобретатель обратился к принцу с весьма скромной на первый взгляд просьбой: за первую клетку шахматной доски он попросил одно зерно пшеницы, за вторую — в два раза больше, т. е. 2 зерна, за четвертую — 8 зерен и т. д. до 64-й клетки. Принц был поражен, когда выяснилось, что выполнить просьбу невозможно.

Общее число зерен, которое попросил изобретатель, равно сумме членов геометрической прогрессии

$$1;\ 2;\ 2^2;\ 2^3;\ ...;\ 2^{62};\ 2^{63}.$$

Вы уже знаете, что геометрическая прогрессия растет очень быстро, и, вероятно, догадываетесь, что эта сумма не так уж мала. Подсчитаем ее. Обозначим искомую сумму через S.

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}.$$

Чтобы не суммировать такое большое число слагаемых, воспользуемся следующим приемом: умножим обе части записанного равенства на знаменатель прогрессии 2 и вычтем из полученного равенства первое:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63} + 2^{64} \\ \ \ S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63} \end{array} \\ \hline S = 2^{64} - 1. \end{array}$$

Если вычислить значение выражения $2^{64} - 1$, то получится огромное число, которое трудно даже прочитать:

$$18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Чтобы легче было представить, как велика награда, которую попросил изобретатель шахмат, добавим, что такого количества пшеницы не было выращено за все время существования земледелия на нашей планете!

Выведем теперь формулу, по которой можно суммировать члены произвольной геометрической прогрессии. При этом воспользуемся уже известным приемом, с помощью которого была найдена сумма $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}$.

Пусть последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Обозначим сумму первых n ее членов через S_n. Тогда

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + ... + b_1q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель прогрессии q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + ... + b_1q^n.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + ... + b_1q^{n-1} + b_1q^n \\ S_n \ \ = b_1 \ \ + b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1} \end{array} \\ \hline S_nq - S_n = b_1q^n - b_1, \text{ т. е.} \end{array}$$

$$S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1).$$

Чтобы выразить из последнего равенства S_n, разделим обе его части на $q - 1$. Получим *формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии*:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Понятно, что этой формулой можно пользоваться при условии, что знаменатель геометрической прогрессии не равен 1. Если же $q = 1$, то найти сумму членов прогрессии совсем просто. В этом случае все ее члены равны между собой, и прогрессия имеет вид b_1; b_1; b_1; ... . Поэтому если $q = 1$, то $S_n = nb_1$.

Рассмотрим примеры вычисления сумм с помощью полученной формулы. При этом заметим, что если $0 < q < 1$, то удобнее пользоваться формулой суммы, представленной в виде $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

■ Пример 1. Найдем сумму

$$12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}.$$

Слагаемые в этой сумме являются членами геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 12$, $q = \frac{1}{2}$. (Убедитесь в этом сами.) Всего слагаемых восемь. Подставим в формулу

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

значения b_1, q и n. Получим

$$S_8 = \frac{12 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{12 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2^8}\right)\right)}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) = 24 - \frac{2^3 \cdot 3}{2^8} = 24 - \frac{3}{32} = 23\frac{29}{32}.$$

■ Пример 2. Найдем сумму первых двадцати членов геометрической прогрессии

$$5;\ -10;\ 20;\ -40;\ 80;\ -160;\ \ldots .$$

Подставим в формулу $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ значения $b_1 = 5$, $q = -2$, $n = 20$:

$$S_{20} = \frac{5 \cdot ((-2)^{20} - 1)}{-2 - 1} = -\frac{5 \cdot 2^{20} - 5}{-3}.$$

Вычислить значение этого выражения можно «ручным способом» или с помощью калькулятора. Получим $S_{20} = -1\ 747\ 625$.

■ **Пример 3.** На автомобильном заводе проводили испытания экспериментального экземпляра машины новой марки. В первый день испытатель проехал на ней 20 км, а затем ежедневно увеличивал пробег в 1,5 раза. Сколько всего километров прошел автомобиль за неделю?

Расстояния (в км), которые ежедневно проходил автомобиль, составляют геометрическую прогрессию:

$$20;\ 20 \cdot 1{,}5;\ 20 \cdot 1{,}5^2;\ \dots .$$

В этой прогрессии $b_1 = 20$, $q = 1{,}5$, $n = 7$. По формуле

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

найдем:

$$S_7 = \frac{20 \cdot ((1{,}5)^7 - 1)}{1{,}5 - 1} = 40 \cdot ((1{,}5)^7 - 1).$$

Значение суммы вычислим с помощью калькулятора. Получим $S_7 \approx 640$.

Таким образом, за неделю машина прошла 640 км.

A

664. а) Дана геометрическая прогрессия 3; 6; 12; ... . Найдите S_6; S_n.

б) Дана геометрическая прогрессия 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ... . Найдите S_8; S_n.

665. Запишите выражение для нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 1$, $q = 5$; б) $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$.

666. Выпишите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), заданной формулой n-го члена, и найдите их сумму:

а) $b_n = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$; б) $b_n = -\frac{2}{81} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

667. Определите, сколько зерен пшеницы должен был отдать принц из описанной в тексте легенды за половину шахматной доски.

668. Почтальон заметил, что за 5 дней до праздника число разносимых им писем увеличивается ежедневно в 1,5 раза. Сколько всего писем разнесет почтальон за пять предпрздничных дней, если в первый из них он разнес 32 письма?

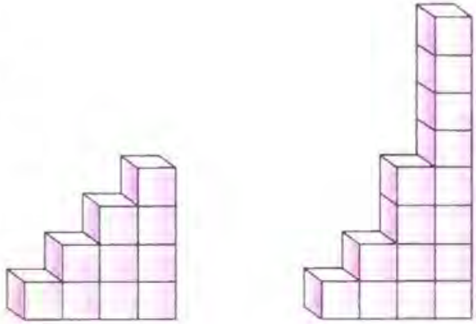


Рис. 4.16

669. Из одинаковых кубиков строятся две ступенчатые фигуры (рис. 4.16). В первом случае столбцы растут равномерно, а во втором высота каждого следующего столбца удваивается по сравнению с высотой предыдущего. Сколько кубиков потребуется для каждой из фигур, если в них содержится: по 8 столбцов; по n столбцов?

670. Андрей и Борис выписывали английские слова из словаря в течение пяти дней (см. задачу **642** из п. **4.4**). Сколько всего слов выписал каждый из них?

671. Во время колебательного движения расстояния, которые проходит маятник, уменьшаются с каждым следующим качанием. Если маятник движется так, как описано в задаче **651** из п. **4.4**, то какое расстояние он пройдет за 10 качаний?

672. При поступлении на работу будущий сотрудник был ознакомлен с условиями оплаты: в первый год его годовой заработок составит 120 000 р., а затем в каждый следующий год будет увеличиваться в 1,2 раза по сравнению с предыдущим. Сотрудник планирует проработать на этом месте не менее 10 лет. Сколько он заработает за 10 лет?

Б

673. Вычислите:

а) $4 + 12 + 36 + ... + 4 \cdot 3^9$; в) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - ... - 2^9$;

б) $-3 - 6 - 12 - ... - 3 \cdot 2^7$; г) $3^0 - 3^1 + 3^2 - ... + 3^{10}$.

674. Телефонистке поручено передать важную информацию трем другим телефонисткам. Каждая из них в свою очередь должна передать сообщение трем другим телефонисткам и т. д. На выполнение поручения у каждой телефонистки уходит 6 мин. Сколько телефонисток будут знать информацию через полчаса?

675. Фигура, изображенная на рисунке 4.17, состоит из прямоугольников, причем каждый следующий в 1,5 раза выше предыдущего. Найдите площадь фигуры, если она состоит из 5 прямоугольников; из n прямоугольников.

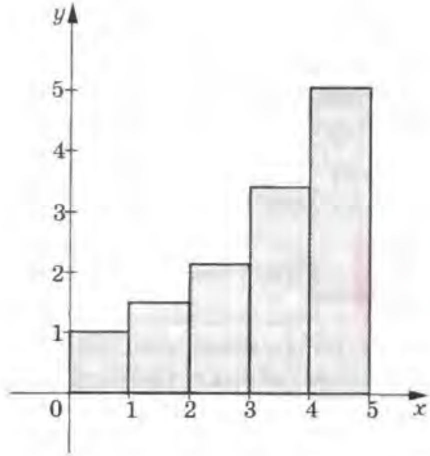


Рис. 4.17

676. Премиальный фонд 16 250 р. надо разделить между четырьмя сотрудниками так, чтобы каждый следующий получил в 1,5 раза больше предыдущего. Сколько получит каждый?

677. а) В геометрической прогрессии (b_n) $b_4 = \frac{3}{64}$, $q = \frac{1}{2}$. Найдите S_8.

б) Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии, если ее пятый член равен -9, а знаменатель равен -3.

678. а) Знаменатель геометрической прогрессии равен -5, а сумма первых трех ее членов равна 21. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

б) Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{1}{5}$, а сумма первых четырех ее членов равна $62\frac{2}{5}$. Найдите сумму первых двух членов этой прогрессии.

679. Сколько последовательных членов геометрической прогрессии 1; -2; 4; -8; 16; ... нужно сложить, чтобы получить сумму, равную: а) -85; б) 171?

680. Известно, что три целых числа, сумма которых равна 56, составляют геометрическую прогрессию. Первое из этих чисел равно 8. Найдите два других числа.

681. а) Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии (b_n), если известны два ее члена: $b_2 = -8$ и $b_8 = -\frac{1}{8}$.

б) Известны два члена геометрической прогрессии (b_n): $b_3 = 2$, $b_6 = -54$. Найдите S_6.

682. Упростите выражение:

а) $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + ... + x^{50}$, где $x \neq 0$ и $x \neq 1$;
б) $x + 2x + 3x + 4x + 5x + ... + 100x$;

в) $x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + ... + x^{100}$, где $x \neq 0$ и $x \neq \pm 1$;

г) $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \cdot x^5 \cdot ... \cdot x^{50}$.

683. Найдите значение выражения:

а) $100 + 100x + 100x^2 + 100x^3 + 100x^4$ при $x = 1{,}1$;

б) $10 - 10x + 10x^2 - 10x^3 + 10x^4 - 10x^5$ при $x = 0{,}3$.

4.5 Простые и сложные проценты

Процентные вычисления приходится выполнять в самых разных жизненных ситуациях, и очень часто это денежные расчеты. Рассмотрим два примера.

■ Пример 1. Пешеход перешел улицу в неположенном месте, и милиционер наложил на него штраф в 30 р. Штраф необходимо уплатить до 5 марта, после чего за каждый просроченный день будут начисляться дополнительно 2% от суммы штрафа. Сколько придется заплатить пешеходу, если он просрочит уплату штрафа на 10 дней?

Так как 2% от 30 р. составляют 0,6 р., то за каждый просроченный день сумма штрафа будет увеличиваться на 0,6 р. Таким образом, штраф будет расти в арифметической прогрессии. Если недисциплинированный пешеход просрочит оплату на один день, то ему придется заплатить

$$30 + 0{,}6 = 30{,}6 \text{ (р.)};$$

если он просрочит оплату на два дня, то он заплатит

$$30 + 0{,}6 \cdot 2 = 31{,}2 \text{ (р.)};$$

если он запоздает с оплатой на 3 дня, то придется заплатить

$$30 + 0{,}6 \cdot 3 = 31{,}8 \text{ (р.) и т. д.}$$

Понятно, что, опоздав с оплатой штрафа на 10 дней, он должен будет заплатить

$$30 + 0{,}6 \cdot 10 = 36 \text{ (р.)}.$$

■ Пример 2. Вы, вероятно, знаете, что за хранение денег в банке вкладчику начисляют проценты. Пусть на счет в банке, который выплачивает 20% годовых, положили 1000 р. и оставили эти деньги на счете на год. Тогда по истечении года к сумме вклада добавляются 20% от 1000 р. Если вкладчик не снимает в конце года со счета образовавшийся доход (как говорят, не снимает проценты), то в конце следующего года 20% начисляются банком уже на новую, увеличенную сумму и т. д. Подсчитаем, какая сумма при такой схеме начисления процентов окажется на счете через 10 лет.

Так как 20% от 1000 р. составляют 200 р., то через год на счете окажется

$$1000 + 200 = 1200 \text{ (р.)}.$$

К концу второго года 20% нужно находить уже от суммы в 1200 р. Так как $1200 \cdot 0{,}2 = 240$ (р.), то через 2 года на счете будет

$$1200 + 240 = 1440 \text{ (р.)}.$$

Так как 20% от 1440 р. составляют $1440 \cdot 0{,}2 = 288$ (р.), то через 3 года на счете окажется

$$1440 + 288 = 1728 \text{ (р.) и т. д.}$$

Действуя таким образом, с помощью последовательных вычислений найдем, что через 10 лет сумма вклада составит 6191,73 р.

Вы видите, что ответ на поставленный вопрос требует довольно длительных подсчетов. Поэтому рассмотрим еще и другой способ рассуждений, который приведет нас к нужному результату значительно быстрее.

Через год начальная сумма вклада увеличится на 20%, значит, новая сумма составит от первоначальной 120%. Таким образом, через год вклад увеличится в $\frac{120}{100} = 1{,}2$ раза и составит

$$1000 \cdot 1{,}2 \text{ (р.)}.$$

Еще через год образовавшаяся на счете сумма снова увеличится на 20%, т. е. в 1,2 раза. Следовательно, через 2 года на счете будет

$$(1000 \cdot 1{,}2) \cdot 1{,}2 = 1000 \cdot 1{,}2^2 \text{ (р.)}.$$

Далее, еще через год эта сумма тоже увеличится в 1,2 раза, и через 3 года на счете окажется

$$(1000 \cdot 1{,}2^2) \cdot 1{,}2 = 1000 \cdot 1{,}2^3 \text{ (р.) и т. д.}$$

Теперь видно, что вклад растет в геометрической прогрессии. Понятно, что через 10 лет сумма на счете составит

$$1000 \cdot 1{,}2^{10} \text{ (р.)}.$$

Воспользовавшись калькулятором, выполним вычисления. Получим уже известный результат: 6191,73 р.

Вы, наверное, заметили, что в рассмотренных примерах применялись две различные схемы начисления процентов. Если при вычислении процентов на каждом следующем шаге исходят из величины, полученной на предыдущем шаге, как это было во втором примере, то говорят о начислении *сложных* процентов («процентов на проценты»). Если же при вычислении процентов все время исходят из начального значения величины (как в примере 1), то речь идет о *простых* процентах.

А

684. Выразите десятичной дробью:
а) 25%; 38%; 60%; 80%;
б) 4%; 6%; 1%; 5%;
в) 0,3%; 0,1%; 0,5%; 0,02%;
г) 106%; 127%; 140%; 110%.

685. Пусть цена альбома равна a рублей. Какова будет его цена, если:
а) ее повысят на 20%, на 3%, на 5,5%, на 0,7%;
б) ее снизят на 65%, на 80%, на 2%, на 0,8%?

686. Ежемесячно семья Комаровых платит за электроэнергию 160 р. За каждый просроченный день взимается 0,5% с оплачиваемой суммы.
а) Сколько заплатят Комаровы за электроэнергию, если они просрочат оплату на 1 день; на n дней?
б) Через сколько дней им придется заплатить за электроэнергию ее двойную стоимость?

687. Цена нового автомобиля 360 000 р. При нормальных условиях эксплуатации его продажная стоимость с каждым годом уменьшается на 8% от первоначальной цены.
а) За сколько рублей сможет продать автомобиль его владелец через 5 лет эксплуатации? через n лет эксплуатации?
б) Через сколько лет продажная стоимость автомобиля станет меньше 150 000 р.? Чему будет равна эта стоимость?

688. В сентябре семья Савельевых заплатила 240 р. за школьные завтраки. В дальнейшем плата за завтраки ежемесячно увеличивалась на 2% от суммы, внесенной в сентябре.
а) Сколько заплатили Савельевы за завтраки в декабре?
б) Сколько всего было заплачено за завтраки с сентября по декабрь?

689. Клиент банка внес 1500 р. на вклад с годовым доходом 5%. Если никакие суммы со счета не снимаются и никаких дополнительных вложений не делается, то сколько денег будет на счете через: 1 год; 2 года; 3 года; 4 года? Запишите формулу для вычисления количества денег на счете через n лет.

Указание. Не забудьте, что здесь начисляются сложные проценты.

690. Вкладчик открыл счет в банке, внеся 2000 р. на вклад, годовой доход по которому равен 12%.
а) Какая сумма будет находиться на счете: через 1 год; через 2 года; через 5 лет?

б) Через сколько лет сумма на счете превзойдет удвоенный начальный вклад? (Получите ответ на вопрос, последовательно вычисляя суммы вклада по годам.)

в) Запишите формулу для вычисления количества денег на счете через n лет.

691. В банк внесен вклад в размере 500 р. Выясните, через сколько лет вклад удвоится, если банк выплачивает: 8% годовых; 10%; 16%. (Воспользуйтесь калькулятором.)

692. Виктор внес на несколько лет 5000 р. на счет, по которому начисляется 18% годовых. Вычислите:

а) каким будет доход по вкладу в первый год;

б) каким будет доход по вкладу за пятый год.

Образец. Вычислить доход по вкладу, например, за третий год можно двумя способами.

1-й способ. Сначала определим, сколько будет на его счете через два года: $5000 \cdot 1{,}18^2 = 6962$ (р.).

Теперь найдем доход, который он получит от этой суммы в следующем году: $6962 \cdot 0{,}18 = 1253{,}16$ (р.).

2-й способ. Определим, сколько будет на его счете через 2 года и через 3 года, и найдем разницу:

$$5000 \cdot 1{,}18^2 = 6962 \text{ (р.)},$$
$$5000 \cdot 1{,}18^3 = 8215{,}16 \text{ (р.)},$$
$$8215{,}16 - 6962 = 1253{,}16 \text{ (р.)}.$$

693. Ольга вложила в банк 2000 р. под 10% годовых на 4 года. Определите:

а) какая сумма будет на счете в конце каждого года;

б) чему будет равен годовой доход Ольги в каждый год из этих четырех лет;

в) на сколько годовой доход за второй год больше дохода за первый; доход за третий год больше дохода за второй и т. д.

694. Новое ателье в первый год своей деятельности получило прибыль 400 тыс. р., а в течение следующих пяти лет его прибыль возрастала примерно на 50% в год.

а) Какую прибыль получило ателье за пятый год своей деятельности?

б) Какую прибыль получило ателье за все пять лет?

в) Какова была его среднегодовая прибыль? Каков был размах в прибыли?

695. В течение 2006 г. в области произошло 640 дорожно-транспортных происшествий (ДТП). Благодаря мерам, предпринимаемым администрацией области, число аварий ежегодно уменьшается и составляет 75% от числа аварий в предыдущем году. Определите:

а) сколько примерно ДТП может произойти в 2012 г., если эта тенденция сохранится;

б) сколько всего ДТП может произойти в области с 2006 по 2012 г. включительно.

