АЛГЕБРА

И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

$$(\sqrt{a})^2 = a \text{ при } a \geqslant 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geqslant 0 \\ -a & \text{при } a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \text{ при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при } a \geqslant 0,\ b > 0$$

ФОРМУЛЫ ВИЕТА

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

КОРНИ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$b_{n+1} = b_n q$$

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \text{ при } |q| < 1$$

ЛОГАРИФМЫ

$$a^{\log_a b} = b \qquad \log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a} \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \qquad \log_a b^p = p \log_a b$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \qquad \log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$$

АЛГЕБРА

И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

Базовый и профильный уровни

Под редакцией А. Б. Жижченко

4-е издание

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

Москва · Просвещение · 2011

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72
А45

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№10106-5215/15 от 31.10.07) и Российской академии образования (№01/206/5/7д от 11.10.07)

Авторы:
Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин

Условные обозначения

материал для изучения на профильном уровне
материал для интересующихся математикой
▷ ◀ решение задачи
○ ● обоснование утверждения или вывод формулы
25 упражнения для базового уровня
26 упражнения для профильного уровня
27 упражнения для интересующихся математикой

Алгебра и начала математического анализа.
А45 10 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин]; под ред. А. Б. Жижченко. — 4-е изд. — М. : Просвещение, 2011.— 368 с. : ил.— ISBN 978-5-09-025401-4.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72+22.161я72

ISBN 978-5-09-025401-4

Глава I

Алгебра 7 – 9 классов (повторение)

§ 1. Алгебраические выражения

1. Алгебраическая сумма

Алгебраическая сумма — это запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединенных знаком «+» или «−».

Задача 1. В выражении $a+(b-(c+d-5))$ раскрыть скобки.

▷ $a+(b-(c+d-5))=a+(b-c-d+5)=$
$=a+b-c-d+5$. ◀

2. Степень с натуральным и целым показателями

Степень числа a с натуральным показателем n, большим единицы,— это произведение n множителей, равных a:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}},\ a^1=a,$$

где a — основание степени, n — показатель степени, a^n — степень.

Например,

$$\left(-1\frac{1}{3}\right)^3=\left(-1\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right)=$$
$$=\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4\cdot4\cdot4}{3\cdot3\cdot3}=-\frac{64}{27}=-2\frac{10}{27}.$$

Если $a\neq0$ и n — натуральное число, то $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

Если $a\neq0$, то $a^0=1$.

Например,

$$(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2};\ (-3)^0=1.$$

Свойства степени с целым показателем ($a\neq0,\ b\neq0$)

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\qquad (a^m)^n=a^{m\cdot n};\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$
$$a^m:a^n=a^{m-n}\ ;\qquad (ab)^n=a^nb^n;$$

Например, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-5-(-2)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-5+2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$

$=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{27}{8}$; $(3^2)^{-3}=3^{2\cdot(-3)}=3^{-6}=\frac{1}{3^6}=\frac{1}{729}$.

Задача 2. Найти значение выражения $\frac{(a^5)^2\cdot a^3}{a^4\cdot a^6}$ при $a=-0,4$.

▷ $\frac{(a^5)^2\cdot a^3}{a^4\cdot a^6}=\frac{a^{5\cdot 2}\cdot a^3}{a^{4+6}}=\frac{a^{10}\cdot a^3}{a^{10}}=\frac{a^{13}}{a^{10}}=a^{13-10}=a^3$;
если $a=-0,4$, то $a^3=(-0,4)^3=-0,064$. ◀

Запись числа в виде $a\cdot 10^n$, где $1\leqslant|a|<10$ и n — целое число, называется *стандартным видом числа.*

Задача 3. Записать в стандартном виде каждое из чисел: 320; 0,006.

▷ $320=3,2\cdot 100=3,2\cdot 10^2$; $0,006=\frac{6}{1000}=\frac{6}{10^3}=6\cdot 10^{-3}$. ◀

3. Одночлены и многочлены

Одночлен — произведение числовых и буквенных множителей, являющихся степенями с натуральными показателями.

Примеры одночленов: $2bc$, $-3a^2\cdot 2ab$, a, $\frac{2}{5}$.

Одночлен стандартного вида — это одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и натуральные степени буквенных множителей с различными основаниями (порядок расположения этих множителей не имеет значения).

Коэффициент одночлена — числовой множитель одночлена, приведенного к стандартному виду.

Задача 4. Найти коэффициент одночлена $7x\cdot 8x^2y$.

▷ Запишем данный одночлен в стандартном виде: $7x\cdot 8x^2y=56x^3y$. Его коэффициент равен 56. ◀

Многочлен — алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Примеры многочленов: $2a$ — одночлен, $3a-b^2$ — двучлен, $\frac{1}{2}x^2-4xy+4y^3$ — трехчлен.

Члены многочлена — одночлены, из которых он состоит.

Подобные члены многочлена — это одночлены, записанные в стандартном виде и отличающиеся только коэффициентами, либо одинаковые одночлены.

Приведение подобных членов — упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом.

Стандартный вид многочлена — запись многочлена, в которой все члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

Задача 5. Записать в виде многочлена стандартного вида произведение $\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot(2a^2-4a+3)$.

▷ $\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot(2a^2-4a+3)=a\cdot 2a^2+a\cdot(-4a)+a\cdot 3+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2a^2+$
$+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-4a)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3=2a^3-\underline{4a^2}+\underline{\underline{3a}}-\underline{a^2}+\underline{\underline{2a}}-\frac{3}{2}=2a^3-5a^2+$
$+5a-1\frac{1}{2}$. ◀

4. Формулы сокращенного умножения

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (*квадрат суммы*);
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (*квадрат разности*);
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ (*разность квадратов*);
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (*куб суммы*);
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (*куб разности*);
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (*разность кубов*);
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (*сумма кубов*).

Например, с помощью формул сокращенного умножения степень двучлена можно кратчайшим способом записать в виде многочлена стандартного вида:

1) $\left(\frac{1}{3}-a^5\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\left(\frac{1}{3}\right)^2a^5+3\cdot\frac{1}{3}(a^5)^2-(a^5)^3=\frac{1}{27}-\frac{1}{3}a^5+$
$+a^{10}-a^{15}$;

2) $(-2x-y)^2=(-(2x+y))^2=(2x+y)^2=4x^2+4xy+y^2$.

Задача 6. Используя формулы сокращенного умножения, представить $4a^6-b^2c^6$ в виде произведения многочленов.

▷ $4a^6-b^2c^6=(2a^3)^2-(bc^3)^2=(2a^3-bc^3)(2a^3+bc^3)$. ◀

При разложении многочлена на множители полезно соблюдать следующий порядок:
1) вынести за скобки общий множитель — одночлен (если он есть);
2) попробовать разложить многочлен на множители по формулам сокращенного умножения;
3) попытаться применить способ группировки (если предыдущие способы не привели к цели).

Примеры разложения многочлена на множители:

1) с помощью вынесения общего множителя за скобки: $2x^2y^3-3xy^2+x^3y^2=xy^2(2xy-3+x^2)$;

2) с использованием вынесения за скобки общего множителя и последующим применением формулы разности квадратов: $4a^3-a=a(4a^2-1)=a(2a-1)(2a+1)$;

3) с применением способа группировки: $8ac-3b+2a-12bc=$ $=(8ac+2a)+(-3b-12bc)=2a(4c+1)-3b(1+4c)=(1+4c)(2a-3b)$.

5. Алгебраические дроби

Алгебраическая дробь — это дробь, числитель и знаменатель которой являются алгебраическими выражениями.

Основное свойство дроби можно записать так:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},\ \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m},\text{ где } b\neq 0,\ m\neq 0.$$

Основное свойство дроби позволяет сокращать алгебраическую дробь на общий множитель числителя и знаменателя.

Например,

$$\frac{4x^3-xy^2}{2x+y}=\frac{x(4x^2-y^2)}{2x+y}=\frac{x(2x-y)(2x+y)}{2x+y}=x(2x-y).$$

Действия с алгебраическими дробями

$$\frac{a}{m}\pm\frac{b}{m}=\frac{a\pm b}{m};\qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d};$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c};\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Рассмотрим примеры действий с алгебраическими дробями:

1) $\frac{2}{b-2}-\frac{b}{4-b^2}=\frac{2}{b-2}-\frac{b}{(2-b)(2+b)}=\frac{2^{\backslash 2+b}}{b-2}+\frac{b^{\backslash 1}}{(b-2)(2+b)}=$ $=\frac{2(2+b)+b}{(b-2)(2+b)}=\frac{4+2b+b}{(b-2)(b+2)}=\frac{4+3b}{b^2-4}$;

2) $\frac{x^2-y^2}{12x^2}\cdot\frac{3x}{y-x}=\frac{(x^2-y^2)\cdot 3x}{12x^2\cdot(y-x)}=\frac{\overset{1}{\cancel{(x-y)}}(x+y)\cdot\overset{1}{\cancel{3x}}}{-4x\cdot\underset{1}{\cancel{3x}}\cdot\underset{1}{\cancel{(x-y)}}}=-\frac{x+y}{4x}$.

Упражнения

1. Найти числовое значение выражения, предварительно упростив его:

1) $5a-(2b-3a)-b$ при $a=0,8$, $b=-1,2$;

2) $(3x-5y)-(-x+2y-3)$ при $x=-\frac{3}{8}$, $y=\frac{1}{14}$.