696. Андрей готовился к словарному диктанту по английскому языку, назначенному на понедельник. В воскресенье ночью он выучил 80 слов. Известно, что без повторения Андрей ежедневно будет забывать примерно 5% выученных слов. Сколько слов будет помнить Андрей, если диктант отложат на неделю и он не будет повторять выученные слова? (Указание. Сначала определите, сколько процентов выученных слов Андрей будет помнить.)

697. Дмитрий взял кредит 25 000 р. на покупку мебели. При возврате кредита он, кроме взятой суммы, должен выплатить некоторый процент в зависимости от срока возврата долга. Ниже приведен расчет, показывающий, сколько Дмитрий должен вернуть в зависимости от того, через какое время он сможет это сделать:

через 1 год — 27 500 р.; через 3 года — 32 500 р.;
через 2 года — 30 000 р.; через 4 года — 35 000 р.

На каких условиях ему предоставлен кредит — насчитываются простые или сложные проценты? Какова процентная ставка кредита?

Б

698. При покупке квартиры в строящемся доме покупатель заключил со строительной фирмой следующий договор: сразу после заключения договора он выплачивает 10% стоимости квартиры, а далее начинает ежемесячно выплачивать 3% от ее стоимости. Стоимость купленной им квартиры составляет 600 тыс. р.

а) Составьте формулу для вычисления суммы, выплаченной покупателем квартиры через n месяцев после заключения договора. Вычислите, сколько было выплачено через 1 год; через 2 года после заключения договора.

б) Составьте формулу для вычисления суммы, которую осталось заплатить через n месяцев с начала действия договора, и найдите, сколько останется заплатить через 1 год; через 2 года.

в) На сколько лет рассчитана выплата стоимости квартиры?

г) Проиллюстрируйте графически ситуации, описанные в заданиях «а» и «б», откладывая по горизонтальной оси число лет, в течение которых производится расчет, а по вертикальной оси денежные суммы.

699. Виктор вложил на десять лет по 1000 р. на два разных счета — с 10% годовых и 20% годовых.

а) Каким будет доход по каждому из этих счетов через год? Во сколько раз доход по второму вкладу будет больше дохода по первому вкладу?

б) Каким будет доход по каждому из этих счетов за четвертый год? Во сколько раз доход по второму вкладу больше, чем по первому?

Как вы думаете, будет ли отношение ежегодных доходов по этим вкладам увеличиваться с течением времени и почему?

700. Николай и Сергей вложили по 1500 р. в разные банки. У Николая годовой доход составляет 10%, а у Сергея — 5%. Верно ли, что:

а) доход Николая через год будет в 2 раза больше, чем доход Сергея;

б) доход Николая будет через 3 года в 2 раза больше, чем доход Сергея?

701. Валентин внес 1200 р. на вклад «Молодежный». Условия вклада таковы: его можно снять не ранее чем через три месяца; к концу этого срока на вложенную сумму начисляется 3%; если вклад или проценты не снимаются, то договор автоматически продлевается на следующие три месяца и процент начисляется на всю сумму, имеющуюся на вкладе.

а) Определите доход Валентина за год в двух случаях: если он будет каждые три месяца снимать проценты и если он в течение года не будет снимать проценты.

б) Сколько процентов первоначального вклада составит годовой доход Валентина в первом случае и сколько — во втором?

702. После окончания университета дипломник имеет возможность получить одну из двух работ. На одной из них его годовой заработок в первый год составит 150 000 р., а затем ежегодно будет увеличиваться на 15% от этой суммы. На второй работе в первый год его заработок составит 100 000 р. и затем ежегодно к нему будет добавляться 20% от предыдущего заработка.

а) Выпишите планируемый заработок в первый, второй и третий годы на каждой из этих работ.

б) На какой по счету год заработок на второй работе превзойдет заработок на первой работе?

в) Предположим, что дипломник планирует работать в одном месте не менее 10 лет. На какой из этих работ его суммарный заработок будет больше?

703. Ирина внесла в конце января 1000 р. на счет, по которому ежемесячно начисляется 2% от имеющейся на нем суммы. И затем в конце каждого месяца в течение года она вносила на этот счет еще по 1000 р., не снимая с него никаких сумм. Сколько рублей будет на ее счете в конце декабря?

4.7 Сумма квадратов первых n натуральных чисел

(Для тех, кому интересно)

Сумма первых n натуральных чисел

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

можно найти по формуле

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ее легко получить, воспользовавшись общей формулой суммы арифметической прогрессии или же прибегнув к «методу Гаусса».

Теперь мы рассмотрим более сложную задачу: выведем формулу, по которой находится сумма

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2.$$

«Метод Гаусса» в этом случае никакого эффекта не даст. Для решения этой задачи существуют другие приемы, с одним из которых вы сейчас познакомитесь. Этот прием, возможно, покажется вам искусственным. Однако он быстро приведет нас к нужному результату, и, кроме того, с его помощью можно получить формулу суммы кубов первых n натуральных чисел и даже общую формулу для суммирования k-х степеней первых n натуральных чисел.

Прежде всего договоримся об обозначениях. Сумму k-х степеней первых n натуральных чисел обозначим через S_k:

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

Тогда:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n;$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2;$$
$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

Как мы уже напоминали,

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

И теперь нам нужно найти выражение для S_2.

В основу вывода формулы суммы квадратов первых n натуральных чисел положено следующее тождество:

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

(Убедитесь в его справедливости, возведя $(n + 1)$ в третью степень.)

Представим это тождество в другом виде:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Подставляя вместо n последовательные натуральные числа 1, 2, 3 и т. д., получим равенства:

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,\\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,\\
4^3 - 3^3 &= 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1,\\
5^3 - 4^3 &= 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1,\\
&\dots\\
(n+1)^3 - n^3 &= \quad 3n^2 \quad + \quad 3n \quad + 1.
\end{aligned}$$

Наверное, вы догадались, что теперь эти равенства нужно сложить. Левая часть будет выглядеть совсем просто:

$$(n+1)^3 - 1.$$

Что же касается правой части, то здесь придется складывать три столбца. Первый из них даст сумму

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + \dots + 3n^2 = 3S_2.$$

А при сложении чисел второго столбца получим сумму

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 3n = 3S_1.$$

Таким образом, получаем равенство

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3S_1 + n,$$

т. е. $(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + n.$

Выполнив несложные алгебраические преобразования, выразим из этого равенства S_2:

$$2(n^3 + 3n^2 + 3n) = 6S_2 + 3(n^2 + n) + 2n,$$

$$6S_2 = 2(n^3 + 3n^2 + 3n) - 3(n^2 + n) - 2n,$$

$$6S_2 = 2n^3 + 3n^2 + n,$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

704. Воспользовавшись выведенной формулой, найдите сумму:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$; б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 45^2$.

705. Выведите формулу суммы кубов первых n натуральных чисел:

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Указание. Представьте в виде многочлена выражение $(n+1)^4$ и дальше действуйте по той же схеме, что и при выводе формулы суммы квадратов натуральных чисел. Записав равенство, в левой части которого будет $4S_3$, не спешите преобразовывать его правую часть в многочлен: если вы все делали верно, то на этом шаге можно будет вынести за скобки общий множитель.

706. Найдите с помощью формулы сумму кубов первых десяти натуральных чисел.

707. Докажите, что при любом натуральном n значение каждого из выражений

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

является целым числом.

Указание. Можно воспользоваться результатами, полученными в объяснительном тексте пункта и в задаче **705**.

4.8 Треугольник Паскаля

(Для тех, кому интересно)

Треугольником Паскаля называют числовую таблицу треугольной формы, начало которой показано на рисунке 4.18.

Строится она следующим образом: в «вершине» треугольника записывается единица; в строке ниже записываются две единицы так, чтобы верхняя единица оказалась между ними; каждая следующая строка начинается и оканчивается единицей, а любое промежуточное ее число получается сложением чисел предыдущей строки, расположенных слева и справа от него (рис. 4.19).

Строки таблицы получаются последовательно одна за другой. Их принято нумеровать так, как показано на рисунке 4.18. Чтобы

	Номер строки
1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5
1 6 15 20 15 6 1	6
. . . .	

Рис. 4.18

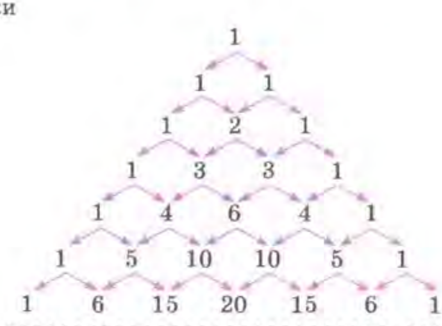


Рис. 4.19

получить, например, пятую строку, придется построить первые четыре, а для получения десятой строки нужно будет записать первые девять. Понятно, что в принципе можно получить сколько угодно строк; иными словами, эта треугольная таблица бесконечна.

Таблица, которую мы описали, обладает многими удивительными свойствами. Известна она была еще ученым Древней Индии. Ее открывали заново и изучали многие математики. А названа она треугольником Паскаля в честь выдающегося французского математика и философа Блеза Паскаля (1623—1662), который посвятил ей свое сочинение «Трактат об арифметическом треугольнике».

Для чисел — элементов треугольника Паскаля существует стандартное обозначение. Положение любого элемента определяется двумя координатами: номером строки и номером места в этой строке. (Нумерация элементов в строке, как и самих строк, начинается с 0.) Число, расположенное, например, в пятой строке на втором месте, обозначается C_5^2 (читается: «це из 5 по 2»). Воспользовавшись таблицей (см. рис. 4.18), найдем, что $C_5^2 = 10$. Точно так же число, расположенное в шестом ряду под четвертым номером, обозначается C_6^4; из таблицы видно, что $C_6^4 = 15$. Вообще элемент треугольника, расположенный в n-й строке на месте с номером m, обозначается так: C_n^m.

Используя это обозначение, можно треугольник Паскаля задать следующим образом:

$$C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1,\ C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m.$$

Первые два равенства описывают «границы» треугольника Паскаля — его «боковые стороны». Последнее равенство — это рекуррентная формула, позволяющая найти число $(n + 1)$-й строки по двум числам n-й строки.

Треугольник Паскаля самым непосредственным образом связан с важной алгебраической формулой. Она является обобщением известных вам формул квадрата и куба суммы двух чисел и позволяет развернуть в многочлен выражение $(a + b)^n$ для любого натурального n.

Чтобы установить эту связь, а заодно получить указанную формулу, будем последовательно возводить двучлен $a + b$ в степень. Очевидно, что

$$(a + b)^0 = 1;$$
$$(a + b)^1 = a + b.$$

Возьмем теперь $(a + b)^2$. Так как $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$, то, чтобы представить в виде многочлена $(a + b)^2$, надо $(a + b)$ сначала умножить на a, затем на b и результаты сложить. Это удобно сделать в столбик:

$$\begin{array}{r@{\,}l} & a^2 + ab \\ + & \quad\;\; ab + b^2 \\ \hline & a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2. \end{array}$$

Точно так же $(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b)$. Поэтому, чтобы найти $(a + b)^3$, можно $a^2 + 2ab + b^2$ умножить сначала на a, потом на b и результаты сложить:

$$\begin{array}{r@{\,}l} & a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + & \qquad\;\; a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3. \end{array}$$

Так как $(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b)$, то, чтобы получить разложение $(a + b)^4$ в многочлен, нужно $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ умножить на a и на b и результаты сложить:

$$\begin{array}{r@{\,}l} & a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ + & \qquad\;\; a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ \hline & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = (a+b)^4. \end{array}$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты многочленов получаются точно по тому же закону, по какому строился треугольник Паскаля. Иными словами, коэффициенты образуют соответствующие строки этого треугольника:

$(a + b)^n$	Коэффициенты	Номер строки
$(a + b)^0$	1	0
$(a + b)^1$	1 1	1
$(a + b)^2$	1 2 1	2
$(a + b)^3$	1 3 3 1	3
$(a + b)^4$	1 4 6 4 1	4

Очевидно, что при разложении в многочлен $(a + b)^5$ его коэффициенты образуют пятую строку треугольника Паскаля, при разложении в многочлен $(a + b)^6$ — шестую строку и т. д. Вообще *коэффициенты многочлена, равного* $(a + b)^n$, *образуют n-ю строку треугольника Паскаля.*

Зная это, попробуем записать формулу, по которой можно представить в виде многочлена выражение $(a + b)^n$, где n — произвольное натуральное число. Для этого сначала запишем полученные равенства с помощью символа C_n^m и проанализируем их структурные особенности:

$$(a+b)^0 = C_0^0;$$

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b;$$

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2;$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3;$$

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4.$$

Мы видим, что:

число членов многочлена, записанного в правой части каждой формулы, на единицу больше показателя степени двучлена n;

степень каждого члена многочлена, т. е. сумма показателей переменных a и b, равна показателю n;

показатель степени переменной a последовательно понижается от n до 0, а показатель степени переменной b повышается от 0 до n;

если переменная b содержится в одночлене в степени m, то коэффициент этого одночлена равен C_n^m.

Теперь нетрудно сообразить, что разложение в многочлен выражения $(a + b)^n$ должно выглядеть так:

$$\boldsymbol{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n}.$$

Записанное равенство называют *формулой бинома Ньютона* (слово «бином» латинского происхождения и переводится как «двучлен»). А числа $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ называют *биномиальными коэффициентами*.

Таким образом, строки треугольника Паскаля дают нам биномиальные коэффициенты, т. е. коэффициенты многочлена, который получается при возведении двучлена $a + b$ в степень с натуральным показателем.

Представим, например, в виде многочлена выражение $(a + b)^6$. По формуле бинома Ньютона получим

$$(a+b)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5 b + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 ab^5 + C_6^6 b^6.$$

Теперь заменим коэффициенты соответствующими числами из 6-й строки треугольника Паскаля:

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Заметим, что формула бинома Ньютона позволяет представить в виде многочлена степень любого двучлена. Так, чтобы применить эту формулу, например, к выражению $(x - 2y)^4$, нужно воспользоваться подстановкой $a = x$, $b = -2y$.

708. Постройте у себя в тетради первые десять строк треугольника Паскаля.

709. Проверьте на примерах, что сумма элементов каждой следующей строки треугольника Паскаля в два раза больше суммы элементов предыдущей строки. Объясните, почему так получается. (Вам может помочь схема на рис. 4.19.)

710. Покажите в треугольнике Паскаля «диагональ», по которой располагается:
а) последовательность натуральных чисел;
б) последовательность треугольных чисел (1; 3; 6; 10; ...);
в) последовательность пирамидальных чисел (1; 4; 10; 20; ...).

711. Докажите, что сумма чисел строки с номером n треугольника Паскаля равна 2^n.
Указание. Можно доказать это разными способами:
1) воспользуйтесь результатом задачи **709**;
2) подставьте в формулу бинома Ньютона $a = 1$ и $b = 1$.

712. Найдите с помощью треугольника Паскаля C_5^2; C_7^4; C_8^6; C_9^0; C_3^3.

713. а) Запишите с помощью символа C_n^m шестую и седьмую строки треугольника Паскаля.
б) Запишите с помощью символа C_n^m несколько элементов какой-нибудь «диагонали» треугольника Паскаля.

714. Сравните C_5^2 и C_5^3; C_6^1 и C_6^5; C_9^4 и C_9^5. Сформулируйте соответствующее свойство и запишите его в символическом виде.

715. Представьте в виде многочлена:
а) $(a + b)^7$; б) $(x + y)^8$; в) $(b + c)^9$.

716. Представьте в виде многочлена:
а) $(x + 1)^5$; в) $(a - b)^6$; д) $(x + 2y)^5$;
б) $(2a + 3)^4$; г) $(2 - m)^7$; е) $(2c - 3m)^4$.

717. Докажите, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.
Указание. Подставьте в формулу бинома Ньютона $a = 1$ и $b = -1$.

718. Существует формула, по которой биномиальные коэффициенты можно вычислять непосредственно, не прибегая к треугольнику Паскаля:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

1) Найдите по формуле C_7^4; C_5^2; C_{10}^5. Сравните с результатом, полученным с помощью треугольника Паскаля.

2) Докажите, что $C_{12}^4 = C_{12}^8$.

3) Докажите, что $C_7^2 + C_7^3 = C_8^3$.

4) Докажите, что $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

ДЗ Дополнительные задания к главе 4

Последовательности и прогрессии

719. Последовательность задана формулой:

а) $a_n = \frac{n+1}{n}$; б) $b_n = \frac{2n-1}{n}$.

Для каждой последовательности:
1) вычислите первые пять ее членов;
2) определите, возрастающей или убывающей является последовательность, и докажите это;
3) найдите какой-нибудь промежуток, которому принадлежат все члены этой последовательности.

720. Для каждой последовательности, заданной рекуррентным способом, запишите формулу n-го члена:

а) $a_1 = 12$, $a_{n+1} = a_n - 5$; в) $b_1 = 24$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{2}$;

б) $a_1 = -3$, $a_{n+1} = a_n + 5$; г) $b_1 = 2$, $b_{n+1} = b_n \cdot (-3)$.

721. В 2000 г. население каждого из угледобывающих поселков A и B составляло примерно 30 тыс. человек. В связи с истощением месторождений люди начали переезжать в другие места. В каждый год из следующих пяти лет численность населения поселка A можно было определить по формуле $A_n = 30\,000 - 2500n$, а поселка B — по формуле $B_n = 30\,000 \cdot 0{,}7^n$, где n — число лет, прошедших после 2000 г.
а) Определите, в каком из поселков численность населения изменялась в арифметической прогрессии, а в каком — в геометрической прогрессии.

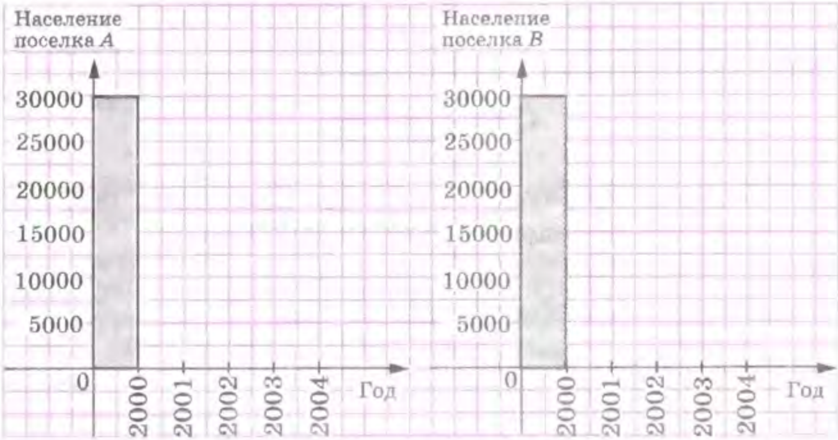


Рис. 4.20

б) Продолжите построение диаграммы для каждого случая (рис. 4.20).

722. а) Пусть (a_n) — последовательность натуральных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2. Докажите, что эта последовательность — арифметическая прогрессия. Чему равна разность этой прогрессии?
б) Докажите, что последовательность натуральных чисел, которые при делении на k дают в остатке r, является арифметической прогрессией с разностью k.