2. Найти значение выражения:

1) $\frac{a^{21}\cdot a^{13}}{a^{31}}$ при $a=1,6$; $a=-0,11$;

2) $\frac{n^{48}}{n^{19}\cdot n^{26}}$ при $n=0,3$; $n=-0,4$.

3. Выполнить действия:

1) $\left(-\frac{2}{3}a^2b^5c\right)^3\cdot 9a^5bc^2$; 2) $12x^2yz^7(0{,}5x^3y^8)^2$;

3) $(36m^8n^2k):(12m^2n)$; 4) $\left(-\frac{5}{9}a^9b^8c^7\right):(5a^3b^3c)$.

4. Записать в стандартном виде многочлен:

1) $5a^3b-3ab^2+4ab^2-7a^3b$;

2) $2xy^2x^3-3xyxy+8x^2y^2x^2-14$;

3) $1\frac{1}{3}ab(-6a^2b)-0{,}7a^3\cdot 20b-b^2\cdot 7a^3$.

5. Найти произведение многочлена и одночлена:

1) $5n\left(0{,}2n-2n^2-\frac{1}{3}p\right)$; 2) $\left(4x-1\frac{1}{3}xy-2y\right)\left(-1\frac{1}{2}x^2\right)$.

6. Разделить многочлен на одночлен:

1) $(8x^3-4x^2+6x):(-2x)$; 2) $(5ab^2-14a^2b^2-3a^3b):(2ab)$.

7. Умножить многочлен на многочлен:

1) $(2a-0{,}3b)(3a+5b-1)$; 2) $(x-3)(-x^2-2x+3)$.

8. Возвести в степень, пользуясь формулами сокращенного умножения:

1) $\left(1\frac{1}{3}+3n\right)^2$; 2) $(0{,}4a^2-5b)^2$; 3) $(-3p+10q)^2$;

4) $(-6k-0{,}5n)^2$; 5) $(a^2+4)^3$; 6) $(0{,}2-b)^3$;

7) $(-3-x)^3$; 8) $\left(-\frac{1}{3}+a\right)^3$; 9) $((2-x)(2+x))^2$.

9. Представить данный многочлен в виде произведения, применив формулы сокращенного умножения:

1) x^8-4; 2) $25n^2-49p^4$;

3) $1\frac{9}{16}a^2-0{,}09b^2$; 4) $0{,}0081x^6-1\frac{7}{9}y^{10}$.

10. Разложить многочлен на множители:

1) $3a^2+12ab+12b^2$; 2) $6a^3b^2-36a^2b^3+54ab^4$;

3) $a^2-2ab+5a-10b$; 4) a^3-3b+a^2b-3a;

5) $a^5+3a^3-8a^2-24$; 6) $a^2-3a+b^2+3b-2ab$.

11. Сократить дробь:

1) $\frac{12a^2b^3c^5}{27a^4b^3c^2}$; 2) $\frac{a^7(a-b)^2}{a^4(a-b)^3}$; 3) $\frac{2a+6}{a^2-9}$;

4) $\frac{(m-2n)^2}{10n-5m}$; 5) $\frac{a^2-4}{a^3+8}$; 6) $\frac{8a^3-27}{9-4a^2}$.

12. Выполнить действия:

1) $\frac{3x+5}{x-2}-\frac{11-x}{x-2}$; 2) $\frac{2a}{a-b}+\frac{2a-b}{b-a}$;

3) $\frac{3}{4a}-\frac{5}{6a}+\frac{1}{2a^2}$; 4) $\frac{3}{a}+5-\frac{2}{a-b}$;

5) $\frac{4}{6-2a}+\frac{a+7}{a^2-9}+\frac{a}{a^2+3a}$; 6) $\frac{3a}{6a+8}-\frac{1}{2}-\frac{2}{4-3a}$;

7) $\frac{5b-b^2}{3a}\cdot\frac{6a^2}{b^3-5b^2}$; 8) $\frac{6c^3}{9-a^2}\cdot\frac{a^2-6a+9}{4a^2c}$;

9) $\frac{a^3b}{3a-6b}:\frac{a^2b^2-a^2b}{ac-2bc}$; 10) $\frac{10-15b}{(a-b)^2}:\frac{9b^2-4}{3b-3a}$;

11) $\left(\frac{a}{7a-4}-\frac{1}{a+3}\right)\cdot\frac{12-21a}{(2-a)^2}$;

12) $\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}-\frac{x^2+4}{4-x^2}\right):\frac{2x+x^2}{(2-x)^2}$.

13. Вычислить:

1) $2^3-2^0-2^{-3}+(-2)^3+(-2)^{-3}$;

2) $\frac{3^{-3}\cdot 3^5}{3^3}+(3^{-1})^2-\left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2$.

14. Представить в виде степени:

1) $\frac{a^2\cdot a^{-5}}{a^3}$; 2) $\frac{b^{-4}\cdot b^8}{b^6}$; 3) $a^{-6}b^3$; 4) $c^{-5}d^{-10}$.

15. Записать в стандартном виде число:

1) 0,000321; 2) 0,000074;

3) $31\frac{2}{5}$; 4) $1401\frac{3}{25}$.

16. Доказать, что выражение:

1) $7+a-(3b-a-(2b-2a))+b$ принимает положительные значения при любых значениях a и b;

2) $-(3m-(5n-(2m+n)))-4n-1+5m$ принимает отрицательные значения при любых значениях m и n.

17. Найти произведение многочленов:

1) $(8x-y^2)(3x+y^2)$; 2) $(2m^2n-5mn^2)(3mn^2-4m^2n)$;

3) $(5xy^2-2x^2y)(2x^2y+5xy^2)$; 4) $\left(\frac{1}{2}a^3+b^2\right)\left(b^2-\frac{1}{2}a^3\right)$;

5) $(a^6-a^3b^3+b^6)(a^3+b^3)$; 6) $(9m^4+3m^2n^2+n^4)(3m^2-n^2)$.

18. Выполнить действия:

1) $\left(\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{b}{a^3+b^3}\right):\frac{a^2}{a^6-b^6}$;

2) $\left(\frac{6a}{a^2-4b^2}+\frac{2}{2b-a}-\frac{4}{2b+a}\right):\left(1+\frac{a^2+4b^2}{4b^2-a^2}\right)$;

3) $\left(\frac{y}{x^3-x^2y+xy^2}+\frac{x-2y}{x^3+y^3}\right)\cdot\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$.

§ 2. Линейные уравнения и системы уравнений

1. Линейные уравнения

Уравнение с одним неизвестным — равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Корень уравнения — значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Например, число 2 является корнем уравнения $5x-3=x+5$, так как $5\cdot2-3=2+5$ — верное равенство; число -1 не является корнем уравнения $5x-3=x+5$, так как $5\cdot(-1)-3=-1+5$ — неверное равенство.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Линейное уравнение — уравнение вида $ax=b$, где a и b — заданные числа, x — неизвестное.

При $a\neq0$ линейное уравнение $ax=b$ имеет единственный корень $x=\frac{b}{a}$; при $a=0$ и $b\neq0$ уравнение не имеет корней; при $a=0$ и $b=0$ корнем является любое действительное число.

Основные свойства уравнений

Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.
Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Задача 1. Решить уравнение:

1) $7x-5=4x-20$; 2) $3(x+3)-3=14+3(x-2)$;

3) $\frac{x-1}{2}-\frac{3-x}{3}=x-\frac{x+9}{6}$.

▷ 1) $7x-5=4x-20$,
$7x-4x=-20+5$,
$3x=-15$,
$x=-5$.

2) $3(x+3)-3=14+3(x-2)$,
$3x+9-3=14+3x-6$,
$3x+6=3x+8$,
$3x-3x=8-6$,
$0\cdot x=2$, корней нет.

3) $\frac{x-1}{2}-\frac{3-x}{3}=x-\frac{x+9}{6}\,\Big|\cdot6$,

$3(x-1)-2(3-x)=6x-(x+9)$, $3x-3-6+2x=6x-x-9$,
$5x-9=5x-9$,
$5x-5x=-9+9$,
$0\cdot x=0$, это равенство верно при любом значении x.

Ответ. 1) $x=-5$; 2) уравнение не имеет корней; 3) x — любое число. ◀

Определение модуля числа a

$$|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\geqslant0,\\ -a, \text{ если } a<0.\end{cases}$$

Задача 2. Решить уравнение $|3-2x|=5$.

▷ По определению модуля числа имеем $3-2x=\pm 5$.

Таким образом, либо $3-2x=5$, откуда $x=-1$, либо $3-2x=$ $=-5$, откуда $x=4$.

Ответ. $x_1=-1$, $x_2=4$. ◁

Задача 3. Решить уравнение $2(x-3)=(5-a)x+6$, где x — неизвестное.

▷ $2(x-3)=(5-a)x+6$, $2x-6=5x-ax+6$, $2x-5x+ax=6+6$, откуда $(a-3)x=12$;

1) если $a\neq 3$, то $x=\frac{12}{a-3}$; 2) если $a=3$, то уравнение примет вид $0\cdot x=12$, а это уравнение не имеет корней.

Ответ. $x=\frac{12}{a-3}$, если $a\neq 3$; нет корней, если $a=3$. ◁

Задача 4. Решить уравнение $m(x-2)=n-x$, где x — неизвестное.

▷ $mx-2m=n-x$, $mx+x=n+2m$, $(m+1)x=n+2m$;

1) если $m\neq -1$, то $x=\frac{n+2m}{m+1}$; 2) если $m=-1$, то уравнение примет вид $0\cdot x=n-2$, тогда при $n=2$ корнем уравнения будет любое число, при $n\neq 2$ уравнение не имеет корней.

Ответ. $x=\frac{n+2m}{m+1}$, если $m\neq -1$ и n — любое число; x — любое число, если $m=-1$ и $n=2$; нет корней, если $m=-1$ и $n\neq 2$. ◁

Решение практической (текстовой) задачи содержит три этапа:

1) по условию задачи составляется уравнение (математическая модель задачи);

2) решается составленное уравнение;

3) найденное значение неизвестного соотносится со смыслом задачи и записывается ответ.

Задача 5. Лодка плыла по течению реки 2 ч, затем 4 ч против течения. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найти скорость лодки в стоячей воде, если против течения реки лодка прошла на 2 км больше, чем по течению.

▷ 1) Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде, тогда $(x+3)$ км/ч — скорость лодки по течению, а $(x-3)$ км/ч — скорость лодки против течения реки. По течению реки лодка прошла $2\cdot(x+3)$ км, а против течения реки — $4\cdot(x-3)$ км. Так как расстояние, пройденное лодкой против течения реки, на 2 км больше, чем пройденное по течению, то $4(x-3)-2(x+3)=2$.

2) Решим составленное уравнение:

$$4x-12-2x-6=2,\ 4x-2x=2+12+6,\ 2x=20,\ x=10.$$

3) $x=10$ км/ч не противоречит смыслу задачи.

Ответ. 10 км/ч. ◀

Задача 6. Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого. Процентное содержание меди в первом слитке 10%, во втором — 40%. В сплаве этих двух слитков содержание меди 30%. Найти массу полученного сплава.

▷ Исследование условия задачи представлено в таблице:

	Процентное содержание меди, выраженное в десятичных дробях	Масса слитка, кг	Масса меди в слитке, кг
I слиток	0,1	x	$0{,}1x$
II слиток	0,4	$x+3$	$0{,}4(x+3)$
Сплав	0,3	$x+(x+3)=$ $=2x+3$	$0{,}3(2x+3)$

По данным таблицы запишем уравнение:

$$0{,}1x+0{,}4(x+3)=0{,}3(2x+3).$$

Решим это уравнение:

$$0{,}1x+0{,}4x+1{,}2=0{,}6x+0{,}9,$$
$$0{,}1x+0{,}4x-0{,}6x=0{,}9-1{,}2,$$
$$-0{,}1x=-0{,}3, \quad x=3.$$

При $x=3$ кг масса сплава равна $2\cdot 3$ кг $+3$ кг $=9$ кг.

Ответ. 9 кг. ◀

2. Системы уравнений с двумя неизвестными

Уравнение первой степени с двумя неизвестными — это уравнение вида

$$ax+by=c,$$

где x и y — неизвестные, a, b и c — заданные числа, причем хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю (т. е. $a^2+b^2\neq 0$).

Числа a и b называют коэффициентами при неизвестных x и y соответственно, а число c — свободным членом.

Решение уравнения с двумя неизвестными x *и* y — упорядоченная пара чисел $(x;\ y)$, при подстановке которых в уравнение получается верное числовое равенство.

Решить уравнение с двумя неизвестными — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Например, пара чисел $(-6;\ 5)$ является решением уравнения $\frac{1}{2}x+2y=7$, так как $\frac{1}{2}\cdot(-6)+2\cdot 5=7$ — верное числовое равенство.

Задача 7. Решить уравнение $2x-3y=5$.

▷ I способ.
Выражаем y через x:
$$-3y=5-2x,\ y=\frac{2x-5}{3}.$$
Ответ. Пары чисел $\left(x;\ \frac{2x-5}{3}\right)$, где x — любое число.

II способ.
Выражаем x через y:
$$2x=5+3y,\ x=\frac{3y+5}{2}.$$
Ответ. Пары чисел $\left(\frac{3y+5}{2};\ y\right)$, где y — любое число.

Оба способа решения приводят к описанию одного и того же множества точек координатной плоскости, расположенных на прямой $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$. ◀

Задача 8. Сколькими способами можно полностью истратить 104 р. на покупку сувениров двух видов, цена которых 6 р. и 10 р.?

▷ Предположим, что куплено x сувениров по 6 р. и y сувениров по 10 р. За них заплатили $(6x+10y)$ р. Так как стоимость покупки 104 р., то $6x+10y=104$. Выразив y через x, получим $y=\frac{104-6x}{10}$.

Так как x и y — целые неотрицательные числа, то число $104-6x$ должно делиться на 10, поэтому число x может принимать лишь значения 4; 9; 14. Это означает, что сделать нужную покупку можно лишь тремя способами. ◀

Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными — это система вида
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,\end{cases} \tag{1}$$
где x и y — неизвестные; a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — заданные числа, причем $a_1^2+b_1^2\neq0$ и $a_2^2+b_2^2\neq0$.

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными — пара чисел x и y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Решить систему уравнений — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Задача 9. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+5y=7,\\ 3x-2y=4\end{cases}$ способом подстановки.

▷ Из первого уравнения системы $x=7-5y$.

Подставим выражение $7-5y$ вместо x во второе уравнение: $3(7-5y)-2y=4$. Решим полученное уравнение:
$$21-15y-2y=4,\ -15y-2y=4-21,\ -17y=-17,\ y=1.$$
Подставив $y=1$ в равенство $x=7-5y$, получим $x=7-5\cdot1=2$.

Ответ. $x=2$, $y=1$. ◀

Задача 10. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x+3y=5, \\ 2x+y=3 \end{cases}$ способом сложения.

▷ $\begin{cases} 4x+3y=5, \\ 2x+y=3 \quad |\cdot(-2) \end{cases}$ $\quad + \begin{array}{r} 4x+3y=5 \\ -4x-2y=-6 \\ \hline y=-1. \end{array}$

Подставим $y=-1$ во второе уравнение системы:

$$2x+(-1)=3,\ 2x=4,\ x=2.$$

Ответ. $x=2$, $y=-1$. ◀

Задача 11. Двое рабочих изготовили вместе 850 деталей. Первый рабочий работал 10 дней, а второй — 9 дней. Сколько деталей изготавливал каждый рабочий за день, если первый рабочий за 4 дня изготавливал на 10 деталей больше, чем второй за 3 дня?

▷ Введем обозначения: x — количество деталей, которые изготавливал первый рабочий за день, y — количество деталей, которые изготавливал второй рабочий за день. Тогда первый рабочий сделал $10x$ деталей, второй — $9y$ деталей. По условию задачи вместе они сделали 850 деталей, т. е. $10x+9y=850$.

Далее по условию задачи: за 4 дня первый рабочий изготовил $4x$ деталей, что на 10 деталей больше, чем те $3y$ деталей, которые изготовил второй рабочий за 3 дня:

$$4x-3y=10.$$

Полученные уравнения образуют систему, которую решим способом сложения:

$\begin{cases} 10x+9y=850, \\ 4x-3y=10 \quad |\cdot 3 \end{cases}$ $\quad + \begin{array}{r} 10x+9y=850 \\ 12x-9y=30 \\ \hline 22x \quad =880 \\ x=40. \end{array}$

Подставим $x=40$ во второе уравнение системы: $4\cdot 40-3y=10$. Получим $160-3y=10$, $-3y=10-160$, $-3y=-150$, $y=50$.

Ответ. 40 и 50 деталей. ◀

Упражнения

Решить уравнения (19—21).

19. 1) $0{,}2x-7=-0{,}3(x+4)$; 2) $4x-2(x-1{,}5)=3{,}5-3\left(\frac{1}{2}-x\right)$;

3) $x(x+2)=x^2+5(x-6)$; 4) $3x-2x(x-1)=2(7-x^2)$.

20. 1) $\frac{3-x}{6}+2=\frac{2-x}{3}-\frac{2x+1}{4}$;

2) $x-\frac{1-x}{4}+\frac{2x-3}{10}=\frac{x+3}{5}$.

21. 1) $x:4\frac{1}{3}=8:17\frac{1}{3}$; 2) $0{,}37:2\frac{5}{6}=x:8{,}5$.

22. От пристани A до пристани B катер плывет по реке 15 мин, а обратно — 20 мин. Найти скорость течения реки, если собственная скорость катера 14 км/ч.

23. Автобус, выехавший из поселка в город в 8 ч со скоростью 60 км/ч, на полпути встретился с выехавшим в 8 ч 20 мин из города в поселок автомобилем, скорость которого 80 км/ч. Найти расстояние между поселком и городом.

24. Выяснить, какие из пар чисел (2; 3), (−1; 4), (2; 7) являются решениями уравнения $-3x+y=1$.

25. Решить способом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x+5y=28, \\ 5x+y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y=-1, \\ 2x-3y=11. \end{cases}$

26. Решить способом сложения систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x-8y=-9, \\ -5x+2y=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -4x+6y=1, \\ 3x-8y=-6. \end{cases}$

27. В книге, которую Катя прочитала за 5 дней, было на 20 страниц больше, чем в книге, которую Настя прочитала за 4 дня. Сколько страниц в день читала каждая девочка, если в двух книгах вместе 580 страниц?

28. Если к половине первого числа прибавить треть второго числа, то получится 1, а если первое число сложить с удвоенным вторым, то получится 26. Найти эти числа.

29. Контролер планировал проверить партию приборов за 5 ч. Однако за час он смог проверить на 13 приборов меньше, чем запланировал, поэтому после 6 ч работы ему осталось проверить еще 30 приборов. Сколько приборов было в партии?