723. а) В арифметической прогрессии (a_n) $a_6 = 15$, $a_{12} = 18$. Найдите a_{20}.
б) Существует ли арифметическая прогрессия, в которой $a_7 = -3$, $a_{12} = 12$ и $a_{18} = 26$?

724. В арифметической прогрессии (b_n) $S_{30} = 147$, $S_{30} = 447$. Найдите S_{20}.

725. Пусть S_1 — сумма первых трех членов арифметической прогрессии (a_n), S_2 — сумма второй тройки ее членов и S_3 — сумма третьей тройки членов этой прогрессии. Докажите, что последовательность чисел S_1, S_2, S_3 также является арифметической прогрессией.

726. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 14, сумма следующих ее четырех членов равна 46. Найдите:
а) сумму членов этой прогрессии с девятого по двенадцатый включительно;
б) сумму первых шестнадцати членов этой прогрессии.

727. В арифметической прогрессии сумма первых пяти членов равна сумме первых семи членов. Докажите, что сумма первых двенадцати членов этой прогрессии равна нулю.

728. Вычислите сумму:

а) $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$;

б) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 97^2 - 98^2 + 99^2 - 100^2$.

Указание. Упростите выражение, воспользовавшись формулой разности квадратов.

729. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Докажите, что:

а) все члены этой прогрессии с четными номерами также образуют геометрическую прогрессию;

б) все члены этой прогрессии с нечетными номерами также образуют геометрическую прогрессию.

730. а) В геометрической прогрессии $b_3 = 48$, $b_6 = 6$. Найдите b_{12}.

б) Существует ли геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = \frac{5}{27}$, $b_6 = 5$ и $b_8 = 45$?

731. В геометрической прогрессии (b_n) сумма первого, второго и третьего членов равна 42, а сумма второго, третьего и четвертого членов равна 21. Найдите сумму этих четырех членов геометрической прогрессии.

732. Пусть S_1 — сумма первых трех членов геометрической прогрессии (b_n), S_2 — сумма второй тройки ее членов и S_3 — сумма третьей тройки членов этой прогрессии. Докажите, что последовательность чисел S_1, S_2, S_3 также является геометрической прогрессией.

733. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 192, сумма следующих ее трех членов равна 42. Найдите:

а) сумму членов этой прогрессии с седьмого по девятый включительно;

б) сумму первых двенадцати членов этой прогрессии.

Простые и сложные проценты

734. Один из акционеров предприятия имеет 100 акций, номинальная стоимость каждой из которых 50 р. Ежегодно ему выплачивается с каждой акции доход в 40% от ее номинальной стоимости.

а) Какой доход получит акционер за 1 год; за 3 года; за 10 лет; за n лет?

б) Через сколько лет его общий доход превзойдет удвоенную стоимость акций?

735. В некоторой стране X инфляция (повышение цен, ведущее к обесцениванию денег) составляет примерно 3% в год. Вычислите, сколько будет через 7 лет стоить диван, который сейчас стоит 300 марок.

736. В 2000 г. в центральном районе города проживало 30 тыс. человек, а в новом районе — 10 тыс. человек. В течение следующих пяти лет число жителей центрального района ежегодно уменьшалось примерно на 8%, а число жителей нового района росло примерно на 30%.

а) Запишите в таблицу число жителей в центральном и в новом районах в каждом году с 2000-го по 2005-й:

Район	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Центральный						
Новый						

В каком году число жителей нового района превзошло число жителей центрального района?

б) Какой процент составило население центрального района от населения нового района в 2005 г.?

737. а) В библиотечном фонде к началу года было 10 000 книг. Ежемесячно количество книг увеличивалось на 3% по сравнению с предыдущим месяцем. Сколько книг стало в библиотечном фонде через год? На сколько процентов увеличился фонд к концу года?

б) По туристическому накопительному вкладу банк ежемесячно начисляет 2%. На вклад внесена некоторая сумма и оставлена в банке на год. Определите, сколько процентов будет начислено на этот вклад за год.

Указание. Обозначьте величину вклада какой-нибудь буквой.

738. а) При уценке холодильника его цена дважды понижалась на одно и же число процентов. В результате она снизилась на 36%. На сколько процентов она понижалась каждый раз?

б) Цена компьютера сначала была повышена на некоторое количество процентов, а затем снижена на такое же количество процентов. Определите, на сколько процентов была повышена, а затем снижена цена компьютера, если в результате она снизилась на 1%.

Вопросы для повторения к главе 4

1. По какому правилу образуется последовательность чисел Фибоначчи? Запишите это правило с помощью рекуррентной формулы.
2. Выпишите несколько первых членов последовательности четных чисел; квадратов натуральных чисел; натуральных чисел, кратных 5; правильных дробей, у которых знаменатель на 1 больше числителя. Запишите для каждой из этих последовательностей формулу n-го члена.
3. Дайте определение арифметической прогрессии. Запишите рекуррентную формулу, с помощью которой задается арифметическая прогрессия. Приведите пример какой-нибудь арифметической прогрессии и укажите ее разность.
4. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии. Найдите 100-й член арифметической прогрессии 2; 5; 8; ... .
5. Расскажите, как найти «методом Гаусса» сумму первых ста натуральных чисел.
6. Выведите формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии. Выразите сумму первых n членов арифметической прогрессии через a_1, d и n.
7. Дайте определение геометрической прогрессии. Запишите рекуррентную формулу, с помощью которой задается геометрическая прогрессия. Приведите пример какой-нибудь геометрической прогрессии и назовите ее знаменатель.
8. Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии. Найдите 8-й член геометрической прогрессии 6; 3; $\frac{3}{2}$; ... .
9. Выведите формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Задания для самопроверки к главе 4

(Обязательные результаты обучения)

1. Выпишите первые шесть членов последовательности (r_n), если $r_1 = 3$, $r_{n+1} = r_n - 2$.
2. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n = \frac{1}{n^2}$. Найдите a_5; a_{10}; a_{12}. Найдите $(k + 1)$-й член этой последовательности.

3. Определите закономерность, по которой строится последовательность, и запишите три следующих члена:

$$2;\ \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \ldots .$$

Запишите формулу n-го члена последовательности.

4. Дана арифметическая прогрессия 7,5; 7; 6,5; 6; ... . Найдите следующие три члена этой прогрессии. Чему равна разность прогрессии? Найдите 100-й член прогрессии.

5. Какой номер имеет член арифметической прогрессии, равный 180, если ее первый член равен −20, а разность равна 2,5?

6. В арифметической прогрессии $a_1 = 12$, $d = 2{,}5$. Является ли членом этой прогрессии число 60; число 87?

7. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии −1; −3; −5; ... .

8. Турист в первый день прошел 25 км, а в каждый следующий — на 1,5 км меньше.
а) Сколько километров прошел турист в пятый день своего путешествия?
б) Какое расстояние прошел он за неделю?

9. Дана геометрическая прогрессия −80; 40; −20; 10; ... . Запишите следующие три члена этой прогрессии. Чему равен знаменатель прогрессии? Найдите десятый член этой прогрессии.

10. В телевизионной игре за первый верный ответ на вопрос ведущего играющему начисляют 500 р., а за каждый следующий верный ответ выигранная им сумма удваивается. Играющий ответил верно на 7 вопросов. Каков его выигрыш?

11. Найдите сумму десяти первых членов геометрической прогрессии 6; 2; $\frac{2}{3}$; ... .

12. С четверга по воскресенье число посетителей выставки ежедневно увеличивалось в 1,5 раза. Сколько человек посетило выставку за эти дни, если в четверг на выставке было 320 человек?

13. Квартплата за очередной месяц должна вноситься до определенного числа. В городе N за каждый просроченный день начисляется дополнительно 1% от суммы квартплаты. Сколько придется заплатить квартиросъемщику, если его квартплата составляет 800 р. и он просрочил оплату на 12 дней?

14. Мяч, брошенный вертикально вниз, после удара о землю подскакивает на высоту, равную 80% его предыдущей высоты. Мяч был брошен с высоты 2 м. На какую высоту подпрыгнет мяч после 3-го удара о землю?

Тест к главе 4

1. Последовательность (a_n) задана условиями: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Найдите a_6.

Ответ. ____________

2. Последовательность (c_n) задана формулой n-го члена: $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Какое из неравенств верно?

А. $c_2 > c_3$. **Б.** $c_3 < c_4$. **В.** $c_5 > c_6$. **Г.** $c_7 < c_8$.

3. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена: $a_n = n^2 - 2n$. Найдите a_{k+1}.

А. $k^2 - 1$. **Б.** $k^2 + 1$. **В.** $k^2 + 2$. **Г.** $k^2 + 3$.

4. Дана последовательность (a_n). Сколько ее членов заключено между a_{k-3} и a_{k+5}?

А. 9. **Б.** 8. **В.** 7. **Г.** 6.

5. Для каждой из последовательностей (x_n), (y_n) и (z_n), заданных рекуррентным способом, укажите верное утверждение:

1) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = 2x_n$; 3) $y_1 = 3$, $y_{n+1} = y_n + 2$.
2) $z_1 = 3$, $z_{n+1} = 2 - z_n$;

А. Эта последовательность — арифметическая прогрессия.
Б. Эта последовательность — геометрическая прогрессия.
В. Эта последовательность не является ни арифметической, ни геометрической прогрессией.

Ответ. 1) ____; 2) ____; 3) ____

6. Какая из следующих последовательностей не является арифметической прогрессией?

А. Последовательность, в которой каждый следующий член на 5 больше предыдущего.
Б. Последовательность, в которой каждый следующий член на 5 меньше предыдущего.
В. Последовательность чисел, кратных 5.
Г. Последовательность натуральных степеней числа 5.

7. Какая из следующих последовательностей не является геометрической прогрессией?

А. Последовательность, в которой каждый следующий член в 3 раза больше предыдущего.
Б. Последовательность, в которой каждый следующий член в 3 раза меньше предыдущего.
В. Последовательность чисел, кратных 3.
Г. Последовательность натуральных степеней числа 3.

8. В первом ряду амфитеатра киноконцертного зала 18 мест, а в каждом следующем ряду на 6 мест больше, чем в предыдущем. Сколько мест в ряду с номером n?

А. $12 + 6n$. **Б.** $18 + 6n$. **В.** $24 + 6n$. **Г.** $6n$.

9. Фигуры составляют из одинаковых равносторонних треугольников, как показано на рисунке. Сколько треугольников потребуется для фигуры под номером 20?

Ответ. ____________________

10. Каким уравнением задается прямая, которой принадлежат члены арифметической прогрессии (a_n), заданной условиями: $a_1 = 10$, $d = -2$?

А. $y = -2x + 10$. **В.** $y = -2x + 12$.
Б. $y = 10x - 2$. **Г.** $y = -2x + 8$.

11. Найдите сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + 500$.

Ответ. ____________________

12. Геометрическая прогрессия начинается так: $\sqrt{7}$; -7; ... . Найдите еще один ее член.

Ответ. ____________________

13. В геометрической прогрессии $b_1 = 10^{-5}$, $q = 10$. Укажите номера членов прогрессии, для которых выполняется неравенство $0{,}01 < b_n < 10$.

А. $n = 5; 6$. **Б.** $n = 4; 5; 6; 7$. **В.** $n = 4; 5; 6$. **Г.** $n = 5; 6; 7$.

14. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = 3$, $b_{n+1} = 2b_n$. Запишите формулу n-го члена этой последовательности.

А. $b_n = 3 \cdot 2n$. **Б.** $b_n = 3 \cdot 2^n$. **В.** $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. **Г.** $b_n = 3 \cdot 2(n-1)$.

15. Найдите сумму $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$.

Ответ. ____________________

16. На момент открытия городской библиотеки ее фонд составлял 1000 томов. В течение нескольких лет он ежегодно увеличивался на 10%. Через сколько лет число книг в библиотеке превысило 1300 экземпляров?

Ответ. ____________________

Статистика и вероятность

5.1 Выборочные исследования

«Статистика знает всё», — утверждали Ильф и Петров в своем знаменитом романе «Двенадцать стульев» и продолжали: «Известно, сколько какой пищи съедает в год средний гражданин республики... сколько в стране охотников, балерин... станков, велосипедов, памятников, маяков и швейных машинок... Как много жизни, полной пыла, страстей и мысли, глядит на нас со статистических таблиц!..»

Это ироническое описание дает довольно точное представление о *статистике* (от лат. *status* — состояние) — науке, изучающей, обрабатывающей и анализирующей количественные данные о самых разнообразных массовых явлениях в жизни. Экономическая статистика изучает изменение цен, спроса и предложения на товары, прогнозирует рост и падение производства и потребления. Медицинская статистика изучает эффективность различных лекарств и методов лечения, вероятность возникновения некоторого заболевания в зависимости от возраста, пола, наследственности, условий жизни, вредных привычек, прогнозирует распространение эпидемий. Демографическая статистика изучает рождаемость, численность населения, его состав (возрастной, национальный, профессиональный). А есть еще статистика финансовая, налоговая, биологическая, метеорологическая...

Статистика имеет многовековую историю. Уже в Древнем мире вели статистический учет населения. Однако произвольные толкования статистических данных, отсутствие строгой научной базы статистических прогнозов позволили в конце XIX века английскому премьер-министру Б. Дизраэли не без основания заметить: «Есть три вида лжи: просто ложь, наглая ложь и статистика».

Строгая научная база появилась в XX веке. Это *математическая статистика* — наука, основанная на законах теории вероятностей. Статистические методы обработки данных из самых разных областей жизни имеют много общего. Это и позволило создать универсальные научно обоснованные методы статистических исследований.

Мы ограничимся рассмотрением некоторых элементарных понятий и методов первичной обработки статистической информации: представлением ее в виде удобно читаемых таблиц, изображением на диаграммах и вычислением наиболее показательных числовых характеристик.

Основным методом статистики является *выборочный метод*. Представим себе, что в одном из российских регионов решили выяснить, каков уровень знаний девятиклассников по математике. Для этого составили специальную контрольную работу. Чтобы получить достоверную информацию, совсем не обязательно проводить эту контрольную работу во всех девятых классах региона, или, как говорят статистики, обследовать всю *генеральную совокупность* учащихся. Достаточно ограничиться лишь небольшой частью девятиклассников, составив *выборку* учащихся девятых классов.

Конечно, не любая выборка даст результаты, по которым можно делать выводы обо всей генеральной совокупности. Например, если контрольную работу будут писать учащиеся девятых классов только одной школы, то получить информацию о состоянии знаний по математике в регионе не удастся. Важно, чтобы выборка правильно представляла всю генеральную совокупность, т. е. была *представительной* (или *репрезентативной*, от английского слова *represent* — представлять). В этом случае полученные результаты с высокой степенью вероятности можно распространять на всю генеральную совокупность.

Построение репрезентативной выборки — это тонкий и сложный процесс, который осуществляют специалисты; его рассмотрение выходит за рамки школьного курса. Отметим только, что отбор учащихся, которые войдут в выборку, производят *случайным образом*, т. е. так, чтобы обеспечить одинаковую вероятность попадания в выборку любого учащегося всей генеральной совокупности девятиклассников региона.

Итак, составлена выборка из n учащихся, проведена контрольная работа, получены данные, которые можно подвергать анализу.

Пусть в рассматриваемой ситуации $n = 50$ и в контрольной работе было 6 заданий. В алфавитном списке этих пятидесяти учеников возле каждой фамилии проставили число верно решенных этим учеником задач. Получился следующий ряд чисел, каждое из которых находится в пределах от 0 до 6:

4; 2; 0; 6; 2; 3; 4; 3; 3; 0; 1; 5; 2; 6; 4; 3;
3; 2; 3; 1; 3; 3; 2; 6; 2; 2; 4; 3; 3; 6; 4; 2;
0; 3; 3; 5; 2; 1; 4; 4; 3; 4; 5; 3; 2; 3; 1; 6; 2; 2.

Однако в таком наборе чисел разобраться трудно. Поэтому первый шаг, который следует сделать, — это каким-либо образом упорядочить полученные данные, например расположить их по возрастанию:

0; 0; 0;   1; 1; 1; 1;   2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2;
3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3;
4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4;   5; 5; 5;   6; 6; 6; 6; 6.

Такой упорядоченный ряд данных называют *ранжированным*. Для анализа он значительно удобнее. Мы видим, что в нем семь неодинаковых «по длине» групп, каждая из которых представляет определенное событие — результат эксперимента: не решено ни одной задачи, решена одна задача, решено две задачи и т. д. Мы также видим, как часто в выборке повторяется каждое из событий. Например, абсолютная частота появления события «девятиклассник не решил ни одной задачи» равна 3. Относительная частота этого события равна отношению его абсолютной частоты к объему выборки, т. е. $\frac{3}{50}$, или 6%. Для события «девятиклассник решил одну задачу» абсолютная частота равна 4, а относительная частота равна $\frac{4}{50}$, или 8%, и т. д.

Чтобы результаты легче воспринимались, их представляют в табличном и графическом виде. Результаты, сведенные в таблицу, выглядят так:

Число верно решенных задач	0	1	2	3	4	5	6
Абсолютная частота	3	4	12	15	8	3	5
Относительная частота	0,06	0,08	0,24	0,3	0,16	0,06	0,1

Составив таблицу, полезно себя проверить: сложив все абсолютные частоты, мы должны получить объем выборки, т. е. число 50, а сложив все относительные частоты, мы должны получить 1. Если относительные частоты выразить в процентах, то сумма всех частот должна составить 100%.

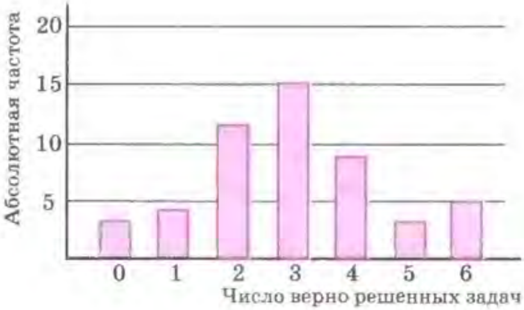


Рис. 5.1

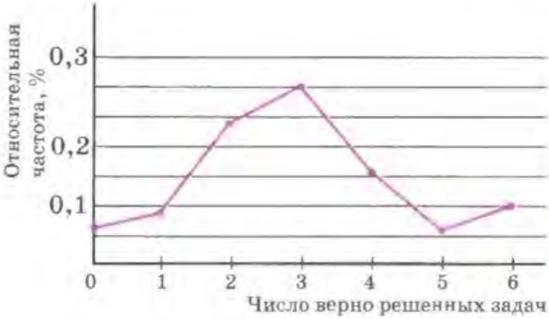


Рис. 5.2

На основе этой таблицы построена диаграмма частот (рис. 5.1).

Кроме столбчатых диаграмм, для графического представления результатов используют так называемые *полигоны частот*[1].

Для построения полигона частот на горизонтальной оси отмечают результаты случайного эксперимента (в нашем примере это число верно решенных задач), а на вертикальной — соответствующие им абсолютные или относительные частоты. Затем отмеченные точки последовательно соединяют отрезками. В результате получается некоторая ломаная. Ее называют полигоном частот. На рисунке 5.2 изображен полигон относительных частот по результатам проведенного исследования.

Так как мы полагаем, что выборка была репрезентативной, то на основании полученных результатов можно с достаточной уверенностью судить об уровне знаний всех девятиклассников региона.

Например, в выборке 10% школьников решили все задачи. *Значит, можно ожидать, что примерно 10% всех девятиклассников* региона справятся со всеми шестью задачами; эта часть школьников обладает высоким уровнем математической подготовки.

Далее, считалось, что школьник достиг обязательного уровня знаний по математике, если он верно решил не менее двух задач. Таковых в выборке $12 + 15 + 8 + 3 + 5 = 43$ человека, что составляет 86% от ее общего объема. Значит, можно обоснованно предполагать, что и среди всех девятиклассников региона примерно 86% имеют минимально необходимый уровень знаний по математике. Из них хорошую математическую подготовку (решено не менее четырех задач) имеют примерно 32% учеников.

С помощью ранжирования ряда, таблицы и графических иллюстраций мы уже получили первоначальные сведения о закономер-

[1] Слово «полигон» в переводе с греческого означает «многоугольник».

ностях интересующего нас ряда данных. Но вам известны такие статистические характеристики ряда данных, которые позволяют все его отдельные значения заменить некоторыми общими для всей генеральной совокупности показателями.

Так, например, можно узнать наиболее типичный результат выполнения предложенной работы. Используя представленные в таблице данные, легко видеть, что наиболее часто встречающийся результат — «решены три задачи». Как вы знаете, на языке статистики это означает, что число 3 является *модой* данного числового ряда.

Результат «среднего» девятиклассника характеризуется *медианой* полученного ряда данных, т. е. значением, расположенным в середине ранжированного ряда. Так как ряд содержит 50 чисел, то медиана — это полусумма 25-го и 26-го чисел, она равна 3. Это означает, что половина школьников решила не больше трех задач контрольной работы, а другая половина — не меньше трех задач.

Также полезно найти *среднее арифметическое* этого ряда:

$$\frac{0\cdot3+1\cdot4+2\cdot12+3\cdot15+4\cdot8+5\cdot3+6\cdot5}{50}=\frac{150}{3}=3.$$

Значит, можно сказать, что в среднем девятиклассник решает три задачи. Это может быть интерпретировано так: если бы все учащиеся решили задач поровну, то каждый решил бы три задачи. В данном случае все три характеристики совпали, но, конечно, это происходит совсем не всегда.

Вы видите, что результаты подобных исследований представляют несомненный интерес для многих людей: работников образования, учителей, родителей, школьников и др. Например, городское управление образованием могут интересовать средние результаты по школам, процент учеников, не справляющихся с программой. Университеты наверняка заинтересует количество учеников с высоким уровнем математической подготовки.

В заключение отметим, что бывают случаи, когда проводится обследование всей генеральной совокупности. Но чаще статистический анализ всей совокупности объектов невозможен или не имеет никакого смысла. Например, перед инспекцией стоит задача контроля качества продукции, выпускаемой большими партиями. Как проверить, пропечен ли хлеб, годны ли консервы, прочна ли ткань? Сплошная проверка всей партии товара не только сложна, но и абсолютно бессмысленна. Ведь при такой проверке придется вскрыть все консервы, разрезать весь хлеб и порвать всю ткань, фактически испортив и уничтожив саму продукцию. Поэтому в этих и многих других случаях применяется именно выборочный метод статистического исследования.

А

739. Закинул старик в реку невод. Пришел невод с таким уловом (в порядке вытаскивания):

П, О, Л, С, Я, П, К, О, З, К, П, К, Я, С, О, П, П, Л, О, О, Л, С, О, П, Л, П, К, Л, К, П, П, С, П, З, К, Я, П, З, С, О, О, Я, П, П, О, Л, С, Л, С, П, О, П, Л, К, С, О, Я, Л, П, С, О, Л, П, О, К, Л, П, О, О, П, О, Я, Л, П, С, П, О, Л, П, З.

Буквами обозначены: З — золотая рыбка; К — карась; Л — лещ; О — окунь; П — пескарь; С — сом; Я — язь.

а) Произведите ранжирование ряда данных в алфавитном порядке.
б) Составьте таблицу относительных частот.
в) Какой процент пойманной рыбы составляют золотые рыбки?
г) Используя полученную стариком выборку, оцените, какие виды рыб наиболее и наименее распространены в местах, где старик закинул невод.

740. В детском обувном магазине за декаду было куплено 750 пар обуви. В отделе учета проводили статистическое исследование и с этой целью записывали размеры каждой пятой из проданных пар. Эти числа составили следующий ряд данных:

23, 24, 16, 21, 18, 17, 20, 23, 18, 16, 19, 18, 22, 19, 21, 17, 24, 15, 23, 19, 16, 22, 18, 24, 19, 17, 22, 19, 15, 23, 21, 23, 19, 23, 17, 22, 16, 19, 22, 18, 20, 15, 21, 23, 19, 18, 23, 22, 20, 17, 19, 23, 21, 24, 22, 23, 20, 22, 21, 18, 16, 19, 22, 23, 20, 24, 21, 19, 24, 16, 20, 23, 24, 18, 22, 17, 15, 21, 24, 20, 19, 17, 21, 20, 15, 23, 24, 18, 16, 22, 23, 24, 21, 15, 23, 22, 20, 23, 19, 20, 17, 22, 19, 20, 24, 15, 23, 18, 22, 23, 15, 21, 15, 24, 19, 18, 19, 17, 15, 19, 23, 20, 17, 22, 23, 20, 18, 22, 19, 20, 18, 19, 24, 18, 16, 21, 24, 17, 15, 20, 22, 21, 24, 22, 18, 22, 18, 24, 15, 21.

а) Постройте таблицу абсолютных и относительных частот.
б) Определите моду ряда (самый распространенный размер).
в) Постройте диаграмму частот.
г) Найдите медиану этой выборки.

741. На некотором маршруте метрополитена провели исследование пассажиропотока. Для этого каждый час в случайно выбранном вагоне электропоезда на протяжении всего пути считали число пассажиров разных возрастов. Результаты исследования представлены в следующей таблице:

Возраст \ Время	6 ч 30 мин	7 ч 30 мин	8 ч 30 мин	9 ч 30 мин	10 ч 30 мин	11 ч 30 мин
До 7 лет	1	3	5	13	16	11
7—10	3	5	15	20	11	5
10—20	9	11	20	18	15	7
20—30	15	25	38	35	17	15
30—40	12	36	50	42	37	18
40—50	15	31	43	36	29	12
50—60	4	9	24	17	16	14
60—70	1	4	5	5	6	6
Старше 70	0	2	0	3	1	2

а) Определите «час пик» — время, когда в вагоне едет максимальное число людей.
б) Найдите время, когда относительная частота возрастной категории от 30 до 40 лет максимальна.
в) Какой процент пассажиров вагона, отправившегося в 11 ч 30 мин, составляют люди в возрасте от 20 до 50 лет?

742. Среди учащихся школы был проведен опрос на тему «Трудно ли вам учиться?». Опросили мальчиков — учеников 9 класса. Как вы думаете, можно ли считать эту выборку учеников репрезентативной, если нужно:
а) выяснить степень нагрузки в целом по школе;
б) получить данные по 9 классу?

743. Определите, является ли репрезентативной выборка:
а) Число автомобильных аварий в июне, если необходимо составить статистический отчет по авариям в городе за год.
б) Городские жители, если нужно выяснить число автомобилей на душу населения в стране.
в) Люди в возрасте от 40 до 50 лет при выяснении рейтинга молодежной телепрограммы.

Б

744. Фирма «Буренка и компания» производит молоко разной жирности. Объемы продаж за месяц сведены в диаграмме на рисунке 5.3.

а) Определите наиболее популярный сорт молока.

б) Какой процент проданного количества молока составляет полностью обезжиренное?

в) Считая, что всего было продано 40 000 литров молока, составьте таблицу частот.

г) Определите средний процент жирности потребляемого молока.

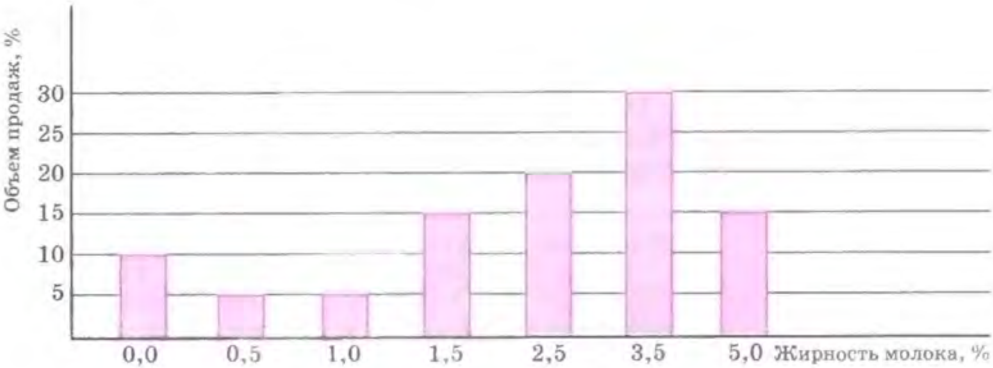


Рис. 5.3

745. Администрация города опубликовала данные о числе комнат в квартирах горожан. Результаты показаны на диаграмме (рис. 5.4).

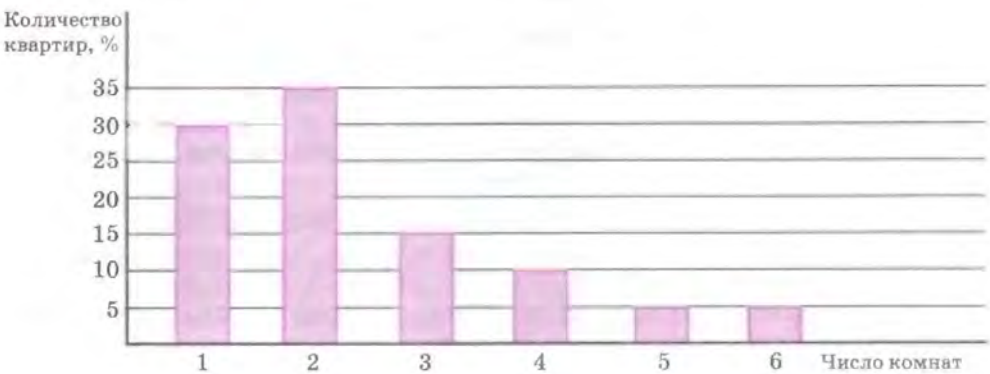


Рис. 5.4

Чтобы проверить эти данные, представители независимой организации ста прохожим на улице задали вопрос: «Сколько комнат в вашей квартире?» Ниже приведены ответы в порядке поступления:

2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 6, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 2, 5,
1, 1, 2, 5, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 2, 6, 1, 1, 6, 2, 3, 1, 2, 1,
4, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 5, 4, 2, 1, 2, 1, 1, 3, 2, 2, 3, 3,
2, 4, 1, 1, 2, 4, 1, 1, 2, 2, 4, 3, 3, 6, 1, 1, 2, 4, 2, 1,
2, 1, 5, 3, 1, 2, 2, 2, 5, 1, 3, 1, 2, 4, 2, 3, 6, 3, 2, 4.

Соответствуют ли данные, полученные по выборке, приведенной диаграмме?

746. Статистика аварий говорит о том, что за 10 лет на самолетах авиакомпании ABC было в три раза больше происшествий, чем на самолетах компании DEF, но в два раза меньше, чем на самолетах компании GHI.

а) Определите относительную частоту происшествий на самолетах компании DEF среди общего числа аварий самолетов этих авиакомпаний.

б) Какой процент от общего числа происшествий занимают происшествия на самолетах компании GHI?

в) Постройте диаграмму относительных частот аварий.

г) Если всего за 10 лет случилось 300 происшествий, то сколько пришлось на каждую компанию?

5.2 Интервальный ряд. Гистограмма

В одной городской школе было проведено следующее статистическое исследование. Выбранных наугад 100 учеников попросили замерить, сколько минут каждый из них тратит на дорогу в школу. В результате получили следующий ряд данных:

27, 52, 43, 38, 47, 8, 21, 40, 32, 53, 45, 54, 35, 28, 40, 18, 31,
45, 24, 30, 37, 15, 39, 34, 48, 25, 30, 7, 32, 12, 26, 35, 48, 19,
33, 26, 17, 30, 42, 22, 53, 28, 42, 36, 23, 10, 34, 46, 16, 29,
35, 52, 41, 32, 21, 39, 55, 25, 29, 8, 36, 44, 26, 55, 34, 19, 42,
54, 27, 10, 45, 20, 31, 50, 18, 9, 41, 14, 38, 40, 23, 49, 33, 15,
24, 46, 36, 28, 32, 37, 51, 20, 29, 47, 33, 27, 41, 22, 39, 40.

Мы видим, что одинаковые значения здесь встречаются редко, а число различных вариантов довольно велико, и поэтому ранжирование не позволит выявить характерные черты этого ряда.

В таких случаях для обработки данных строят *интервальный ряд*. Для этого весь промежуток, содержащий данные выборки, от наименьшего значения до наибольшего, разбивают на интервалы (обычно равные), а затем подсчитывают, сколько данных попадает в каждый из них. Построим интервальный ряд для нашего случая.

Наибольшее значение в ряду — число 55, а наименьшее — число 7. Таким образом, размах данных равен 55 − 7 = 48.

Разобьем найденный промежуток на несколько равных интервалов. При этом будем учитывать следующее: интервальный ряд не должен быть слишком громоздким, а концы и середины интервалов лучше сделать целыми числами — это упростит последующие вычисления.

Возьмем в качестве длины интервалов число 8. За начало первого интервала принято брать значение, расположенное на полинтервала левее наименьшего значения в ряду. В нашем случае это будет число 3.

Теперь нетрудно посчитать границы всех интервалов: от 3 до 11, от 11 до 19, от 19 до 27, от 27 до 35, от 35 до 43, от 43 до 51, от 51 до 59. Всего у нас получилось 7 интервалов.

Найдем, сколько значений из выборки попадает в каждый интервал (при этом значение, оказавшееся на границе двух интервалов, будем считать лежащим в правом промежутке), и сведем все данные по интервальному ряду в одну таблицу.

Интервал времени (в мин)	Подсчет	Абсолютная частота	Относительная частота
3—11	~~////~~ /	6	0,06
11—19	~~////~~ ///	8	0,08
19—27	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ //	17	0,17
27—35	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////	24	0,24
35—43	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///	23	0,23
43—51	~~////~~ ~~////~~ ///	13	0,13
51—59	~~////~~ ////	9	0,09

Мы построили так называемую *интервальную таблицу частот*. Из таблицы видно, что, например, в промежутке от 35 до 43 мин оказалось 23 значения из исследуемого ряда. Обратите внимание: по таблице уже нельзя сказать, чему равно каждое из этих значений; известно только, что все они лежат в данном промежутке.

Для интервального ряда используют специальное графическое изображение — *гистограмму частот*. Для построения гистограммы на горизонтальной оси откладывают интервалы, на которые разбит весь промежуток, и на них, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами, равными соответствующим частотам, абсолютным или относительным. Полученная ступенчатая фигура из прямоугольников и называется гистограммой частот (рис. 5.5).

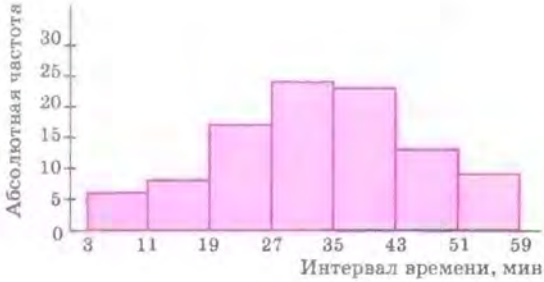


Рис. 5.5

Как же по интервальному ряду определить, сколько времени в среднем тратят ребята на дорогу в школу? Для упрощения исследования возьмем, как это делают в подобных случаях, середину каждого интервала и соответствующую этому интервалу частоту. Получим более простую таблицу:

Время, мин	7	15	23	31	39	47	55
Абсолютная частота	6	8	17	24	23	13	9
Относительная частота	0,06	0,08	0,17	0,24	0,23	0,13	0,09

По этой таблице нетрудно найти среднее арифметическое упрощенного ряда, используя, например, абсолютные частоты:

$$\frac{7 \cdot 6 + 15 \cdot 8 + 23 \cdot 17 + 31 \cdot 24 + 39 \cdot 23 + 47 \cdot 13 + 55 \cdot 9}{100} = 33.$$

Тот же результат можно получить, используя относительные частоты:

$$7 \cdot 0{,}06 + 15 \cdot 0{,}08 + 23 \cdot 0{,}17 + 31 \cdot 0{,}24 + 39 \cdot 0{,}23 + 47 \cdot 0{,}13 + 55 \cdot 0{,}09 = 33.$$

Мы видим, что в среднем школьники тратят на дорогу в школу больше получаса — 33 мин. Это достаточно большое время, и, может быть, стоит задуматься о постройке новой школы. Но для того чтобы найти наиболее удобное расположение новой школы, нужно провести другие, более детальные статистические исследования.

А

747. Используя таблицу из задачи **741**, постройте гистограмму частот по возрастам пассажиров для поезда, отправляющегося в 6 ч 30 мин.

748. В таблице приведены данные по температуре в городе N в июне 2000 г. и в июне 2005 г. В ней отражена информация о ежедневных наблюдениях.

Температурный интервал (°C)	Количество дней	
	Июнь 2000 г.	Июнь 2005 г.
14—18	2	1
18—22	9	6
22—26	12	15
26—30	6	3
30—34	1	5

а) Вычислите средние температуры за июнь в 2000 и 2005 гг. В каком году средняя температура в июне была больше?
б) Постройте гистограмму частот для 2000 г.

Б

749. В небоскребе 90 этажей. За день лифт вызывали на каждый этаж несколько раз; на первый этаж лифт вызывали 29 раз, на второй – 9 раз, на третий — 27 раз и т. д. К вечеру получилось, что число вызовов составляет следующий ряд (в порядке возрастания порядкового номера этажа):

29, 9, 27, 11, 18, 6, 20, 21, 7, 12, 25, 28, 22, 21, 19, 23, 15, 24, 13, 19, 17, 26, 17, 24, 8, 10, 13, 16, 27, 15, 14, 27, 11, 20, 9, 15, 6, 17, 22, 23, 12, 19, 7, 16, 24, 12, 5, 14, 26, 5, 10, 21, 17, 8, 25, 18, 29, 21, 17, 15, 28, 12, 26, 22, 10, 26, 11, 18, 16, 22, 29, 13, 6, 20, 7, 19, 23, 28, 13, 5, 20, 14, 7, 15, 16, 19, 8, 22, 18, 14.