30. В первом словарном диктанте Антон написал правильно 90% слов. Во втором диктанте было на 40 слов больше, чем в первом, а правильно Антон написал 95% слов. Сколько слов было в каждом диктанте, если всего 7% слов из этих двух диктантов Антон написал неправильно?

31. Решить уравнение:

1) $3x-2y=1$; 2) $-4x+3y=-2$.

32. Пятьдесят рабочих нужно разделить на бригады, в каждой из которых будет либо 6, либо 8 человек. Сколько бригад может получиться при таком делении?

33. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x-3y=5-0{,}2x-20y, \\ 0{,}5x-y-2=2-x-20y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5=1-x+2y, \\ 14x-5=9x-3y-2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x-3y=-2, \\ -8x+y=12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+3y=1{,}5, \\ 0{,}5x-2y=4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x-3y=-3, \\ -10x-6y=3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 10x+3y=0{,}1, \\ 7x-2y=1{,}3. \end{cases}$

34. Решить уравнение:

1) $|x|=1{,}5$; 2) $|5x|=8$; 3) $5|x|=\frac{1}{3}$;

4) $|x-1|=2$; 5) $|2-x|=7$; 6) $|2x-4|=6$.

35. При каком значении a уравнение:

1) $(5-2a)x=a$; 2) $ax+3-2x=3$

имеет только один корень?

36. При каких значениях a уравнение:

1) $(2a-3)x=a+1$; 2) $(4-5a)x=3-a$

не имеет корней?

37. Установить, при каком значении a любое число является корнем уравнения:

1) $7x+2-ax=2(x+1)$; 2) $(3-a)x+4x=2-5x$.

38. Решить уравнение, в котором a и b — некоторые числа, x — неизвестное:

1) $a(x-5)=2x-3$; 2) $3(x-a)=21+3x$; 3) $2(ax-3)=3x-6$;
4) $2ax=b-1$; 5) $3-bx=a$; 6) $5b=a(x+2)$;
7) $2a=b(x+2)$; 8) $3(x+b)=2(ax-6)$.

39. Найти все значения a, при которых система уравнений:

1) $\begin{cases}5x+ay=40,\\2x+3y=4a;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-3ay=5a,\\3x-(5a-1)y=7a+1\end{cases}$

не имеет решений.

40. Найти все значения a, при которых система уравнений:

1) $\begin{cases}x+(a-1)y=a,\\5x+(3a+1)y=15;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-(a+1)y=2a,\\ax-6y=8\end{cases}$

имеет бесконечно много решений. Найти эти решения.

41. 1) Бригада должна была выполнить заказ за 25 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 7 деталей, бригада за 20 дней не только выполнила заказ, но и изготовила дополнительно 35 деталей. Сколько деталей в день изготавливала бригада?

2) Заказ по производству сейфовых дверей цех должен был выполнить за 28 дней. Однако уже за день до срока цех не только выполнил план, но и изготовил сверх плана одну дверь, так как делал две двери в день сверх плана. Сколько дверей цех планировал выпускать ежедневно?

42. 1) Два велосипедиста выехали в одном направлении, причем первый — на полчаса раньше второго. Первый велосипедист проезжает за час 14 км, а второй — за 1,5 ч 18 км. Через какое время с момента выезда второго велосипедиста расстояние между ними будет 13 км?

2) Из поселка в город выехал велосипедист, а через 2 ч 40 мин вслед за ним выехал автомобиль. На каком расстоянии от поселка автомобилист догонит велосипедиста, если скорость первого 12 км/ч, а второго 60 км/ч?

43. 1) Из двух городов, расстояние между которыми 620 км, выехали одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость одного поезда на 10 км/ч меньше скорости другого. Найти скорости поездов, если известно, что через 3 ч после начала движения расстояние между ними сократилось до 170 км.

2) Из города A в город B, расстояние между которыми 905 км, выехал автомобиль. Через час из города B в город A по той же автостраде навстречу ему выехал другой автомобиль со скоростью, на 5 км/ч большей. Определить скорости автомобилей, если известно, что через 4 ч после начала движения второго автомобиля расстояние между ними сократилось до 120 км.

44. 1) Мать старше дочери на 24 года, а через 5 лет будет старше ее в 5 раз. Сколько лет матери и сколько лет дочери?

2) Отец старше сына в 3 раза. Вместе отцу и сыну 52 года. Сколько лет каждому из них?

45. 1) Земельный участок имеет прямоугольную форму. Если его длину увеличить на 5 м, а ширину уменьшить на 10 м, то площадь его уменьшится на 750 м^2. Если же длину участка уменьшить на 5 м, а ширину увеличить на 10 м, то площадь его увеличится на 650 м^2. Определить длину и ширину участка.

2) Если купить 2 кг карамели и 0,5 кг шоколадных конфет, то покупка будет стоить 164 р. Если же купить 3 кг карамели и 1,5 кг шоколадных конфет, то за покупку нужно будет заплатить 327 р. Сколько стоит 1 кг карамели и 1 кг шоколадных конфет?

§ 3. Числовые неравенства и неравенства первой степени с одним неизвестным

1. Числовые неравенства

Число a больше числа b (пишут $a>b$), если разность $a-b$ положительна (рис. 1).

Рис. 1

Число a меньше числа b (пишут $a<b$), если разность $a-b$ отрицательна (рис. 2).

Очевидно, что если $a>b$, то $b<a$, а если $a<b$, то $b>a$.

Рис. 2

Задача 1. Доказать, что $-\frac{7}{8}>-0,9$.

▷ Нужно доказать, что $-\frac{7}{8}-(-0,9)>0$.

Вычислим: $-\frac{7}{8}-(-0,9)=-0,875+0,9=0,025$.

$0,025>0$, значит, $-\frac{7}{8}-(-0,9)>0$, откуда $-\frac{7}{8}>-0,9$. ◀

Свойство 1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$; если $c < b$ и $b < a$, то $c < a$ (рис. 3).

Рис. 3

Например, если $x - 3 > y$ и $y > 0$, то (по свойству 1) $x - 3 > 0$.

Свойство 2. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то знак неравенства не изменится.

Например, если к обеим частям верного неравенства $5 > 2$ прибавить -2, то получится верное неравенство $3 > 0$.

Следствие. Любое число можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак переносимого числа на противоположный.

Задача 2. Доказать, что если $(x+3)^2 < (x+2)(x+3)$, то $x < -3$.

▷ Выполнив действия в левой и правой частях неравенства, получим $x^2 + 6x + 9 < x^2 + 5x + 6$. Перенесем члены, содержащие x, из правой части неравенства в левую, а члены, не содержащие x, из левой части в правую, поменяв при этом знаки переносимых членов на противоположные:

$$x^2 + 6x - x^2 - 5x < 6 - 9.$$

После приведения подобных слагаемых в каждой части неравенства получим $x < -3$, что и требовалось доказать. ◀

Свойство 3. Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится.
Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

Например, если обе части верного числового неравенства $-12 < 4$ разделить на 4, то получим также верное неравенство $-3 < 1$. Если обе части неравенства $-12 < 4$ умножить на -2, то получим неравенство $24 > -8$ (также являющееся верным).

Задача 3. Пусть $x > y$ и $xy < 0$. Доказать, что $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

▷ Разделим обе части неравенства $x > y$ на отрицательное число xy (знак неравенства поменяется на противоположный):

$$\frac{x}{xy} < \frac{y}{xy}, \text{ откуда } \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \text{ или } \frac{1}{x} > \frac{1}{y}. ◀$$

Свойство 4. Неравенства одинакового знака можно почленно складывать, при этом получается неравенство того же знака.

Например: $+\begin{array}{r}-2<5\\6<12\\\hline 4<17\end{array}$ $\quad +\begin{array}{r}a^2>1\\b>-1\\\hline a^2+b>0.\end{array}$

Свойство 5. Неравенства одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, можно перемножать, при этом получается неравенство того же знака.

Например: $\times\begin{array}{r}0{,}5>0{,}1\\8>3\\\hline 4>0{,}3\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{l}5<a\\1<b\\\hline 5<ab.\end{array}$

Задача 4. Пусть $a>5$, $b<7$. Доказать, что $a^2-3b>4$.

▷ 1) $\times\begin{array}{l}a>5\\a>5\\\hline a^2>25;\end{array}$ $\quad$ 2) $b<7\,|\cdot(-3)$ $\quad -3b>-21;$ $\quad$ 3) $+\begin{array}{r}a^2>25\\-3b>-21\\\hline a^2-3b>4.\end{array}$ ◀

Задача 5. Ширина прямоугольника больше 5 см, длина — в три раза больше ширины. Доказать, что периметр прямоугольника больше 40 см.

▷ Пусть a — ширина прямоугольника, тогда $3a$ — его длина. Периметр прямоугольника $P=2(a+3a)=8a$. По условию $a>5$, тогда $8a>5\cdot8$, $8a>40$, т. е. $P>40$ (см). ◀

Нестрогое неравенство $a\geqslant b$ означает, что $a>b$ или $a=b$. Например, записывают: $3\geqslant2$; $2\geqslant2$.

2. Решение неравенств и их систем

Решением неравенства с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Например, $x=2$ является решением неравенства $x+3>1$, так как $2+3>1$ — верное числовое неравенство.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Для решения неравенства первой степени с одним неизвестным нужно:

1) перенести с противоположными знаками члены, содержащие неизвестное, из правой части в левую, а не содержащие неизвестное — из левой части в правую;

2) привести подобные члены в левой и правой частях неравенства;

3) если коэффициент при неизвестном отличен от нуля, то разделить на него обе части неравенства.