а) Постройте для данного ряда интервальный ряд (определите размах ряда, возьмите длину промежутка, равную 4 единицам, и вычислите границы интервалов).
б) Для интервального ряда составьте таблицу частот.
в) Постройте гистограмму частот.

750. На гистограмме (рис. 5.6) представлены данные о площадях квартир в одном из микрорайонов города N. Всего в выборке 1500 квартир.

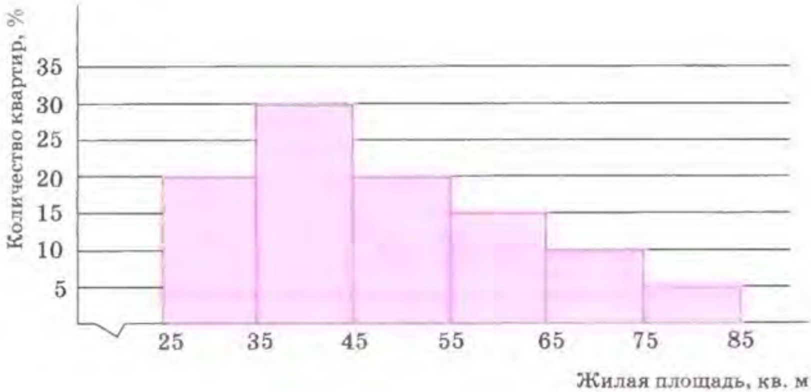


Рис. 5.6

а) Составьте таблицу частот для срединных значений каждого интервала, указанного на гистограмме.
б) Найдите среднюю площадь квартиры в исследуемом микрорайоне.

751. Работниками телевидения был проведен опрос среди молодежи с целью определения времени просмотра телевизионных программ. Всего было опрошено 1000 человек. Зависимость числа зрителей от времени суток показана на гистограмме (рис. 5.7).

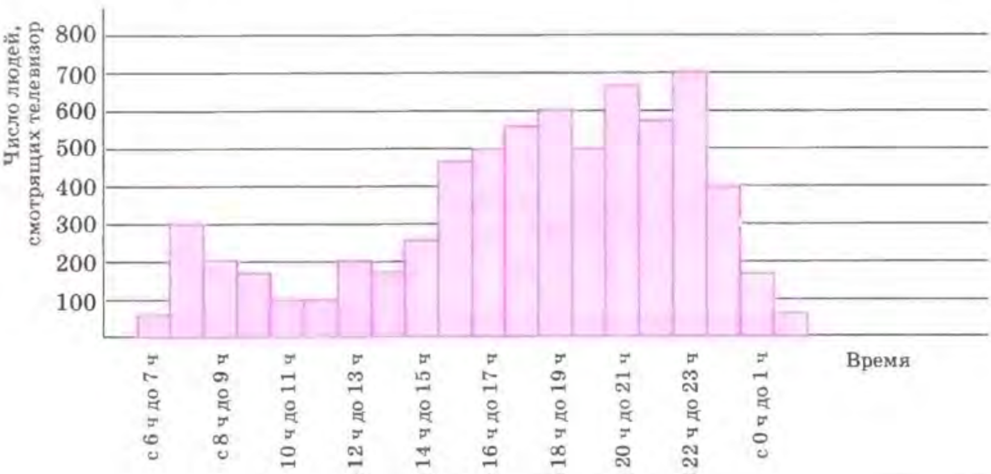


Рис. 5.7

а) В какие периоды времени число людей, смотрящих телевизор, превосходит 500 человек? Какой процент от всего времени

показа составляет время, когда телевизор смотрят более 500 человек?
б) Сколько человек в среднем смотрят телевизор в течение часа в период с 16 до 19 часов? Какой процент всех опрошенных составляют эти люди?

5.3 Характеристики разброса

Вам известны характеристики числового ряда, позволяющие оценить его поведение «в среднем», — среднее арифметическое, медиана, мода. Для получения более полного представления о числовом ряде, помимо средних, надо знать *характеристики разброса*, показывающие, как сильно значения ряда «рассеяны» вокруг средних.

Простейшая характеристика такого ряда вам также знакома — это размах. Однако этой характеристики недостаточно. На величину размаха может сильно повлиять какое-то одно (возможно, даже ошибочное) значение в ряду данных. Кроме того, размах — слишком грубая мера разброса, поскольку учитывает только два числа в ряду — наибольшее и наименьшее.

О том, насколько разбросаны числа в ряду данных, можно судить по их *отклонениям от среднего арифметического*. Чтобы понять особенность такой характеристики, как набор отклонений от среднего, найдем, например, отклонения для данных следующего ряда:

$$1;\ 3;\ 4;\ 6;\ 7;\ 10;\ 11.$$

Вычислим среднее арифметическое:

$$\frac{1+3+4+6+7+10+11}{7}=6.$$

Тогда отклонения будут соответственно равны: $6-1$, $6-3$, $6-4$ и т. д. А ряд отклонений выглядит так:

$$5;\ 3;\ 2;\ 0;\ -1;\ -4;\ -5.$$

Вообще, пусть имеются данные $x_1, x_2, ..., x_n$. Обозначим их среднее арифметическое через $\bar{x}$. Тогда отклонения данных от среднего соответственно равны $\bar{x}-x_1$, $\bar{x}-x_2$, ..., $\bar{x}-x_n$. Понятно, что отклонения могут быть и положительными, и отрицательными, и равными нулю. При этом *сумма всех отклонений всегда равна нулю.* (Убедитесь в справедливости этого утверждения для рассмотренного примера.)

Если модули отклонений малы, то данные сгруппированы около среднего. Чем больше различаются модули отклонений, тем более «разбросанным» является ряд.

Однако такая характеристика, как набор отклонений, неудобна, если чисел много; желательно описывать разброс чисел в ряду с помощью одного числа, некоторого «среднего». Очевидно, что использовать в качестве характеристики разброса «среднее отклонение» нельзя, так как оно равно нулю. Поэтому в статистике принято находить *среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего значения.* Такую меру разброса называют *дисперсией* (от латинского слова *dispersio*, означающего «рассеяние») и обозначают буквой D. На величину дисперсии влияют все отклонения, причем независимо от их знаков.

Найдем дисперсию числового ряда, рассмотренного выше:

$$D = \frac{25+9+4+0+1+16+25}{7} = \frac{80}{17} \approx 11.$$

Но у дисперсии есть один существенный недостаток: если исходные значения ряда измеряются в каких-то единицах (например, в часах), то у дисперсии эти единицы возводятся в квадрат («квадратные» часы). Избавиться от таких странных единиц измерения можно, если использовать другую характеристику разброса — *стандартное отклонение.*

Стандартным (или средним квадратичным) отклонением числового ряда называется квадратный корень из дисперсии.

За стандартным отклонением в статистике закрепилось «стандартное обозначение»: его всегда обозначают греческой буквой σ («сигма»). В рассмотренном примере стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{11} \approx 3{,}3$.

Характеристики разброса, как и средние характеристики, можно находить по таблице частот.

■ Пример 1. Найдем размах и стандартное отклонение отметок ученика, заданных следующей частотной таблицей:

Отметка	2	4	5
Абсолютная частота	1	3	6
Относительная частота	0,1	0,3	0,6

Из таблицы видно, что всего у ученика десять отметок: одна двойка, три четверки и шесть пятерок.

Размах ряда отметок вычислить просто: он равен разности последнего и первого значений в этом ряду (в таблице частот эти значения упорядочены): $5 - 2 = 3$.

Найдем среднее арифметическое отметок:

$$\frac{2\cdot1+4\cdot3+5\cdot6}{10}=4,4.$$

Дисперсию, как и среднее арифметическое, можно вычислять с использованием либо абсолютных, либо относительных частот:

$$D=\frac{(2-4,4)^2\cdot1+(4-4,4)^2\,3+(5-4,4)^2\cdot6}{10}=0,84.$$

Или иначе:

$$D=(2-4,4)^2\cdot0,1+(4-4,4)^2\cdot0,3+(5-4,4)^2\cdot0,6=0,84.$$

Теперь вычислим стандартное отклонение:

$$\sigma=\sqrt{0,84}\approx0,92.$$

Обратите внимание: практически все отметки ученика отличаются от среднего меньше чем на σ, т. е. он учится достаточно стабильно. Одна двойка, которая выпадает из этого диапазона, по-видимому, для него случайная.

■ Пример 2. Проведем небольшое статистическое исследование (для всех подсчетов будем использовать калькулятор).

Перед вами данные о зарплате (в рублях) работников двух конкурирующих малых предприятий A и B в 2005 г.:

A: 5130, 5900, 9340, 5410, 5350, 4920, 9720, 10 420, 5090, 10 920, 9950, 5760, 5180, 9630, 5970;

B: 6840, 10 880, 7910, 6170, 5290, 6980, 7860, 5740, 5340, 9910, 7020, 10 020, 8360, 9550, 8980.

Как сравнить два этих ряда? Прежде всего можно отметить, что зарплаты сотрудников находятся в одной и той же «вилке» — от 5000 до 11 000 р. Размах данных практически одинаков.

Посчитав среднее арифметическое зарплаты на первом и на втором предприятии, получим: $\bar{a}=7246$ р., $\bar{b}=7790$ р. Таким образом, средняя зарплата на втором предприятии несколько выше.

Кроме того, даже «на глазок» видно, что на втором предприятии зарплаты группируются «кучнее» вокруг средней, а вот на первом предприятии разброс зарплат вокруг среднего арифметического больше. Чтобы точнее охарактеризовать разброс каждого ряда данных, вычислим в каждом случае дисперсию и стандартное отклонение.

Составим таблицу, которая поможет нам посчитать дисперсию зарплат для первого предприятия:

x	$\lvert \overline{a} - x \rvert$	$(\overline{a} - x)^2$
5130	2116	4 477 456
5900	1346	1 811 716
9340	2094	4 384 836
5410	1836	3 370 896
5350	1896	3 594 816
4920	2326	5 410 276
9720	2474	6 120 676
10 420	3174	10 074 276
5090	2156	4 648 336
10 920	3674	13 498 276
9950	2704	7 311 616
5760	1486	2 208 196
5180	2066	4 268 356
9630	2384	5 683 456
5970	1276	1 628 176

Сложив числа в последнем столбце таблицы и разделив их на 15, т. е. на общее число данных в первом ряду, получим, что дисперсия первого ряда чисел равна 5 232 757.

Точно так же найдем дисперсию зарплат для второго предприятия. Она равна 3 006 964.

Найдем стандартное отклонение для зарплат на каждом предприятии:

$$\sigma_1 = \sqrt{5232757} \approx 2287, \quad \sigma_2 = \sqrt{3006964} \approx 1734.$$

Теперь проанализируем полученные результаты:

Во-первых, средняя зарплата специалистов на втором предприятии примерно на 550 р. выше, чем на первом. Это означает, что человек, поступающий работать на второе предприятие, может ожидать большей зарплаты, чем человек, поступающий на первое, хотя, конечно, это лишь прогноз.

Во-вторых, разброс зарплат на первом предприятии больше, чем на втором. Это значит, что для работающего на втором предприятии больше вероятность получать зарплату, близкую к средней, больше стабильность, зато на первом предприятии больше возможность получать высокую зарплату, но и больше риск получать зарплату, существенно меньшую средней.

A

752. Для каждого из двух наборов чисел вычислите среднее арифметическое, дисперсию, стандартное отклонение и сравните их:

а) 3, 7, 10, 11, 19 и 10, 11, 15, 17, 22;

б) 1, 3, 5, 7, 9 и 2, 4, 6, 8, 10.

753. Жалобы на опоздания электричек, поступившие в диспетчерскую станции Семафорово в течение недели, позволили составить диаграмму частот по опозданиям за неделю (рис. 5.8). Определите среднее число опозданий за неделю и стандартное отклонение.

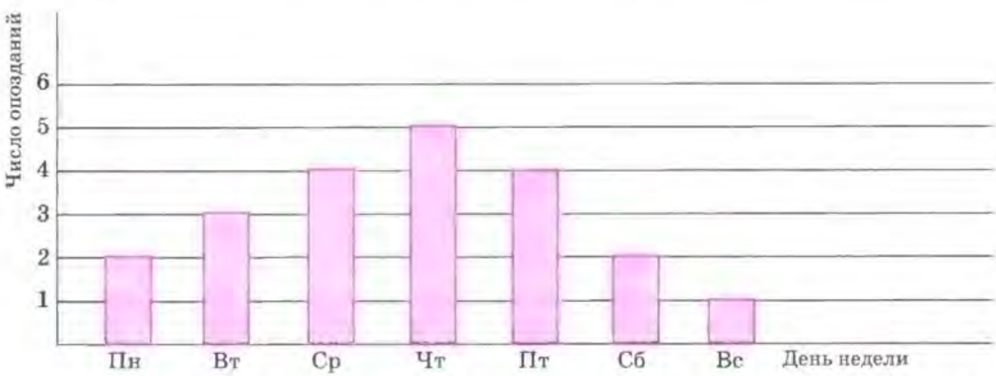


Рис. 5.8

754. В таблице указано число книг, прочитанных несколькими ребятами за летние каникулы. Назовите имена тех ребят, для которых модуль разности между количеством прочитанных ими книг и средним арифметическим числа всех прочитанных книг превышает стандартное отклонение.

Имя	Аня	Витя	Игорь	Оля	Петя	Катя	Лена	Саша
Число прочитанных книг	8	10	6	1	0	8	5	3

Б

755. На стройку с кирпичного завода привезли 20 упаковок кирпича. Чтобы проверить качество партии, из каждой упаковки вытащили случайным образом по кирпичу и замерили длину каждого. Ниже представлены полученные величины (в см): 20,5; 20,1; 21,3; 20,3; 19,8; 19,2; 20,1; 19,6; 20,2; 20; 20,5; 19,7; 19,9; 20,5; 19,6; 20,1; 19,4; 19,8; 19,1; 20,3.

а) Определите среднюю длину кирпича.

б) Найдите величину стандартного отклонения длины кирпича от средней.

в) Каков процент кирпичей, длина которых отличается от средней больше чем на 0,2 см? больше чем на величину стандартного отклонения?

756. Что можно сказать о ряде чисел, в котором:

а) размах равен 0;

б) дисперсия равна 0?

757. Докажите, что в любом ряду данных сумма отклонений данных от их среднего арифметического равна нулю.

5.4 Статистическое оценивание и прогноз

Вы знаете, что с ростом числа экспериментов относительная частота наблюдаемого события стремится к вероятности. Значит, по известной вероятности можно прогнозировать частоту повторения интересующего нас события в будущем.

■ Пример 1. При проведении контроля качества среди 1000 случайно отобранных деталей оказалось 6 бракованных. Сколько бракованных деталей следует ожидать среди 30 000 деталей?

По результатам контроля можно оценить вероятность того, что произведенная деталь бракованная. Приближенно она будет равна относительной частоте этого события:

$$P = \frac{6}{1000} = 0{,}006.$$

Такую частоту следует ожидать и в будущем. Поэтому среди 30 000 деталей можно ожидать около $30\,000 \cdot 0{,}006 = 180$ бракованных.

■ Пример 2. Население города Петрозаводска составляет около 300 000 жителей. У скольких жителей этого города день рождения может приходиться на 29 февраля?

День 29 февраля бывает только в високосном году — один раз в четыре года. Значит, это один день из $3 \cdot 365 + 366 = 1461$ дней. Следовательно, для случайно выбранного человека его день рождения попадает на 29 февраля с вероятностью

$$P = \frac{1}{1461} \approx 0{,}00068.$$

Это значит, что среди 300 000 жителей Петрозаводска следует ожидать около

$$300\,000 \cdot 0{,}00068 \approx 200$$

человек, которым приходится праздновать свой день рождения раз в четыре года.

На прогнозировании частоты основан один интересный способ определения численности популяций, используемый в биологии.

■ Пример 3. Из озера выловили 106 рыб, которых пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный отлов — на этот раз поймали 98 рыб, среди которых оказалось 6 помеченных. Этот результат позволяет вычислить, сколько приблизительно рыб живет в озере.

Обозначим неизвестную нам численность рыб в озере через N. Тогда, с одной стороны, вероятность поймать помеченную рыбу в озере будет равна $\frac{106}{N}$.

С другой стороны, эта вероятность должна приближенно равняться относительной частоте появления помеченных рыб во втором улове:

$$\frac{106}{N} \approx \frac{6}{98}.$$

Отсюда $N \approx \frac{106 \cdot 98}{6} \approx 1700.$

Заметим, что в статистике используют более тонкие вероятностные методы. Но для получения грубых оценок этот метод вполне допустим.

Сравнивая вероятности всех возможных исходов эксперимента, иногда полезно знать, какой из них наиболее вероятный. Именно на него следует «ставить», если вас просят предсказать, каким исходом скорее всего закончится ваш эксперимент.

■ Пример 4. Выпадание какой суммы очков наиболее вероятно при двух бросаниях кубика?

Наибольшее число, которое может выпасть, — 12, наименьшее — 2. Составим таблицу частот для чисел, выпадающих при первом и втором бросании:

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Варианты	11	12 21	13 31 22	14 41 23 32	15 51 24 42 33	16 61 25 52 34 43	26 62 35 53 44	36 63 45 54	46 64 55	56 65	66
Абсолютная частота	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Таким образом, наиболее вероятное значение суммы — 7 очков. Так как она может появиться в 6 случаях из 36, то ее вероятность равна $\frac{1}{6}$.

А

758. При проверке выбранных случайным образом 200 лампочек из партии в 2500 штук 2 лампочки оказались неисправными. Сколько неисправных лампочек можно ожидать в этой партии?

759. При изучении состояния знаний девятиклассников была обследована представительная выборка в 3000 учащихся. За контрольную работу оценку «5» получили 660 учащихся. Какова вероятность того, что наудачу выбранный девятиклассник выполнит эту контрольную работу на «5»?

760. Относительная частота попадания в мишень в тире в среднем составляет 0,6. За день около 100 пуль улетели «в молоко». Сколько всего выстрелов было сделано?

761. Абонент забыл последнюю цифру в номере телефона и набирает ее наугад. Сколько попыток в худшем случае ему придется сделать? Что более вероятно — набрать нужный номер с первой попытки или с десятой?

762. Петр уже 10 раз подряд участвует в еженедельной лотерее, но ни разу не выиграл. Однако он продолжает играть, утверждая: «Лотерея — случайная игра, иногда выигрываешь, иногда проигрываешь. Я уже долго не выигрывал, поэтому уверен, что выиграю в одном из следующих розыгрышей». Согласны ли вы с его рассуждением? Почему?

Б

763. В коробке 100 шаров белого и черного цвета. Из них 60 раз вынимали шар, возвращая его каждый раз обратно. При этом белый шар появился в 18 случаях. Сколько предположительно белых шаров в коробке?

764. В Москве около 12 млн жителей. У скольких жителей Москвы день рождения может приходиться на 1 января?