Задача 6. Решить неравенство $\frac{1}{2}x-2\leqslant2x+1$.

▷ $\frac{1}{2}x-2x\leqslant1+2$, $-\frac{3}{2}x\leqslant3\,\Big|:\left(-\frac{3}{2}\right)$, $x\geqslant-2$. ◀

Знаки произведения (частного)

$ab>0\left(\frac{a}{b}>0\right)$, когда либо $a>0$, $b>0$, либо $a<0$, $b<0$.

$ab<0\left(\frac{a}{b}<0\right)$, когда либо $a>0$, $b<0$, либо $a<0$, $b>0$.

Задача 7. Решить неравенство $\frac{-12}{0,4x+3}<0$.

▷ Так как числитель дроби отрицателен, то дробь отрицательна при положительном знаменателе, т. е. $0,4x+3>0$, откуда

$$0,4x>-3\,|:0,4,$$
$$x>-7,5.$$ ◁

Задача 8. Доказать, что неравенство $3x-2\geqslant 3(x+2)-5$ не имеет решений.

▷ Упростим правую часть неравенства:

$3x-2\geqslant 3x+6-5$, $3x-2\geqslant 3x+1$, откуда $3x-3x\geqslant 1+2$, $0\cdot x\geqslant 3$.

Последнее неравенство не имеет решений, так как $0\cdot x=0$ при любом x, а неравенство $0\geqslant 3$ неверно. ◁

Решение системы неравенств с одним неизвестным — это значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Например, $x=3$ является решением системы неравенств

$$\begin{cases}2x-5\geqslant 0,\\ -x+4<3x,\end{cases}$$

так как и $2\cdot 3-5\geqslant 0$, и $-3+4<3\cdot 3$ — верные числовые неравенства.

Решить систему неравенств — это значит найти все решения системы или установить, что их нет.

Задача 9. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}8x-3>6(x+2),\\ 3(x-2)<4x+1.\end{cases}$$

Рис. 4

▷ Решим первое неравенство системы:

$$8x-3>6x+12,\ 8x-6x>12+3,$$
$$2x>15,\ x>7,5.$$

Решим второе неравенство системы:

$$3x-6<4x+1,\ 3x-4x<1+6,\ -x<7,\ x>-7.$$

Оба неравенства системы верны при $x>7,5$ (рис. 4). ◁

Задача 10. Решить неравенство $|2x-5|<3$.

▷ Данное неравенство означает то же, что и двойное неравенство $-3<2x-5<3$. Прибавив 5 к каждой части этого неравенства, получим $2<2x<8$, откуда делением на 2 каждой части неравенства найдем $1<x<4$. ◁

Задача 11. Решить неравенство $|2x-5|\geqslant 3$.

▷ Данное неравенство выполняется, когда $2x-5\geqslant 3$ или когда $2x-5\leqslant -3$, т. е. при $x\geqslant 4$, а также при $x\leqslant 1$. ◀

Упражнения

46. Выяснить, положительным или отрицательным является число c, если:

1) $c>b$, а $b>1$; 2) $c<b$, а $b<-3$.

47. Доказать, что если $x^2-3x+5>(x-2)^2$, то $x>-1$.

48. Доказать, что:

1) $x>5$, если $5x>25$; 2) $x<3$, если $-x>-3$;

3) $x^2>-2x$, если $x<-2$; 4) $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$, если $x<y$ и $xy>0$.

49. Известно, что $x>3$, $y<8$. Доказать, что $2x^3-y>46$.

50. Длина прямоугольника меньше 12 см, а ширина — в два раза меньше длины. Доказать, что площадь прямоугольника меньше 100 см^2.

51. Решить неравенство:

1) $3x-8>5x+1$; 2) $25(x-1)\leqslant 6(5x-6)$.

52. Найти наименьшее целое n, удовлетворяющее неравенству:

1) $n>-3$; 2) $n>0$; 3) $n\geqslant 2$; 4) $n\geqslant -5$.

53. Найти наименьшее целое число, являющееся решением неравенства $15-2(x+2)<x-10$.

54. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2x-3>0, \\ 5-x>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0{,}2+x\leqslant 0, \\ -5x+2<0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{4}x+1>0, \\ 2-\frac{1}{3}x\leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 1{,}4x+7\leqslant 0, \\ 0{,}3-2x\geqslant 0. \end{cases}$

55. Доказать, что если:

1) $5a-8b>1{,}2a-4{,}2b$, то $a>b$;

2) $(a+3)(2-a)\leqslant(5-a)(a+3)$, то $a\geqslant -3$.

56. Доказать, что если $x>2$, $y>4$, то:

1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}>2$; 2) $2xy>16$;

3) $-\frac{xy}{2}<-4$; 4) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{3}{4}$.

57. Показать, что решением неравенства $3x-2<3(x+2)-5$ является любое число.

58. Найти наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $\frac{3x-1}{2}+\frac{2x+1}{3}<2$; 2) $\frac{1-4x}{6}-\frac{2-3x}{4}<-1$.

59. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3x-5>x-7, \\ x+4<2(x+1); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x+1)<3(x+2)+1, \\ -2x+1\leqslant 1-7x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0{,}5x+3\leqslant -1{,}5x, \\ 5(2-x)<3(1-x)+3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 0{,}3x+0{,}1\geqslant 0{,}2x-0{,}1, \\ 6(x+2)>7x+8. \end{cases}$

60. Найти все целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{5}\geqslant\dfrac{x-3}{6}, \\ 5x-1<3(x+1). \end{cases}$$

61. Решить неравенство:

1) $\dfrac{-21}{5-6x}>0;$ 2) $\dfrac{0{,}8x-2}{x^2+1}<0.$

62. Решить уравнение:

1) $|5x-1|=0;$ 2) $|0{,}5x+3|=1;$ 3) $|x+2|=-2;$
4) $|7-x|=-0{,}1;$ 5) $|3x-5|=1;$ 6) $|1-2x|=5.$

63. Решить неравенство:

1) $|3x+1|\leqslant 7;$ 2) $|2-x|<3;$ 3) $|2x-3|>1;$ 4) $|1-x|\geqslant 4.$

64. Решить неравенство:

1) $|x-4|\geqslant -3;$ 2) $|x-4|<-3.$

65. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3x-4<x+1, \\ -5x+1<7+x, \\ \dfrac{1}{4}x-1\leqslant\dfrac{3}{4}x-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 12x+5\geqslant 7x+2, \\ 0{,}1x-2<0{,}2x-1, \\ 6x+3<6-4x. \end{cases}$

66. В треугольнике длины сторон равны a, b и c. Медиана, проведенная к стороне c, равна m. Доказать, что $m<\dfrac{a+b+c}{2}$.

§ 4. Линейная функция

1. Понятие функции

Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие по определенному правилу число y, то говорят, что на этом множестве задана функция.

При этом x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а y — *зависимой переменной* или *функцией*.

Зависимость переменной y от переменной x называют *функциональной зависимостью*. Записывают $y=y(x)$.

Функция может быть задана *формулой* (аналитически). Например, $y(x)=x^3-x+1$. Для такой функции можно найти ее значение для любого значения аргумента. К примеру,

$$y(0)=0^3-0+1=1;\ y(-2)=(-2)^3-(-2)+1=-8+2+1=-5.$$

Задача 1. Найти значение x, при котором значение функции $y=\frac{1}{2}(3x-1)$ равно -5.

▷ $-5=\frac{1}{2}(3x-1)$, $-5=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}x=-5+\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}x=-\frac{9}{2}$, $x=-3$. ◀

Функция $y(x)$ может быть задана *таблицей*. Например:

x	0	1	2	4	6	9	10
$y(x)$	1	3	5	9	13	19	21

По таблице можно определить, в частности, что: 1) $y(4)=9$; 2) функция $y(x)$ принимает значение, равное 21, при $x=10$.

График функции $y=y(x)$ — множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x;\ y(x))$.

Например, на рисунке 5 функция $y=y(x)$ задана графиком.

С помощью графика функции можно выяснить многие свойства функции («прочитать» график функции). Например, по рисунку 5 можно:

1) найти значения функции при конкретных значениях x: $y(-4)=2$, $y(0)=-3$, $y(4)=0$;

2) определить, при каких значениях x значение функции $y(x)$ равно конкретному числу, например $y(x)=2$ при $x=-4$, $x=5{,}5$, $x=9$;

3) определить промежутки знакопостоянства функции: $y>0$ при $-4\leqslant x<-3$ и при $4<x<11$; $y<0$ при $-3<x<4$ и при $11<x\leqslant 13$.

2. Линейная функция

Линейная функция — это функция вида $y=kx+b$, где k и b — заданные числа.

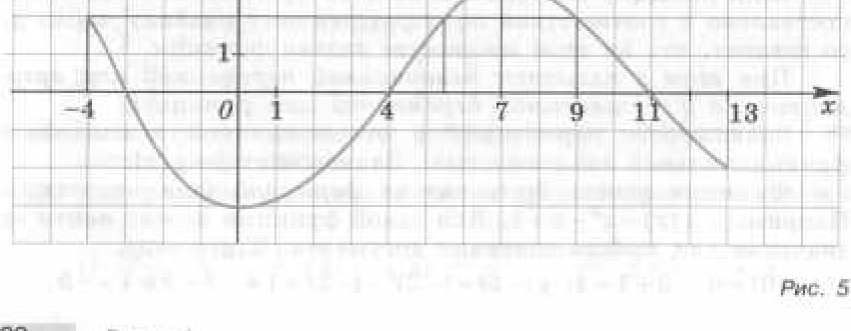


Рис. 5

График линейной функции $y=kx+b$ — прямая. При $b=0$ функция принимает вид $y=kx$, ее график проходит через начало координат.