765. Из озера выловили 64 рыбы, всех их пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный отлов — на этот раз поймали 50 рыб, среди которых оказалась одна помеченная. Какова вероятная численность рыб в озере? Что можно сказать о количестве рыб, живущих в озере, если бы среди выловленных рыб не было ни одной помеченной?

766. Кубик бросают три раза. Каково наиболее вероятное значение суммы выпавших очков?

5.5 Вероятность и комбинаторика

(Для тех, кому интересно)

Вы уже не раз решали задачи на вычисление вероятности, находя число возможных и благоприятных событий с помощью приемов комбинаторики. Решим еще несколько таких задач, рассмотрев некоторые новые ситуации.

■ Пример 1. Из коробки, в которой лежат два белых и два черных шара, не глядя вынимают два шара. Найдем вероятность двух событий: событие A — вынуть два шара одного цвета; событие B — вынуть два шара разных цветов.

Напомним, что при определении числа возможных исходов нужно различать все шары, участвующие в эксперименте (а не только их цвета). Поэтому пронумеруем шары, при этом для удобства белым шарам присвоим номера 1 и 2, а черным — 3 и 4.

1	2	3	4
б	б	ч	ч

Найдем число возможных исходов с помощью перебора; всего их шесть: 12, 13, 14, 23, 24, 34.

Для события A благоприятных исходов два: 12 и 34. Значит, вероятность вынуть два шара одного цвета равна $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Для события B благоприятными будут остальные четыре исхода, вероятность наступления этого события равна $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Такие события, как A и B, рассмотренные в задаче, называют *противоположными*.

Событие B называют противоположным событию A, если оно происходит всякий раз, когда не происходит A, и наоборот.

Это означает, что исходами, благоприятными для события B, будут все исходы, неблагоприятные для A. Значит, если из n исходов эксперимента m исходов благоприятны для A, то остальные $n - m$ исходов будут благоприятны для B. Тогда $P(A)=\frac{m}{n}$, а вероятность события B может быть вычислена следующим образом:

$$P(B)=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A), \text{ т. е. } P(B) = 1 - P(A).$$

Эта формула называется **формулой вероятности противоположного события**.

■ Пример 2. Вы получаете 6 карт из колоды. Какова вероятность, что среди них есть хотя бы один туз?

Во всех задачах, где в условии присутствует фраза «хотя бы один ...», проще найти ответ через вероятность противоположного события — «ни один ...».

Найдем вероятность события, противоположного рассмотренному в задаче, — «среди шести вынутых карт нет ни одного туза»:

$$\frac{32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28\cdot27}{36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32\cdot31}\approx 0{,}465.$$

Значит, вероятность противоположного события — «среди шести карт есть хотя бы один туз» — равна

$$1 - 0{,}465 = 0{,}535.$$

■ Пример 3. У игрока A в коробке 25 белых и 50 красных шаров, у игрока $Б$ в коробке 40 белых и 80 красных шаров. Игроки одновременно не глядя вынимают из коробки по одному шару. Победителем в игре становится тот, кто первым вынет из своей коробки белый шар. Если они вынимают белый шар одновременно — ничья.

Игрок A считает, что эта игра несправедливая, так как у него в коробке меньше белых шаров.

Игрок *Б* считает, что эта игра несправедливая, так как у него в коробке больше красных шаров.

Справедлива ли на самом деле эта игра?

Прежде всего заметим, что в этой игре оговорены не все условия. После каждого тура игры можно возвращать шар в свою коробку, а можно не возвращать, и от этого необговоренного условия зависит оценка шансов на победу каждого из игроков.

Рассмотрим оба варианта игры.

Пусть после каждого тура шары возвращаются в коробки. Тогда легко понять, что на каждом шаге вероятность вынуть белый шар каждым из игроков одинакова и равна $\frac{1}{3}$.

Значит, в этом варианте правил шансы игроков на победу в игре равны, т. е. игра справедливая.

А вот если после каждого тура вынутый шар не возвращается в свою коробку, то на каждом шаге соотношение белых и красных шаров у каждого из игроков меняется. Этой игре соответствует гораздо более сложная вероятностная модель. Попробуем в ней разобраться.

Понятно, что и в этом варианте в начале игры, на первом шаге, вероятность вынуть белый шар для каждого из игроков одинакова и равна $\frac{1}{3}$.

Но если в первом туре ни один из игроков не вынул белый шар, то во втором туре у игрока *А* больше шансов выиграть, так как в его коробке соотношение шаров станет 25 : 49, а у игрока *Б* — 40 : 79. И после каждого шага это неравенство шансов только усугубляется. (Убедитесь в этом с помощью калькулятора, выяснив, как меняются вероятности вынуть белый шар для каждого из игроков с каждым следующим шагом, вычислив их для первых трех-четырех шагов.)

Точный расчет соотношения шансов на выигрыш в игре в ситуации, когда шары после каждого тура не возвращаются в коробки, вы выполнить пока не можете — это требует использования более сложных формул теории вероятностей, а также весьма громоздких вычислений, для которых обычно используется компьютер. Но тем не менее ваших знаний и представлений оказалось достаточно, чтобы ответить на вопрос, справедливы ли правила этой игры, и обосновать свое мнение.

767. Кубик бросают два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет одинаковое число очков? разное число очков?

768. Одновременно бросают 2 кубика: белый и черный.

а) Сколько возможных исходов у этого эксперимента?

б) Какова вероятность того, что число, выпавшее на белом кубике, больше числа, выпавшего на черном кубике?

в) Какова вероятность того, что число, выпавшее на белом кубике, не превосходит числа, выпавшего на черном кубике?

769. Одновременно бросают 3 монеты.
а) Сколько возможных исходов у этого эксперимента?
б) С какой вероятностью все монеты выпадут на одну сторону?
в) С какой вероятностью выпадет один или два орла?

770. Из колоды в 36 карт одну за другой вытягивают две карты. Какова вероятность того, что они одного цвета, если выбор осуществляется без возвращения? с возвращением?

771. В шкафу находится 3 пары ботинок различных размеров. Из них случайно выбирают 2 ботинка. Найдите вероятность того, что они парные.

772. В номере автомашины содержится три цифры. Какова вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины будет содержать хотя бы одну цифру 3?

5.6 Решение систем уравнений второй степени

(Для тех, кому интересно)

Решение систем, содержащих два уравнения с двумя переменными второй степени, является в принципе весьма трудной задачей, выходящей за рамки школьного курса математики. В то же время в некоторых частных случаях такие системы могут быть решены с помощью простых и изящных приемов.

■ Пример 1. В п. 3.5 мы рассмотрели систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3. \end{cases}$$

Ее, как вы видели, можно решить способом подстановки. Познакомимся теперь с другими способами решения этой системы. Основная идея каждого из них заключается в том, что данная система сводится к нескольким системам более простого вида.

1-й способ. Умножим обе части второго уравнения системы на 2 и сложим его с первым. Получим уравнение

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4, \text{ т. е. } (x + y)^2 = 4.$$

Вместе со вторым уравнением оно образует систему

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 4 \\ xy = -3. \end{cases}$$

Равенство $(x + y)^2 = 4$ означает, что $x + y = 2$ или $x + y = -2$. Таким образом, система «распадается» на две более простые:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -3. \end{cases}$$

Решением первой системы служат пары $(-1;\ 3)$ и $(3;\ -1)$; решениями второй — пары $(1;\ -3)$ и $(-3;\ 1)$. Каждая из этих пар удовлетворяет исходной системе, и других решений она не имеет. Таким образом, данная система имеет четыре решения: $(-1;\ 3)$, $(3;\ -1)$, $(1;\ -3)$, $(-3;\ 1)$.

Чтобы лучше понять содержательную сторону приведенного решения, обратимся к графической иллюстрации.

На рисунке 5.9 построены окружность и гипербола — графики уравнений, входящих в систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3. \end{cases}$$

Они пересекаются в четырех точках.

На рисунке 5.10 в одной системе координат показано графическое решение систем

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + 2 = -2 \\ xy = -3. \end{cases}$$

Каждая прямая пересекает гиперболу $xy = -3$ в двух точках, а всего мы имеем четыре точки пересечения. Это те же точки, которые получились при пересечении гиперболы и окружности.

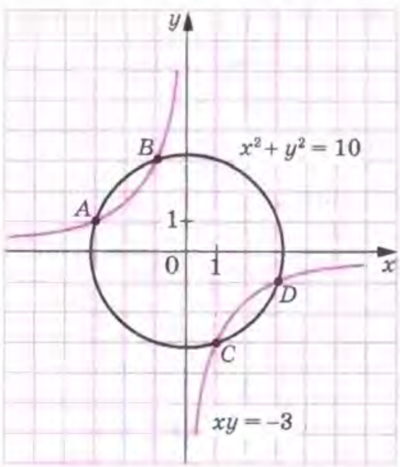


Рис. 5.9

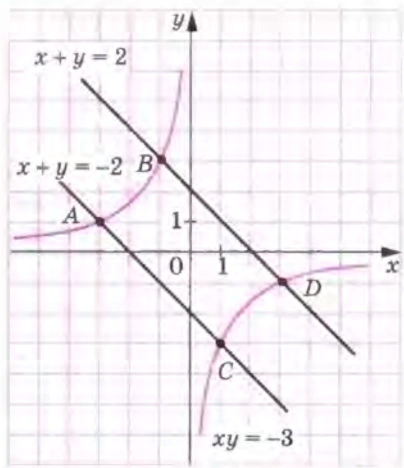


Рис. 5.10

2-й способ. Сложим почленно первое уравнение системы $x^2 + y^2 = 10$ сначала с уравнением $2xy = -6$, а затем с уравнением $-2xy = 6$. Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 10 - 6 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 10 + 6, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} (x + y)^2 = 4 \\ (x - y)^2 = 16. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $x + y = 2$ или $x + y = -2$. Из второго уравнения находим, что $x - y = 4$ или $x - y = -4$.

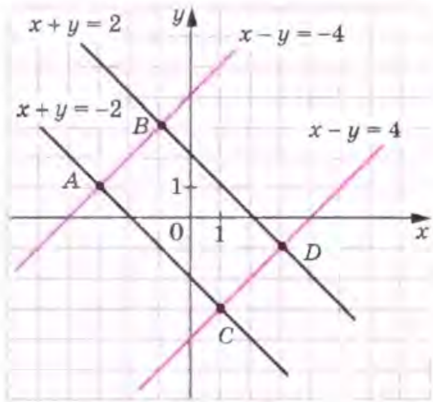


Рис. 5.11

Рассматривая каждое из уравнений в первой строке совместно с каждым уравнением во второй строке, приходим к четырем системам линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = -4. \end{cases}$$

Решив каждую из них, получим в результате четыре пары чисел: (3; −1), (−1; 3), (1; −3), (−3; 1).

Рассмотренное решение проиллюстрировано графически на рисунке 5.11. Теперь мы имеем четыре прямые. При попарном пересечении они указывают нам те же самые точки, которые получились при пересечении окружности и гиперболы (см. рис. 5.9).

■ Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 97 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы, выделив в левой части квадрат двучлена:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 97 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение вместо xy число 6, получим:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \cdot 36 = 97, \text{ т. е. } (x^2 + y^2)^2 = 169.$$

Значение выражения $x^2 + y^2$ не может быть отрицательным, поэтому

$$x^2 + y^2 = 13.$$

Таким образом, исходная система свелась к более простой:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6, \end{cases}$$

для которой вы знаете несколько способов решения.

Доведите решение системы до конца.

773. Решите систему уравнений разными способами:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ xy = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = -2. \end{cases}$

774. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 32 \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

Указание. а) Преобразуйте левую часть первого уравнения, воспользовавшись тождеством

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b).$$

ДЗ Дополнительные задания к главе 5

Статистические исследования

775. Девятиклассники отгадывали кроссворд (каждый самостоятельно). После этого они сравнили число неразгаданных слов. Данные представлены в таблице:

Имя	Вася	Петя	Валя	Катя	Гена	Аня	Гоша	Вера	Оля
Число неразгаданных слов	3	2	1	2	4	3	1	2	3

Имя	Дима	Галя	Паша	Таня	Зоя	Боря	Лена	Тоня	Ваня
Число неразгаданных слов	3	2	4	3	2	4	2	1	3

а) Для каждого количества неразгаданных слов составьте таблицу абсолютных и относительных частот.
б) Постройте полигон относительных частот.
в) Найдите процент ребят, не разгадавших более двух слов.
г) Найдите среднее число неразгаданных слов в кроссворде.

776. Известно, что О — самая распространенная гласная в русском языке. Прочтите отрывок из петербургской повести А. С. Пушкина «Медный всадник»:

На берегу пустынных волн
Стоял он, дум великих полн,
И вдаль глядел. Пред ним широко
Река неслася; бедный челн
По ней стремился одиноко.
По мшистым, топким берегам
Чернели избы здесь и там,
Приют убогого чухонца;
И лес, неведомый лучам
В тумане спрятанного солнца,
Кругом шумел.
И думал он:
Отсель грозить мы будем шведу,
Здесь будет город заложен
Назло надменному соседу.
Природой здесь нам суждено
В Европу прорубить окно,
Ногою твердой стать при море.
Сюда по новым им волнам
Все флаги в гости будут к нам,
И запируем на просторе.

а) Подсчитайте частоту каждой гласной в этом отрывке. Подтверждают ли ваши результаты правильность утверждения, приведенного в условии задачи?
б) Постройте полигон относительных частот появления гласных в этом отрывке.
в) Сравните относительные частоты гласных У и И, гласных А и Е в приведенном отрывке.

777. На рисунке 5.12 изображен график, показывающий ежедневное количество дорожно-транспортных происшествий (ДТП) на улицах города Новинска в январе текущего года.
а) Постройте по этим данным интервальную таблицу частот, разбив диапазон значений от 20 до 50 на 6 равных интервалов.
б) Нарисуйте гистограмму относительных частот.
в) Определите среднее количество ДТП в день.

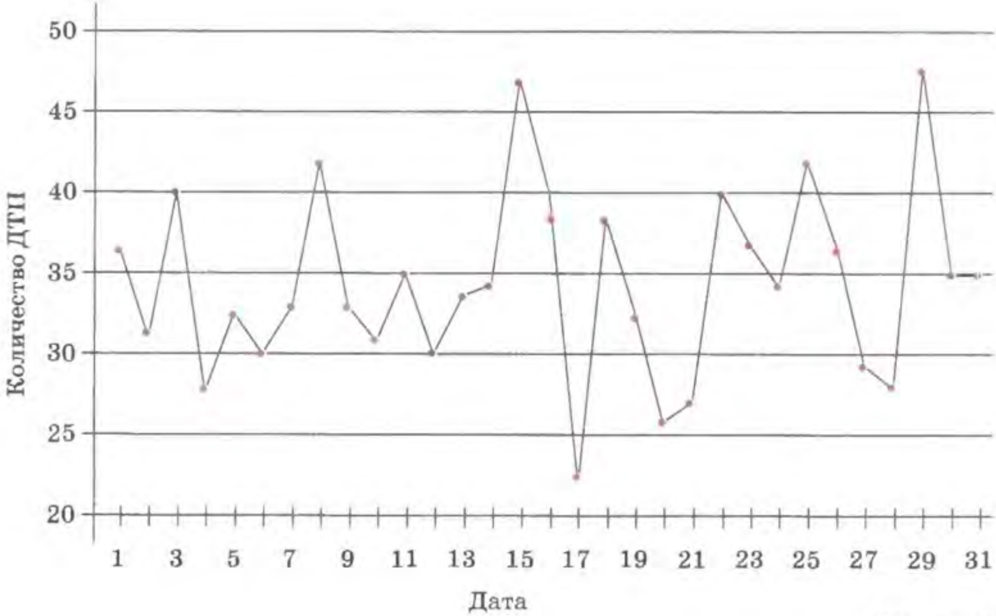


Рис. 5.12

778. В таблице приведены данные о росте участников легкоатлетических соревнований:

Рост, см	Число участников
160—165	5
165—170	12
170—175	19
175—180	25
180—185	10
185—190	7
190—195	2

а) Найдите среднее арифметическое ростов участников соревнований.

б) В каком интервале находится медиана ростов спортсменов?

Решение задач на вероятность

779. Один любитель лотерей на карточке «Спортлото» (6 из 49) отметил номера 1, 2, 3, 4, 5, 6, а другой на своей карточке отметил номера 5, 12, 17, 23, 35, 49. Как вы думаете, выигрыш какого набора чисел более вероятен? Обоснуйте свое мнение.

780. Ребята проводили опыты по подбрасыванию монеты. Из 100 бросков орел выпал 46 раз, решка — 54 раза. Ребята поспорили: что вероятнее при следующем броске — появление орла или решки?
«Вероятнее появление орла, — сказал первый, — ведь до этого эксперимента он выпадал реже, чем решка, значит, теперь должен выпадать чаще».
«Вероятнее появление решки, — сказал второй, — раз она выпадала чаще, то и будет выпадать чаще».
«Мы знаем, что появление орла и решки в каждом эксперименте равновероятно, — сказал третий, — и вероятность появления орла или решки одинакова в 101-м опыте, так же как в первом или любом другом».
Согласны ли вы с кем-то из участников спора и почему?

781. Экзамен по истории включает 60 вопросов. Вова утверждает, что подготовил 80% всех вопросов экзамена. Папа задал ему три вопроса, ни на один из которых он не ответил. Есть ли у папы основания подозревать сына во лжи?
Указание. Вычислите вероятность того, что папа задал подряд три вопроса, не выученных Вовой.

782. Перед тем как начать серию испытаний с кубиком, ребята высказали такие предположения:
Олег: «Шестерка впервые появится в 1-м испытании».
Глеб: «Шестерка впервые появится в 6-м испытании».
У кого из них больше шансов, что сделанный им прогноз оправдается?

783. Одновременно бросают 3 кубика. Какова вероятность того, что:
а) на всех кубиках выпадут одинаковые числа;
б) все числа на кубиках разные?

784. Какова вероятность того, что в компании из 12 человек все дни рождения придутся на разные месяцы года?

785. На один ряд из 7 мест случайным образом рассаживаются 5 мальчиков и 2 девочки. Какова вероятность того, что девочки будут сидеть рядом?

786. Ваш друг задумал число от 1 до 10. Вы должны угадать его с трех попыток.

а) Каковы ваши шансы на успех?

б) Сколько вам нужно попыток, чтобы шансы были больше $\frac{1}{2}$?

Вопросы для повторения к главе 5

1. От какого слова произошел термин «статистика»? Приведите примеры использования статистики в разных областях жизни.
2. Какие вы знаете статистические характеристики? Какие из них описывают разброс данных?
3. Какие графические иллюстрации используются в статистических исследованиях рядов данных? Как называется графическая интерпретация интервального ряда?

Задания для самопроверки к главе 5

(Обязательные результаты обучения)

1. Используя диаграмму на рисунке 5.4, выполните следующие задания:

   а) постройте таблицу абсолютных частот, если всего в городе 1 млн квартир;

   б) постройте соответствующий полигон абсолютных частот;

   в) определите по таблице среднее количество комнат в квартире.
2. Вернитесь к задаче **748** и постройте гистограмму частот для 2005 г.
3. В результате обследования представительной выборки пятиклассников региона оказалось, что 60% учащихся выполнили проверочную работу на «4» или «5». Сколько таких отметок можно ожидать при выполнении этой работы в регионе, если всего в пятых классах региона обучается 1200 школьников?
4. Из партии телевизоров в 800 штук отдел контроля подверг проверке 100 штук. Оказалось, что 3 телевизора имеют дефекты. Сколько телевизоров с дефектами можно ожидать в этой партии?

Тест к главе 5

1. Результаты, которые четыре боксера показали в течение полугода, представлены в таблице:

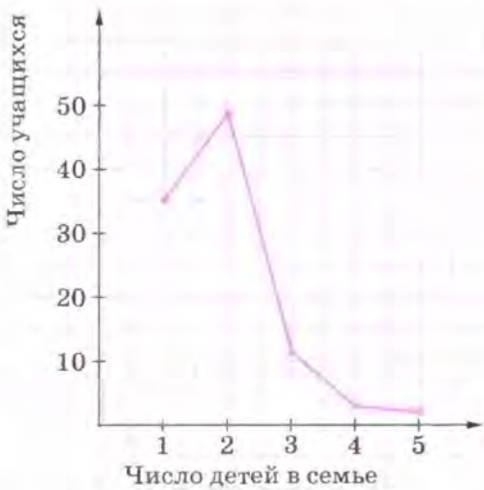
Имя боксера	Андрей	Борис	Владимир	Григорий
Число проведенных боев	15	20	22	16
Число побед	9	16	11	12

Тренер решил направить на городской чемпионат одного спортсмена, у которого относительная частота побед выше, чем у других. Кого выбрал тренер?

А. Андрея. **Б.** Бориса. **В.** Владимира. **Г.** Григория.

2. Случайным образом отобранные 100 учащихся школы отвечали на вопрос: «Сколько детей в вашей семье?» На рисунке представлен полигон частот, на котором показаны результаты этого опроса. Семьи, в которых более трех детей, считают многодетными. Сколько процентов учащихся школы живут в многодетных семьях?

А. 17%. **В.** 5%.
Б. 12%. **Г.** 9%.



3. Используя рисунок к заданию 2, определите, какое число детей встречается в семьях учащихся школы наиболее часто.

Ответ. ____________

4. В таблице записано, какая температура (в градусах Цельсия) наблюдалась ежедневно в полдень в городе N в течение одной недели:

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
16	21	22	19	21	21	20

На сколько отличается средняя температура (среднее арифметическое) от медианы температур недели?

А. На 6°. **Б.** На 2°. **В.** На 0°. **Г.** На 1°.

5. Средний рост мальчиков в младшей группе плавательного бассейна равен 143 см. Рост Саши, который занимается в этой группе, 147 см. Какое из следующих утверждений является верным?

А. Половина мальчиков группы имеет рост, меньший 143 см, а половина — больший.
Б. В группе обязательно есть мальчик, рост которого 143 см.
В. В группе обязательно есть мальчик, рост которого меньше 143 см.
Г. Большинство мальчиков этой группы имеют рост 143 см.

6. По гистограмме, изображенной на рисунке 5.6 (см. с. 273), определите, сколько квартир в исследованной выборке имеют площадь менее 45 м^2.

Ответ. ____________________

7. В таблице приведены сведения об отметках Сергея по алгебре за второе полугодие:

Отметка	2	3	4	5
Абсолютная частота	3	6	12	8

Найдите стандартное отклонение этого ряда отметок.

Ответ. ____________________

8. При выборочной проверке партии консервов масса трех банок из 450 оказалась меньше допустимой. Какова вероятность того, что наудачу выбранная банка из этой партии будет иметь массу меньше допустимой?

А. Менее 1%. **Б.** От 1 до 2%. **В.** От 2 до 3%. **Г.** Более 3%.

9. Для определения численности популяции редкого вида бабочек в горной долине был произведен их отлов. Было помечено и затем отпущено 56 бабочек. Через некоторое время отлов повторили. Среди 60 пойманных бабочек 5 оказались помеченными. Сколько примерно бабочек в этой популяции?

Ответ. ____________________

10. Игральный кубик бросают два раза. Какое из следующих событий наиболее вероятно?

А. Оба раза выпадет единица.
Б. Оба раза выпадет пятерка.
В. Сумма выпавших очков будет равна 2.
Г. Сумма выпавших очков будет равна 10.

Ответы

ГЛАВА 1

19. б) 0,718...; г) 1,536... . **23.** д) Плюс; е) минус. **28.** в) $1-\sqrt{3}>1-\sqrt{5}$; $\frac{1}{1-\sqrt{3}}<\frac{1}{1-\sqrt{5}}$. **29.** 2) в) $10-\pi^2$; 3) г) $\pi-3$. **30.** д) Иррац.; е) рацион. **49.** в) Нет; г) да; д) да. **57.** г) $-1{,}05\leqslant-\frac{\pi}{3}\leqslant-1{,}04$. **58.** б) $7{,}44<2\sqrt{15}<8$; в) $14{,}1<2\sqrt{6}+3\sqrt{10}<14{,}6$. **60.** 30 см^2 $< S <$ 44 см^2; 30 см $< P <$ 34 см. **62.** а) Да; б) нет; в) неизвестно. **69.** Да. **70.** 1,2 см^2 $< S <$ 1,3 см^2; 5,3 см $< P <$ 5,6 см. **72.** а) $-8<x-y<-6$; б) $-16<x-y<-14$. **79.** в) $u\leqslant-6$; л) $x\geqslant-\frac{3}{2}$; м) $u\geqslant 0$. **80.** д) $z\leqslant-3$; ж) $x>-5\frac{1}{3}$; з) $z<0$. **81.** г) $x<1\frac{1}{4}$; е) $y>7$; з) $y\geqslant 33$. **82.** б) $x<3$; г) $x>-6{,}6$; е) $z\leqslant 11$. **83.** б) $x<3$; в) $z\leqslant 8$; г) $z>15$; д) $x>4$; е) $y>-20$. **86.** д) $x<1$; е) $x\leqslant 0{,}4$. **87.** а) Не более 62 мешков; б) не более 50 мин. **88.** а) 2 см $< z <$ 22 см; б) 5 см $< x <$ 37 см. **89.** а) От 300 до 1300 м; б) от 8 до 32 мин. **92.** в) x — любое; г) решений нет. **93.** б) $z<5$; в) $y\geqslant-2$; е) $x<5$; ж) решений нет; з) z — любое. **94.** а) $x=-3$; б) $x=1$. **95.** а) $0<x<12$; б) $0<x<2{,}5$. **96.** в) $\left[-\frac{1}{2};\,0\right]$; г) $[-15;\,4{,}5]$. **97.** а) 1; 2; б) −6; −5; −4; −3; −2; −1. **98.** а) При $a>-12$; б) при $a>\frac{1}{2}$; в) при $a>1$. **99.** б) $c<-\frac{1}{3}$. **100.** а) При $a<\frac{1}{6}$ и $a\neq 0$; б) при $-\frac{9}{16}<a<0$ и при $a>0$. **102.** −5; −4; −3; −2; −1. **107.** д) $(-\infty;\,2)$; е) $[-1;\,2]$; ж) $(-\infty;\,-5]$; з) $[-9;\,-4]$. **108.** г) $\varnothing$; д) $(3;\,+\infty)$; е) $\left(-\infty;\,\frac{1}{4}\right]$. **109.** д) $15\leqslant x<16$; е) $0<y\leqslant 5{,}5$. **110.** д) $-2\frac{1}{2}<y<-2\frac{1}{3}$; е) $-\frac{2}{5}\leqslant z<2$. **113.** а) 2 см, 3 см, 4 см, 5 см или 6 см. **114.** в) $\left(-\infty;\,-4\frac{1}{5}\right)$; д) $(-1;\,+\infty)$; е) $\left[-\frac{3}{8};\,5\frac{2}{3}\right]$. **115.** г) $x>\frac{1}{5}$; д) $x<-0{,}3$; е) $-10<x<8$. **116.** г) $-3<y\leqslant-2$; е) решений нет. **118.** а) 2; 3; б) −3; −2; −1; 0; в) −3; −2; −1. **119.** а) При $c\geqslant 8{,}5$; б) при $c<8{,}5$; в) при $c=8{,}5$. **121.** а) При $x<-\frac{1}{2}$; при $-\frac{1}{2}<x<3$; при $x>3$; б) при $2<x<4$; при $x<2$ и $x>4$; таких значений нет. **122.** в) При $-3\leqslant a\leqslant 0$; г) при $a<2$. **142.** е) $\sqrt{17}-\sqrt{6}<\sqrt{12}-\sqrt{3}$; ж) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}>\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{3}$; з) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{14}}{3}<\frac{\sqrt{14}-\sqrt{13}}{3}$.

147. а) Время движения по горизонтальной дороге меньше, чем по дороге с подъемом и спуском; б) Даша доберется до школы раньше Саши. **149.** 1) а) Увеличивается; б) $\frac{m}{n} < \frac{m+a}{n+a}$, где $a > 0$, m и n — натуральные числа и $m < n$. **153.** а) $l = 15,4 \pm 0,1$ см; $15,3 \leqslant l \leqslant 15,5$; д) $S = 27,30 \pm 0,01$ м^2; $27,29 \leqslant S \leqslant 27,31$. **154.** в) [21; 29]. **156.** в) Нельзя; г) можно. **157.** а) С точностью до 10^5 км^2; д) с точностью до 10^5 км. **158.** $2,4 \leqslant l \leqslant 2,6$, 4%; $2,47 \leqslant l \leqslant 2,49$, 0,4%. **159.** $d = 5 \pm 0,05$ см, $4,95 \leqslant d \leqslant 5,05$. **160.** а) 0,(5); б) 0,(54); г) 0,8(3). **164.** а) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{4}{33}$; д) $\frac{13}{55}$. **165.** а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{10}{99}$; в) $\frac{1}{99}$. **174.** ≈ 167 км/ч. **183.** в) $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. **184.** а) Между 1 и 2; б) между 0 и 1. **185.** а) $\sqrt{5} - 2$; б) $3 - \sqrt{2}$; в) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$; г) 1; д) $2\sqrt{3}$; е) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$. **186.** а) 5; б) 1. **187.** а) При x, равном 0, 1, 2, 3; б) при x, равном −4, −3, −2, −1. **188.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $\varnothing$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $\varnothing$. **189.** а) $x \leqslant 1$; б) $x < 2,5$; в) $x < 0$; г) $x > 0$. **190.** а) При $x \in [4; 8) \cup (8; +\infty)$; б) при $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 5]$; в) при $x \in [0; +\infty)$; г) при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0]$. **191.** а) При $a = 7$; б) при $a = 9$; в) при $a = -13$. **192.** а) $0 \leqslant x \leqslant 3$; б) $-1 \leqslant x < 0$; в) $-7 < x < 0$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **193.** а) 2; б) 6. **194.** а) При $10 < a < 40$; б) при $-20 < a < 10$.

Тест к главе 1. 1. Г. **2.** Г. **3.** Б. **4.** Б. **5.** Г. **6.** Г. **7.** В. **8.** Г. **9.** Г. **10.** А. **11.** 2; 4; 3. **12.** $x \geqslant 3$. **13.** Б. **14.** $x \leqslant -2,5$. **15.** 1; 2. **16.** При $a \leqslant 2,5$. **17.** В. **18.** $\sqrt{8} + \sqrt{10} < 6$.

ГЛАВА 2

202. б) $f(x) = 0$ при $x = 3$ и $x = -2,5$; $f(x) = -5$ при $x = 2,5$ и $x = -2$; в) не существует. **215.** г) Проходит через точку (−51; 867) и не проходит через две другие точки. **218.** б) Точки (10; −20), (−5; −5), $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{20}\right)$; в) на промежутке [−2; 6] $y_{наиб} = 0$, $y_{наим} = -7,2$; на промежутке [−5; 5] $y_{наиб} = 0$, $y_{наим} = -5$. **224.** б) $a = -\frac{1}{4}$. **241.** в) $\sqrt{6}$ и $-\sqrt{6}$; г) 4 и −4. **244.** а) $y = 2(x-2)^2$; б) $y = 2(x+2)^2$. **245.** а) (−1; 0); б) (3; 0); в) (1; 0); г) (−5; 0). **252.** 1) $y = x^2 - 1$; 2) $y = -x^2 + 3$; 3) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$. **254.** а) $y = (x-2)^2$, $y = (x+2)^2$; б) $y = (x+6)^2$, $y = (x+2)^2$. **257.** а) $y = 2x^2 + 12x + 17$; г) $y = -0,5x^2 - 2x$. **263.** в) $\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$; г) (1; 8). **270.** а) $A(-5; 0)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 5)$; в) $P(-\sqrt{3}; 0)$, $Q(0; 6)$, $N(\sqrt{3}; 0)$. **276.** 1) $h = -4,9t^2 + 20$.

278. 1) $A = 4\pi - \pi x^2$. **279.** 1) $A = 4\pi x - \pi x^2$. **280.** в) $a = 1$; г) $b = 2$. **281.** а) $b = -2$; б) $b = 4$. **282.** а) $p = 6$, $q = 13$; б) $p = -2$; $q = 6$. **285.** ≈ 11 м. **286.** $S = -x^2 + 8x$ при $x = 4$. **292.** а) $-7 < x < 3$; в) $x < -10$, $x > 0$; д) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **293.** в) $-1 < x < 7$; г) $x < -1$, $x > 1$. **294.** г) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; д) $[0; 0{,}5]$; е) $x \leqslant -4$, $x \geqslant 4$. **295.** в) $\varnothing$; д) $(-\infty; +\infty)$; з) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **296.** а) $-5 < x < 5$; б) $x \leqslant -\frac{1}{2}$; $x \geqslant \frac{1}{2}$; д) $[0; 1]$; и) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; к) $(-10; 10)$; м) $(-8; 8)$. **297.** б) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (3; +\infty)$; г) $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$. **298.** в) $x \leqslant -4$, $x \geqslant -3$; е) $[-1{,}5; 0]$. **299.** в) $x \leqslant -3$, $x \geqslant 0$; г) $x < 0$, $x > 10$. **300.** а) $-\frac{5}{2} < x < \frac{1}{2}$; в) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 2$. **301.** а) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; б) $x < -3$; в) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right)$; г) $x < -2$, $x > -\frac{2}{5}$. **303.** б) $\frac{1}{4} < x < 1$. **304.** а) $x < 5$, $x > 10$; г) $-7 \leqslant x \leqslant -6$. **305.** а) $0 < x < -1 + \sqrt{3}$; б) $x < 1 - \sqrt{2}$. **306.** а) $\left[-2; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; 2]$; б) $\left[\frac{1}{3}; 1\right)$. **307.** а) $(0; 3]$; в) $\varnothing$; д) $(-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$; е) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1]$. **308.** б) $[-2; 4]$; г) $|x| \leqslant \sqrt{6}$. **309.** а) $[-3; 0) \cup (0; 3]$; д) $[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$; е) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$. **310.** При $b < -4$, $b > 4$. **311.** При $b \leqslant -8$, $b \geqslant 8$. **312.** При b, равном -2, -1, 0, 1 и 2. **313.** При $m \neq 0$ и $|m| < 1$. **314.** При m, равном -1 и 1. **320.** $-2 < x_1 < x_2 < 1$. **321.** $x_1 < -1 < x_2 < 2$. **327.** б) Область определения: $x \neq 0$, $x \neq 3$; область значений: $y \neq 0$, $y \neq -\frac{4}{3}$. **328.** а) $y < 0$ при $x < -2$, $-2 < x < 0$, $x > 2$; б) $y > 0$ при $x < -1$, $0 < x < 2$, $x > 2$. **329.** а) $y \in [-5; 11]$; б) $y \in [-5; 3]$. **332.** а) 3 точки при $1 < a < 4$; 2 точки при $0 \leqslant a \leqslant 1$ и $a = 4$; одну точку при $a < 0$ и $a > 4$; б) 3 точки при $-2 < a < -1$; 2 точки при $a = -2$ и $a = -1$; одну точку при $a < -2$ и $a > -1$. **333.** $c = -2$; функция принимает значение, равное 20, и не принимает значение, равное -20. **334.** $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$; точки пересечения с прямой: $(-10; -21)$ и $(10; -21)$. **335.** а) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; 2] \cup \left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **336.** а) 0; 1; б) 0; 1. **337.** а) $x < 4\sqrt{3}$, $x > 5\sqrt{2}$; б) $-3\sqrt{2} < x < -2\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5} - 2 \leqslant x \leqslant \sqrt{6} - 2$; г) $x \leqslant 1 - \sqrt{3}$, $x \geqslant 1 - \sqrt{2}$.

338. а) $\left(-2; \frac{1}{4}\right)$; б) $\left(-\infty; -3\frac{1}{2}\right) \cup (1; 3)$. **339.** а) $[-5; -2] \cup [2; 3]$; б) $[-3; 4]$. **341.** а) $-8 < b < 8$; б) $c < -0,3$.

Тест к главе 2. 1. 52. **2.** 1) — А; 2) — Г; 3) — В. **3.** 1), 2), 5). **4.** В. **5.** 1) — Б; 2) — А; 3) — Г; 4) — В. **6.** В. **7.** 1) — В; 2) — Г; 3) — А; 4) — Б. **8.** Г. **9.** А. **10.** Б. **11.** Г. **12.** В. **13.** 11,5 м. **14.** $(-\infty; 3) \cup (1; +\infty)$. **15.** 1) — Б; 2) — Г; 3) — В; 4) — А.