Прямая пропорциональная зависимость — это зависимость вида $y=kx$, где $k>0$, $x>0$ (k — коэффициент пропорциональности).

Обратная пропорциональная зависимость — это зависимость вида $y=\frac{k}{x}$, где $k>0$, $x>0$ (k — коэффициент пропорциональности).

Задача 2. Построить график функции $y=-\frac{1}{2}x+1$.

▷ Заполним таблицу:

x	0	4
y	1	-1

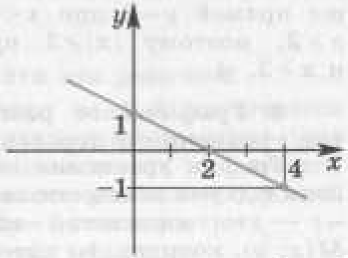


Рис. 6

На координатной плоскости (рис. 6) отметим две точки (0; 1) и (4; −1). Через них проведем прямую, которая и будет графиком заданной функции. ◀

Задача 3. Не строя графика функции $y=2x+3$, найти координаты точек пересечения его с осями координат.

▷ 1) $y(0)=2\cdot 0+3=3$; 2) $0=2\cdot x+3$, откуда $x=-1{,}5$.

Ответ. (0; 3) и (−1,5; 0). ◀

Задача 4. Не строя графика функции $y=-\frac{1}{2}x+5$, определить, какая из точек $P(4;\ 3)$, $M(-4;\ 6)$ принадлежит графику этой функции.

▷ 1) Точка $P(4;\ 3)$ принадлежит графику функции $y=-\frac{1}{2}x+5$, так как $3=-\frac{1}{2}\cdot 4+5$ — верное равенство.

2) Точка $M(-4;\ 6)$ не принадлежит графику функции $y=-\frac{1}{2}x+5$, так как равенство $6=-\frac{1}{2}\cdot(-4)+5$ — неверное. ◀

Задача 5. Решить графически неравенство $3x-3>6$.

▷ В одной системе координат построим графики функций $y=3x-3$ и $y=6$ (рис. 7).

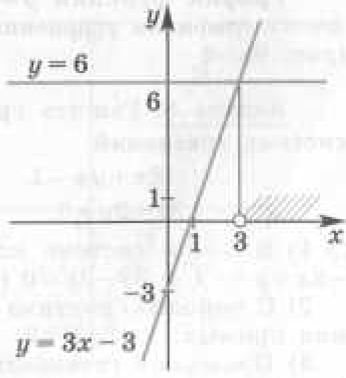


Рис. 7

Точки графика функции $y=3x-3$ лежат выше прямой $y=6$ при $x>3$. ◀

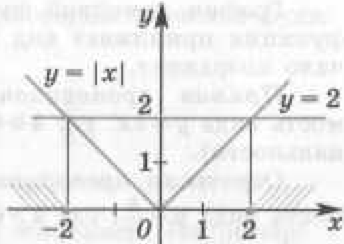


Рис. 8

Задача 6. Решить графически неравенство $|x|\geqslant 2$.

▷ В одной системе координат построим графики функций $y=|x|$ и $y=2$ (рис. 8).

Значения $x=\pm 2$ являются решениями исходного неравенства. График функции $y=|x|$ лежит выше прямой $y=2$ при $x<-2$ и при $x>2$, поэтому $|x|\geqslant 2$ при $x\leqslant -2$ и $x\geqslant 2$. ◀

3. Графическое решение систем уравнений и неравенств

График уравнения первой степени с двумя неизвестными $ax+by=c$ — это множество всех точек $M(x; y)$, координаты которых x и y при подстановке в это уравнение обращают его в верное равенство.

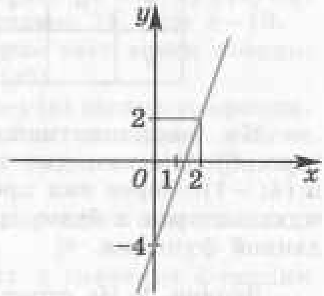


Рис. 9

Графиком уравнения первой степени с двумя неизвестными является прямая.

Задача 7. Построить график уравнения $3x-y=4$.

▷ Выразив из данного уравнения y через x, получим функцию

$$y=3x-4.$$

График функции $y=3x-4$ является графиком уравнения $3x-y=4$ (рис. 9). ◀

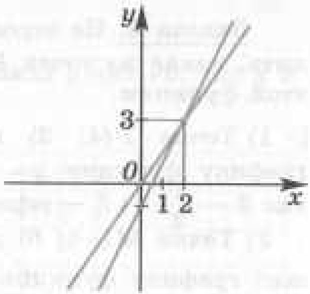


Рис. 10

Задача 8. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases}-2x+y=-1,\\ 3x-2y=0.\end{cases}$$

▷ 1) В одной системе координат строим графики уравнений $-2x+y=-1$ и $3x-2y=0$ (рис. 10).

2) С помощью рисунка находим координаты точки пересечения прямых: $x\approx 2$, $y\approx 3$.

3) Проверкой устанавливаем, что $x=2$, $y=3$ — точное решение данной системы. Ответ. (2; 3). ◀

Задача 9. Показать, что система уравнений $\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x-4y=5 \end{cases}$ не имеет решений.

▷ Умножим на 2 первое уравнение системы: $\begin{cases} 2x-4y=6, \\ 2x-4y=5. \end{cases}$

Левые части уравнений этой системы равны при любых значениях x и y, а правые части не равны. Следовательно, нет таких значений x и y, которые обращают оба уравнения этой системы в верные равенства. Графики уравнений системы — параллельные прямые. ◀

Задача 10. Показать, что система уравнений

$$\begin{cases} -2x+y=-4, \\ 4x-2y=8 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений. Найти эти решения.

▷ После умножения первого уравнения на (-2) получается второе уравнение системы, т. е. оба уравнения выражают одну и ту же зависимость между x и y. Следовательно, координаты любой точки прямой $-2x+y=-4$ являются решениями данной системы (прямые $-2x+y=-4$ и $4x-2y=8$ совпадают).

Из первого уравнения находим $y=2x-4$.

Решения этой системы можно записать в виде $(x;\ 2x-4)$, где x — любое число. ◀

Решения неравенств, а также систем неравенств с двумя неизвестными можно изображать точками на координатной плоскости. Например, решениями неравенства $y \geqslant 1-3x$ являются все пары чисел $(x;\ y)$ — координаты точек полуплоскости, лежащих выше прямой $y=1-3x$, и точек самой этой прямой (на рисунке 11 эти точки показаны штриховкой). Решения неравенства $y<2x-4$ показаны штриховкой на рисунке 12 (это точки полуплоскости, лежащие ниже прямой $y=2x-4$).

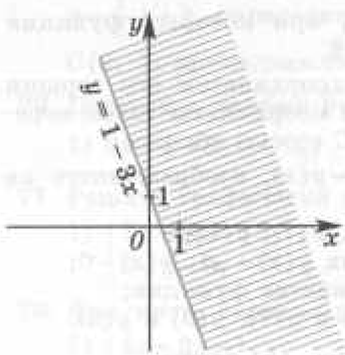


Рис. 11

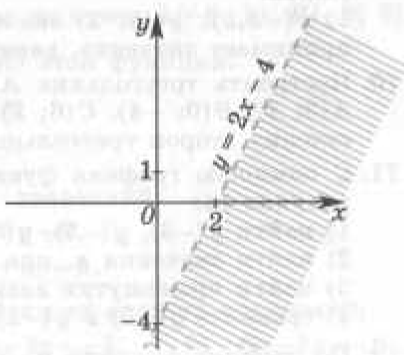


Рис. 12

<u>Задача 11.</u> Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3x+y\geqslant 1, \\ 2x-y>4. \end{cases}$$

▷ Преобразуем данную систему к виду $\begin{cases} y\geqslant 1-3x, \\ y<2x-4. \end{cases}$

В одной системе координат покажем штриховкой решения каждого неравенства полученной системы (рис. 13). Точки координатной плоскости, изображающие решения как первого неравенства, так и второго (той части плоскости, где штриховки пересекаются), иллюстрируют решения исходной системы. ◀

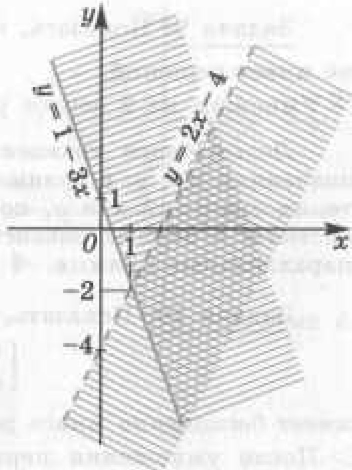


Рис. 13

Упражнения

67. Функция $y(x)$ задана формулой $y(x)=-2x^2+x-3$. Найти $y(0)$, $y(-2)$, $y(2)$.

68. Найти значение x, при котором функция $y=-6x+7$ принимает значение, равное -5; 4.

69. Функция $y(x)$ задана таблицей:

x	-5	$-3{,}5$	0	1	4
$y(x)$	-8	0	3	-8	12

Найти:
1) $y(-3{,}5)$; $y(1)$; 2) значения x, при которых функция принимает значение, равное 3; -8.

70. Построить треугольник ABC по координатам его вершин $A(3;\ 4)$, $B(0;\ -4)$, $C(6;\ 2)$. Найти координаты точек пересечения сторон треугольника ABC с осью абсцисс.

71. С помощью графика функции $y=y(x)$, изображенного на рисунке 14:
1) найти $y(-3)$, $y(-5)$, $y(0)$, $y(2)$, $y(7)$, $y(12)$;
2) найти значения x, при которых $y(x)=-1$, $y(x)=0$;
3) найти промежутки знакопостоянства функции;
4) сравнить $y(-5)$ и $y(-2)$; $y(-3)$ и $y(7)$; $y(0)$ и $y(2)$.

72. По графику функции $y=2x-2$ (рис. 15) найти:
1) промежутки знакопостоянства функции $y=2x-2$;

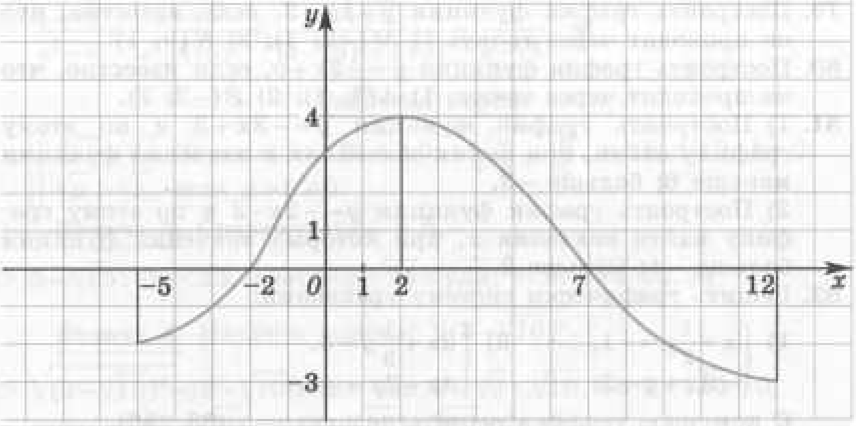


Рис. 14

2) значения x, при которых значения функции $y=2x-2$ больше 2;

3) значения x, при которых значения функции $y=2x-2$ меньше 2.

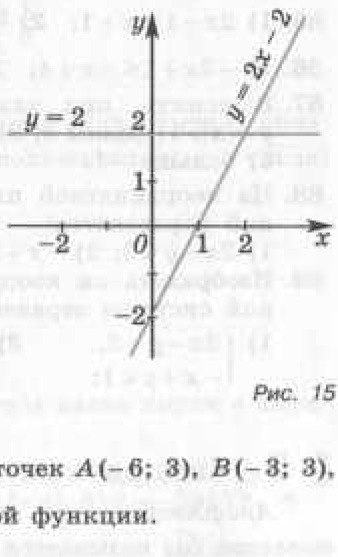


Рис. 15

73. Построить график функции:

1) $y=3x$; 2) $y=\frac{1}{3}x-1$;

3) $y=3$.

74. Не строя графика функции, найти координаты точек пересечения его с осями координат:

1) $y=-5x+8$; 2) $y=\frac{1}{4}x-3$.

75. Не строя графика функции $y=\frac{1}{3}x+4$, определить, какая из точек $A(-6;\ 3)$, $B(-3;\ 3)$, $C(3;\ 1)$ принадлежит графику этой функции.

76. Построить график уравнения:

1) $2x+y=3$; 2) $-\frac{x}{2}-y=1$.

77. Решить графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x+3y=-2, \\ x-y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+y=0, \\ 4x+3y=5. \end{cases}$

78. Выяснить, сколько решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ -6x+4y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3y=-4, \\ 2x+y=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6x-2y=-8, \\ -3x+y=4. \end{cases}$

79. Построить график функции $y=kx-2$, если известно, что он проходит через точку: 1) $M(-2;\ 4)$; 2) $N(9;\ 1)$.

80. Построить график функции $y=-2x+b$, если известно, что он проходит через точку: 1) $A(3;\ 2)$; 2) $B(-3;\ 3)$.

81. 1) Построить график функции $y=-3x+3$ и по этому графику найти, при каких значениях x значения функции меньше 6; больше -3.

2) Построить график функции $y=-2x-2$ и по этому графику найти значения x, при которых значения функции больше -4; меньше 2.

82. Решить графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x-\frac{1}{2}y=-1, \\ -2x+y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+\frac{1}{3}y=5, \\ 4x-3y=-1. \end{cases}$

С помощью графика решить неравенство (**83—86**).

83. 1) $\frac{1}{2}x-1>0$; 2) $-\frac{1}{3}x+2<1$.

84. 1) $3x-2<x$; 2) $4x+3>x$.

85. 1) $2x-1>x+1$; 2) $\frac{3}{2}x+2<x+1$.

86. 1) $-2x+1\leqslant -x+4$; 2) $-3x+3\geqslant -2x+1$.

87. Выяснить, при каких значениях x значения функции $y=|x|$: 1) равны 3; 2) больше 2; 3) меньше 1; 4) меньше -2; 5) больше -1.

88. На координатной плоскости изобразить множество решений неравенства:

1) $2x+y\leqslant 0$; 2) $-x+2y>0$; 3) $3x-y<4$.

89. Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} 3x-y<2, \\ -x+y\leqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y\geqslant 3, \\ 4x-2y\geqslant 3. \end{cases}$

§ 5. Квадратные корни

Арифметическим квадратным корнем из числа a (записывается $\sqrt{a}$) называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Например, $\sqrt{16}=4$, так как $4\geqslant 0$ и $4^2=16$.

Очевидно, что $\sqrt{a}\geqslant 0$, $(\sqrt{a})^2=a$, $\sqrt{a^2}=|a|$.

Задача 1. Решить уравнение $\sqrt{5-x}=3$.

▷ Так как $3\geqslant 0$, то по определению арифметического квадратного корня $5-x=3^2$, откуда $x=-4$. ◀

Задача 2. Сократить дробь $\frac{a+\sqrt{5}}{a^2-5}$.

▷ $\dfrac{a+\sqrt{5}}{a^2-5}=\dfrac{a+\sqrt{5}}{a^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{a+\sqrt{5}}{(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})}=\dfrac{1}{a-\sqrt{5}}$. ◀

Свойства корня

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, если $a\geqslant 0$, $b>0$;
$\sqrt{a}>\sqrt{b}$, если $a>b\geqslant 0$.

Задача 3. Сравнить $\sqrt{24}$ и 5.

▷ $5=\sqrt{25}$; $24<25$, поэтому $\sqrt{24}<\sqrt{25}$, т. е. $\sqrt{24}<5$. ◀

Задача 4. Извлечь корень: $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$.

▷ $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}=|3-\sqrt{10}|$; так как $3=\sqrt{9}<\sqrt{10}$, то $3-\sqrt{10}<0$, поэтому $|3-\sqrt{10}|=-(3-\sqrt{10})=\sqrt{10}-3$. ◀

Задача 5. Вычислить: 1) $\sqrt{25\cdot\dfrac{4}{9}}$; 2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$.

▷ 1) $\sqrt{25\cdot\dfrac{4}{9}}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{9}}=5\cdot\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=5\cdot\dfrac{2}{3}=3\dfrac{1}{3}$;

2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 27}=\sqrt{81}=9$. ◀

Задача 6. Вынести множитель из-под знака корня, полагая, что буквами обозначены положительные числа: 1) $\sqrt{8n^7}$; 2) $\sqrt{\dfrac{a^6b}{72c^5}}$.

▷ 1) $\sqrt{8n^7}=\sqrt{4\cdot 2\cdot(n^3)^2\cdot n}=2n^3\sqrt{2n}$;

2) $\sqrt{\dfrac{a^6b}{72c^5}}=\sqrt{\dfrac{a^6b}{36\cdot 2c^4\cdot c}}=\dfrac{a^3}{6c^2}\sqrt{\dfrac{b}{2c}}$. ◀

Задача 7. Вынести множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{25a^2b^3}$, если $a<0$, $b>0$.

▷ $\sqrt{25a^2b^3}=\sqrt{25a^2b^2\cdot b}=5\cdot|a|\cdot|b|\cdot\sqrt{b}=5\cdot(-a)\cdot b\sqrt{b}=-5ab\sqrt{b}$. ◀

Задача 8. Исключить иррациональность из знаменателя дроби: 1) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

▷ 1) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2-2\sqrt{6}+3}{2-3}=$

$=\dfrac{5-2\sqrt{6}}{-1}=2\sqrt{6}-5$. ◀

Тождеством называется равенство, справедливое для всех допустимых значений входящих в него букв.

Например, тождествами являются формулы сокращенного умножения, формулы, выражающие свойства квадратных корней.

Задача 9. Для всех $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $a \neq b$ доказать тождество

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}.$$

▷ Приведем левую часть исходного равенства к виду правой:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}.$$

Левая часть исходного равенства для всех $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $a \neq b$ равна правой. Тождество доказано. ◀

Среднее арифметическое чисел a и b — это значение выражения $\frac{a+b}{2}$. Например, среднее арифметическое чисел -5 и 13 равно $\frac{-5+13}{2}=4$.

Среднее геометрическое неотрицательных чисел a и b — это значение выражения $\sqrt{ab}$. Например, среднее геометрическое чисел 3 и 12 равно $\sqrt{3 \cdot 12}=6$.