ГЛАВА 3

344. в) $(-\infty; +\infty)$; г) $m \neq 0$; е) $b \neq 2$ и $b \neq 6$; ж) $a \neq 1$; з) x — любое число; и) $a \neq 2$. **345.** б) $a \neq \pm 1$; г) $c \neq -1$ и $c \neq 0$. **349.** д) $\frac{y}{2}$; е) $-\frac{2}{x}$. **350.** а) $\frac{x(x+z)}{z}$; б) $\frac{1}{m}$; в) $\frac{a}{a-3}$; г) $\frac{a}{a^2-b^2}$. **351.** а) $\frac{a-2}{12}$; б) $\frac{1}{n}$; в) 2; г) $\frac{1}{y}$. **360.** а) $b \neq 0$ и $b \neq 1$; б) $a \neq 1$ и $a \neq \pm 2$; в) $x \neq -4$, $x \neq 5$ и $x \neq \pm 3$; г) $x \neq -0,5$ и $x \neq 0$. **361.** в) Множество всех пар значений x и y, в которых $x \neq 0$ и $y \neq 0$; г) множество любых пар значений x и y, кроме пары $x = 0$, $y = 0$. **365.** д) $\frac{2(x-3)}{3}$; е) $-\frac{x+2}{4}$. **366.** а) $-\frac{1}{3x+5}$; б) $\frac{x}{3-x}$; в) $\frac{b-5a}{1+2a}$; г) $\frac{x-y}{y+3}$; д) $\frac{x^2+2x+4}{2-3x}$; е) $\frac{x^2-3x+9}{2-5x}$. **367.** а) $\frac{m-7n}{m+5n}$; б) $\frac{a-6b}{a-b}$; в) $\frac{2y+x}{5y-x}$; г) $\frac{3p-q}{q}$. **374.** а) $\left(\frac{4}{1-x^2}\right)^2$; б) $-\frac{3a^4}{(a+1)^2}$. **375.** а) -1; б) 5. **379.** а) -1; $2\frac{2}{3}$; б) 1,5; 2; в) -5; 5,5; г) -2; -1. **383.** а) 5; 1; б) -1; 1,5; в) 8; 0; г) 9. **385.** а) ± 2; $\pm\sqrt{2}$; б) $\pm\frac{1}{2}$; в) корней нет; г) $\pm\sqrt{3}$. **386.** а) $\frac{1}{3}$; -3; 3; б) $-0,5$; в) -3; -1; 1; г) $\frac{1}{5}$; д) 0; -5; 2; -2; е) 0; 1. **387.** а) $-0,4$; 1; б) -1; 1; в) 0; 2; 3; г) -2; 0,5. **389.** а) -4; 1; б) 0; -1; в) -1; 3; г) ± 1; $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{5}$. **390.** а) 1; 3; $2 \pm \sqrt{7}$; б) -3; 2; -1; в) -1; 4; г) -1; 2; $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. **391.** а) 16; б) $\frac{1}{9}$; в) 50; г) $-1\frac{15}{16}$. **394.** а) Не пересекает; б) точки пересечения — (1; 0), (−1; 0), (3; 0), (−3; 0); г) пересекает в точке (6; 0). **395.** а) $\frac{3}{8}$; б) -1; в) -5; 2; г) -4; д) -4; 2; е) 1,5. **397.** а) -5; 1; б) 2,4; в) 4; 5; г) -2; 6; д) $\frac{2}{3}$; 1; е) -6; 6; ж) -1; 2; з) 0; 3,5. **399.** а) Существует два таких числа: 2,5 и 0,4; б) существует два таких числа:

1,25 и –0,8. **401.** б) –1; в) 0; д) 0; 4; е) –3; ж) –1; з) –5; 5. **403.** а) –4; 3; б) 0; 1; в) 0,5; –3; г) $1\frac{1}{3}$; 2. **404.** в) При $a = -\frac{1}{2}$; г) при $a = -\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. **405.** б) 5; в) –0,5; 1,5; г) –1; $1\frac{2}{3}$. **406.** а) –3; б) $\frac{1}{7}$; в) 2; г) 5. **407.** а) –1; 4; б) 0,5; –18; в) 6; 10; г) –1. **408.** а) –2; б) 6; в) нет корней; г) –1; 1. **409.** а) 0; –2; 2; б) –1; 1; 3; в) –2; 2; г) 0; –3; 3. **413.** а) Нет корней; б) 3; в) нет корней; г) 2; д) нет корней; е) 1; 7. **414.** а) –2; 1; б) –1; 4; $\frac{9 \pm \sqrt{129}}{6}$; в) 0,5; 1. **415.** а) –2; 2; б) 1; в) –1; 2. **417.** б) 3 ч. **418.** б) 12 посылок. **419.** б) 12 ч и 2 ч. **420.** б) 0,8 ч. **423.** а) 40 страниц в час; б) 15 мин и 20 мин. **424.** а) 6 человек; б) 150 р. **425.** а) 8 км/ч; 20 км/ч; б) $\frac{37}{40}$ ч, т. е. примерно 56 мин. **426.** 18 км/ч. **427.** 30 км/ч. **429.** 40 км/ч и 50 км/ч. **430.** За 15 дней. **431.** 9 км/ч. **432.** 30 км/ч. **433.** 6 ч. **435.** 10 и 3. **437.** За 6 мин. **438.** 21 день и 28 дней. **445.** в) $x = 2{,}5$, $z = -0{,}5$; г) $x = -9$, $y = 3$; е) $y = 1$, $z = -\frac{1}{3}$. **451.** б) (1; –4); в) (7; 18); (–2; 0). **456.** в) (5; 2); (2,5; –0,5); г) (–3; 1); $\left(-\frac{1}{3}; -1\frac{2}{3}\right)$; д) (–2; 3); $\left(8\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$; ж) (1; –1,5); $\left(4\frac{1}{2}; 1\frac{1}{8}\right)$; з) (3; 11); $\left(-1\frac{2}{3}; 1\frac{2}{3}\right)$. **457.** а) (2; –2); (–2; 2); б) (5; –2); (–2; 5); (2; –5); (–5; 2). **458.** б) (2; 4); $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$; г) (2; –1); $\left(9; 1\frac{1}{3}\right)$. **459.** 2) а) (2; 6); (6; 2); б) (5; –15); (15; –5); в) (1; –2); (–2; 1). **461.** в) (2; 1); (–2; –1); г) (3,5; 1,5); (–3,5; –1,5). **462.** в) (–1; 3); г) (6; 3). **463.** в) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; г) (–2; 4); (4; –2). **464.** $y = 2x^2 - 3x + 1$. **465.** 1) Уравнение параболы $y = -x^2 + 2x + 3$; она проходит через точку M и не проходит через точку N; 2) $y = 2x + 2$. **468.** б) 35 м и 20 м. **469.** б) Да, 12 и 7. **470.** а) 8 см и 6 см; б) 7 см и 24 см. **471.** а) 3 см и 4 см; б) 6 см и 8 см. **473.** 6 рядов и 14 стульев. **474.** 30 м и 20 м. **475.** 5 см и 12 см. **476.** Да, 7 см и 24 см. **478.** 45 мин и 36 мин. **479.** 2 решения: за 30 мин и за 60 мин; каждый за 40 мин. **480.** 18 км/ч, 2 км/ч. **481.** 50 м/мин и 60 м/мин. **482.** 18 км/ч и 12 км/ч. **483.** 3 ч 45 мин и 2 ч 30 мин. **484.** 4 кг и 6 кг; 20% и 10%. **485.** 20% и 60%. **486.** 4 см, 5 см и 6 см. **494.** а) 9; б) –2; в) 1. **498.** $x_1 = 1$, $x_2 \approx 3{,}35$. **499.** в) Если $a = 2$, то корнем уравнения является любое число; если $a \neq 2$, то уравнение имеет единственный корень

$x = -a - 2$; г) если $b = 1$, то уравнение не имеет корней; если $b = -1$, то корнем уравнения является любое число; если $b \neq \pm 1$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{b-1}$. **500.** а) При $a \neq 0$ и $a \neq 1$; б) при $c \neq 0$; 2; −2. **502.** а) При $c < 36$; при $c < 0$; б) при любом c; в) при $|c| > 4$; ни при каких c. **503.** а) Уравнение имеет один корень, если $|a| > 1$; при $|a| \leqslant 1$ уравнение корней не имеет; б) если $|a| \geqslant 1$, то уравнение имеет один корень; если $|a| < 1$, то уравнение имеет два корня. **504.** а) Одно, два, три, четыре или ни одного решения; б) при $-1 < a < 1$ и $a = -\sqrt{2}$; при $a = -1$. **505.** Два, одно, ни одного решения; при $c = 1$; при $c > 1$. **506.** При $c = \pm 2$; при $-2 < c < 2$. **507.** При $b < -27$. **518.** б) $\frac{x+1}{x}$; в) $\left(\frac{c+d}{x+y}\right)^2$. **519.** б) $\frac{x-y+c}{x+y+c}$; в) $\frac{a-b}{a+b}$. **520.** а) $\frac{1}{x+4}$; б) $\frac{1}{a-3}$. **521.** а) $-\frac{3}{a-3}$; б) $-\frac{1}{b+1}$. **522.** а) $\frac{a-2}{a^2-a+1}$; б) $\frac{1}{1-c}$. **525.** а) 5; при $a = 1$, $b = -2$; б) $\frac{1}{5}$; при $a = 1$, $b = -2$. **526.** а) Все пары чисел $(x;\ y)$ за исключением пар, в которых $x = y$, а также хотя бы одна из переменных x и y равна 0. **528.** б) $\frac{(a+b)(a-c)}{a-b}$; в) $\frac{(x^2+xy+y^2)(1-x)}{y+x}$. **529.** б) $\frac{m+n}{4(m-n)}$; в) $\frac{y-x}{6}$. **530.** а) $\frac{x^2+x+1}{x^2+x-1}$; б) $\frac{x-y}{x+y}$. **536.** а) −1; 3; б) −1; 0,5; 1,5; в) 1; 2; г) 2; −9. **537.** а) $5\frac{1}{3}$; −2; б) −3; $\frac{1}{2}$; в) $1\frac{1}{3}$; 2; 3; г) −6; 4; −1. **539.** а) 5; б) корней нет; в) 2; г) −1. **540.** 1) а) 0; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; б) 0; в) 0; −1; г) 0; д) 0; $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; е) 0; 2. **542.** а) −3; б) $\frac{1}{7}$. **544.** а) 7; в) 7. **545.** а) 1; б) −0,5; 2; $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$. **546.** а) 0,5; б) 2,5. **547.** 16 км/ч. **548.** 1 ч. **549.** 1 ч 40 мин. **550.** 100 км; 3 ч 20 мин. **551.** 20 км; 4 км/ч. **552.** 6 км/ч. **553.** 8 км/ч и 16 км/ч. **554.** а) (3; 1), (−1; −3); б) (3,5; 1,5), (1,5; 3,5). **555.** а) (−4; −1), $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(3; -\frac{2}{3}\right)$, (4; −1); в) (3,5; −4), (1; −2), (1; −1); г) (−2; 4), (4; 1), (−3; 1). **556.** а) $\left(4-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$, $\left(4+\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right)$; б) (2; −2); в) (3; 1), (1; 3); г) (1; −4), (4; −1). **557.** (4; 5), (−2; 1). **559.** а) $p = -4$; б) $p = 6$. **560.** а) $c = 5$; б) $c = -2$. **563.** 2 ч. **564.** 25 км/ч. **565.** 100 км/ч. **566.** У пейзажа, в 1,5 раза. **567.** Груш, в 2,5 раза.

Тест к главе 3. 1. В. **2.** В. **3.** −2,5. **4.** Г. **5.** Б. **6.** −4; −1; 3. **7.** В. **8.** Г. **9.** А. **10.** Г. **11.** 4 см; 3,5 см. **12.** 1) — Г; 2) — Б; 3) — А. **13.** (−4; 4), (−1; 1). **14.** Б.

ГЛАВА 4

569. в) $\frac{99}{100}$; $n = 40$. **574.** $c_n = 20 + 12(n - 1)$; 260 р.; 2888 р. **576.** в) $a_n = 3 + n$; е) $z_n = \frac{n+1}{n}$. **580.** б) $x_8 = 56$; $x_{11} = 110$. **584.** а) $a_n = (-1)^{n-1}$; б) $a_n = 5 \cdot (-1)^n$. **586.** а) Является; $d = -6$; б) не является. **593.** а) $a_n = -14 + 5(n - 1)$; б) $a_n = 12 - 6(n - 1)$. **596.** а) $a_{41} = 48$; б) $a_{19} = -2{,}7$. **597.** а) Членом прогрессии является число 99; $a_{15} = 99$, $a_{14} = 92$, $a_{16} = 106$; б) членом прогрессии является число −105; $a_{31} = -105$, $a_{30} = -101$, $a_{32} = -109$. **599.** а) $h_n = 8000 - 500n$; в) на 9-й минуте. **601.** а) $d = 7$, $a_1 = -93$; б) $a_1 = -0{,}5$; $d = 0{,}1$. **602.** в) $a_{n+2} = a_n + 2d$; $a_{n-3} = a_n - 3d$. **604.** а) $d = 4$; 6; 10; 14; 18; 22; 26; 30; б) $d = 7{,}5$; −7; 0,5; 8; 15,5; 23. **605.** Начиная с $n = 22$. **606.** $a_{53} = -0{,}1$. **607.** 54 члена. **608.** а) Да; $d = 2$; б) да; $d = -3$; в) нет; г) да; $d = -4$. **612.** б) $\frac{n(n+1)}{2}$. **613.** б) 20. **614.** б) В десятом. **616.** б) 145. **619.** 7 кресел; 315 кресел. **620.** На 11-й день; 12 ч 50 мин. **621.** в) $\frac{n(3n+13)}{2}$. **622.** а) $S_n = 2n(4 - n)$; в) 10. **623.** а) 3105; б) −2970; г) 494 550. **624.** а) 2240; б) 1800. **625.** а) 945; в) 4095. **626.** а) 2460; б) 2500; в) 4000. **627.** б) нет; 120. **628.** а) 37 кругов; 331 круг; б) 6 поясов. **630.** На 200 м; 231 км. **631.** Первый сотрудник должен получить 325 р. **633.** а) 355; б) 780. **635.** −1785. **636.** 11 чисел; 12 чисел. **638.** Четыре решения: $a_1 = 22$, $d = 2$; $a_1 = 16$, $d = 6$; $a_1 = 10$, $d = 10$; $a_1 = 4$, $d = 14$. **639.** г) $-\frac{1}{2}$; 1; −2. **640.** 11; 121; 1331. **644.** б) 0,001; −0,01; 0,1; −1; 10; −100; $b_1 = 0{,}001$ и $b_n = b_{n-1} \cdot (-10)$; $b_n = 0{,}001 \cdot (-10)^{n-1}$. **645.** в) $y_7 = 24$, $y_{10} = -192$. **646.** 10 125 наборов. **647.** б) 400 бактерий. **653.** б) $q = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $b_5 = \frac{1}{5}$; $b_6 = \frac{\sqrt{5}}{25}$; $b_7 = \frac{1}{25}$. **654.** а) $P_8 = \frac{1}{2}$ см; б) $n = 5$. **655.** а) $S_1 = 96$ см^2; б) $n = 5$. **658.** а) $q = -5$; $y_1 = 1$; б) $q = 0{,}1$; $b_1 = 100$. **659.** б) −6; −12; −24; −48; −96; −192 или 6; −12; 24; −48; 96; −192. **660.** а) 3; $3\sqrt{3}$; 9; $9\sqrt{3}$; 27 или 3; $-3\sqrt{3}$; 9; $-9\sqrt{3}$; 27; б) 0,2; 0,8; 3,2; 12,8. **663.** 3) а) 2; 6; 18; 54; 162; 486; ... . **664.** а) $S_6 = 189$; $S_n = 3(2^n - 1)$; б) $S_8 = 1\frac{127}{128}$; $S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-10}}$.

666. а) 6; 4; $\frac{8}{3}$; $\frac{16}{9}$; $\frac{32}{27}$; $S_5 = 15\frac{17}{27}$. **667.** 4 294 967 295. **672.** ≈ 3 115 000 р. **673.** а) $S_{10} = 118\,096$. **676.** 2000 р., 3000 р., 4500 р., 6750 р. **678.** б) $S_2 = 60$. **679.** а) $n = 8$; б) $n = 9$. **680.** 8; −24; 72 или 8; 16; 32. **681.** б) $S_6 = -40\frac{4}{9}$. **683.** б) ≈ 7,7. **686.** б) Через 200 дней. **687.** б) Через 8 лет; 129 600 р. **688.** а) 254 р. 40 к.; б) 988 р. 80 к. **690.** б) Через 7 лет. **693.** а) 2200 р., 2420 р., 2662 р., 2928 р.; б) 200 р., 220 р., 242 р., 266 р. **694.** б) ≈ 5 млн р. **701.** а) 144 р. и 150 р. **703.** 13 410 р. **723.** а) $a_{20} = 22$; б) нет. **724.** $S_{20} = 78$. **726.** а) 78; б) $S_{16} = 250$. **730.** а) $b_{12} = \frac{3}{32}$; б) да. **731.** $S_4 = 45$. **733.** а) $5\frac{1}{4}$; б) $S_{12} = 385\frac{7}{8}$. **734.** б) Через 6 лет. **736.** б) ≈ 53%. **737.** а) Примерно 14 250 книг; примерно на 42%; б) примерно на 27%. **738.** а) На 36%; б) на 10%.

Тест к главе 4. **1.** $a_6 = 63$. **2.** В. **3.** А. **4.** В. **5.** 1) — Б; 2) — В; 3) — А. **6.** Г. **7.** В. **8.** А. **9.** 78. **10.** Б. **11.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **12.** $7\sqrt{7}$. **13.** А. **14.** В. **15.** $2^{n+1} - 1$. **16.** Через 3 года.

ГЛАВА 5

739. в) 5%. **740.** б) 20. **741.** а) 8 ч 30 мин; б) 7 ч 30 мин; в) 50%. **744.** а) 3,5%; б) 10%; г) 2,6%. **745.** Соответствуют. **746.** а) 10%; б) 60%. **750.** б) 48 кв. м. **751.** б) 550 человек, 55%. **752.** а) $\bar{x}_1 = 10$, $D_1 \approx 28$, $\sigma_1 \approx 5{,}3$; $\bar{x}_2 = 15{,}2$, $D_2 \approx 73$, $\sigma_2 \approx 6{,}5$. **754.** Аня, Витя, Оля, Петя, Катя. **755.** а) 20 см; б) 0,5 см; в) 60%, 20%. **758.** 25 лампочек. **759.** 22%. **760.** 250. **761.** Вероятности равны. **762.** Нет, вероятность выигрыша в каждом розыгрыше одна и та же. **763.** 30. **764.** ≈ 32 880. **765.** 3200 рыб; более 3200 рыб. **766.** 10 и 11, вероятность каждой из них равна $\frac{27}{6^3} = \frac{1}{8}$. **768.** б) $\frac{5}{12}$; в) $\frac{7}{12}$. **769.** а) $2^3 = 8$; б) $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{4}$. **770.** $\frac{17}{35}$; $\frac{1}{2}$. **771.** 0,2. **772.** 0,271. **773.** а) (4; 5), (5; 4), (−4; −5), (−5; −4); б) (1; −2), (−1; 2), (−2; 1), (2; −1). **774.** а) (2; 3), (3; 2); б) (2; 2), (−2; −2), (2; −2), (−2; 2). **775.** в) 50%, г) 2,5. **777.** в) 33,4. **781.** Есть, так как вероятность случайно попасть подряд на 3 невыученных вопроса слишком мала (≈ 0,006). **782.** У Олега. **783.** а) $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$; б) $\frac{5}{9}$. **784.** $\frac{12!}{12^{12}}$. **785.** $\frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

Тест к главе 5. **1.** Б. **2.** В. **3.** Двое детей. **4.** Г. **5.** В. **6.** 750. **7.** 0,99. **8.** А. **9.** 670 бабочек. **10.** Г.

Оглавление

ГЛАВА 1 Неравенства

ГЛАВА 2 Квадратичная функция

ГЛАВА 3 Уравнения и системы уравнений

ГЛАВА 4 Арифметическая и геометрическая прогрессии

ГЛАВА 5 Статистика и вероятность