Задача 10. Доказать, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел a и b не меньше среднего геометрического этих чисел, т. е. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

▷ Рассмотрим справедливое для любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ неравенство

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Преобразуем его: $(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2 \geqslant 0$, откуда $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, или $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, что и требовалось доказать. ◀

Упражнения

90. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2x-1}=5$; 2) $\sqrt{4-0{,}5x}=2$.

91. Сократить дробь:

1) $\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{4b^2-7}{2b+\sqrt{7}}$.

92. Сравнить:

1) $\sqrt{83}$ и 9; 2) $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{0{,}1}$.

93. Упростить выражение $(\sqrt{7}+3)^2-(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{6})$.

94. Вычислить:

1) $\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot 49}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{5\frac{2}{5}}$; 3) $\sqrt{\frac{16\cdot 1{,}69}{90000}}$;

4) $\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{392}}$; 5) $\sqrt{8^4}$; 6) $\sqrt{(-4)^6}$.

95. Извлечь корень:

1) $\sqrt{4x^2+12xy+9y^2}$; 2) $\sqrt{(5-\sqrt{23})^2}$; 3) $\sqrt{(\sqrt{23}-5)^2}$;

4) $\sqrt{(a-b)^2}$, если $a\geqslant b$; 5) $\sqrt{(a-b)^2}$, если $a\leqslant b$.

96. Упростить:

1) $7\sqrt{28}-\sqrt{80}-2\sqrt{63}+3\sqrt{45}$;

2) $2\sqrt{\frac{1}{6}}-\sqrt{\frac{2}{3}}+3\sqrt{\frac{1}{15}}+4\sqrt{\frac{3}{5}}$; 3) $(\sqrt{18}-3\sqrt{2})^2$;

4) $(1-\sqrt{3})^2(1+\sqrt{3})$; 5) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}-\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$; 6) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}+\frac{3}{3-\sqrt{5}}$.

97. Сравнить:

1) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{2}$ и 7; 3) $2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{7}$.

98. Выяснить, при каких значениях a имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{3-2a}$; 2) $\sqrt{0{,}5a+5}$; 3) $\sqrt{6-\frac{2}{3}a}$; 4) $\sqrt{-\frac{1}{2}-3a}$.

99. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{8a^5}$, если $a\geqslant 0$; 2) $\sqrt{\frac{2}{9}b^2}$, если $b\leqslant 0$;

3) $\sqrt{27a^3b^3}$, если $a<0$, $b<0$; 4) $\sqrt{0{,}32a^2b^3}$, если $a<0$, $b>0$;

5) $\sqrt{16a^3b^5}$, если $a<0$, $b<0$; 6) $\sqrt{\frac{1}{9}a^5b^6}$, если $a\geqslant 0$, $b\leqslant 0$.

100. Внести множитель под знак корня:

1) $x\sqrt{2}$, если $x>0$; 2) $x\sqrt{2}$, если $x<0$;

3) $-a\sqrt{3}$, если $a\leqslant 0$; 4) $-a\sqrt{3}$, если $a\geqslant 0$;

5) $a^2b\sqrt{b}$, если $a<0$, $b>0$; 6) $a^3b\sqrt{-b}$, если $a<0$, $b\leqslant 0$.

101. Исключить иррациональность из знаменателя дроби:

1) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; 2) $\frac{4\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; 4) $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}$.

102. Доказать тождество:

1) $(1+a\sqrt{a})(a\sqrt{a}-1)=a^3-1$, где $a\geqslant 0$;

2) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-2=\frac{a^2+b^2}{ab}$, где $a>0$, $b>0$.

103. Найти среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:

1) 12 и 3; 2) 0,6 и 5,4; 3) $\frac{7}{8}$ и $3\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$ и 0,03.

Выяснить, в каком случае среднее арифметическое двух положительных чисел равно их среднему геометрическому.

104. Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, не больше половины гипотенузы.

105. Доказать, что для любых $a>0$ и $b>0$ верно неравенство:

1) $ab \geqslant 2\sqrt{ab}-1$; 2) $\frac{a}{b} \geqslant 2-\frac{b}{a}$.

106. Упростить:

1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

§ 6. Квадратные уравнения

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где a, b и c — заданные числа, $a \neq 0$, x — неизвестное число.

Коэффициент a называется первым или старшим, b — вторым коэффициентом, c — свободным членом.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называется неполным, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Задача 1. Решить неполное квадратное уравнение:

1) $\frac{2}{3}x^2=0$; 2) $2x^2+15=0$; 3) $5x^2-4=0$; 4) $-0{,}2x^2+4x=0$.

▷ 1) $\frac{2}{3}x^2=0$, $x^2=0$, $x=0$.

2) $2x^2+15=0$, $2x^2=-15$, $x^2=-7{,}5$ — это уравнение не имеет действительных корней.

3) $5x^2-4=0$, $5x^2=4$, $x^2=\frac{4}{5}$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4) $-0{,}2x^2+4x=0$, $x(-0{,}2x+4)=0$, откуда $x=0$ или $-0{,}2x+4=0$, т. е. $x_1=0$, $x_2=20$. ◀

Формула корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D=b^2-4ac.$$

Зависимость числа корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ от дискриминанта D:

$D>0$	$D=0$	$D<0$
Два различных корня $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	Один корень $x=-\frac{b}{2a}$	Нет действительных корней

Задача 2. Решить квадратное уравнение $2x^2+5x-3=0$.

▷ $D=b^2-4ac=5^2-4\cdot2\cdot(-3)=25+24=49>0$,

$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm7}{4}$; $x_1=\frac{-5+7}{4}=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{-5-7}{4}=-3$. ◀

Задача 3. Решить уравнение $\frac{1}{9}x^2-2x+9=0$.

▷ $D=(-2)^2-4\cdot\frac{1}{9}\cdot9=4-4=0$, $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\cdot\frac{1}{9}}=9$, $x=9$. ◀

Задача 4. Решить уравнение $-3x^2+5x-7=0$.

▷ $D=5^2-4\cdot(-3)\cdot(-7)=25-84<0$.

Ответ. Уравнение не имеет корней. ◀

Задача 5. Найти все значения a, при которых уравнение $ax^2+x-3=0$: 1) имеет два различных корня; 2) имеет один корень; 3) не имеет корней.

▷ 1) Уравнение $ax^2+x-3=0$ имеет два различных корня, когда $a\neq0$ и $D=1^2-4\cdot a\cdot(-3)=1+12a>0$, т. е. при $a>-\frac{1}{12}$.

Ответ. При $a>-\frac{1}{12}$, $a\neq0$.

2) Данное уравнение имеет один корень в двух случаях: если $a=0$ и уравнение «вырождается» в линейное $x-3=0$ (его корень $x=3$); если $a\neq0$ и $D=1+12a=0$, т. е. при $a=-\frac{1}{12}$.

Ответ. При $a=0$ и при $a=-\frac{1}{12}$.

3) Уравнение не имеет действительных корней, если $a\neq0$ и $D=1+12a<0$, т. е. при $a<-\frac{1}{12}$.

Ответ. При $a<-\frac{1}{12}$. ◀

Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ называется *приведенным квадратным уравнением*.

Формулой корней приведенного квадратного уравнения

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \qquad (1)$$

удобно пользоваться, когда p — четное число.

Задача 6. Решить квадратное уравнение $x^2-4x-12=0$.

▷ Так как $p=-4$, $\frac{p}{2}=-2$, то по формуле (1) находим $x_{1,2}=2\pm\pm\sqrt{4+12}=2\pm4$, откуда $x_1=6$, $x_2=-2$. ◀

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.
В общем случае: если x_1 и x_2 — корни уравнения ax^2+bx+ $+c=0$ $(a\neq0)$, то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Задача 7. Составить приведенное квадратное уравнение, если известны его корни $x_1=-3$ и $x_2=4$.

▷ По теореме Виета $p=-(x_1+x_2)=-(-3+4)=-1$, $q=x_1\cdot x_2=$ $=-3\cdot4=-12$.

Искомое уравнение: $x^2-x-12=0$. ◀

Теорема, обратная теореме Виета. Если действительные числа p, q, x_1 и x_2 таковы, что $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

Задача 8. С помощью теоремы, обратной теореме Виета, найти корни уравнения $x^2+7x+12=0$.

▷ Подбираем два числа x_1 и x_2 таким образом, чтобы x_1+ $+x_2=-7$, а $x_1\cdot x_2=12$. Это числа -3 и -4, так как $(-3+(-4))=$ $=-7$, $-3\cdot(-4)=12$, поэтому $x_1=-3$, $x_2=-4$. ◀

Если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, то при всех x справедливо равенство

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \qquad (2)$$

Задача 9. Разложить на множители квадратный трехчлен:

1) x^2-x-20; 2) $-3x^2-10x+8$.

▷ 1) Согласно теореме, обратной теореме Виета, числа $x_1=$ $=-4$ и $x_2=5$ являются корнями уравнения $x^2-x-20=0$. По формуле (2) получаем $x^2-x-20=(x+4)(x-5)$.

2) Найдем корни уравнения $-3x^2-10x+8=0$:

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot(-3)\cdot8}}{2\cdot(-3)}=\frac{10\pm\sqrt{196}}{-6}=\frac{10\pm14}{-6},$$

$$x_1=\frac{10+14}{-6}=-4,\ x_2=\frac{10-14}{-6}=\frac{2}{3}.$$

По формуле (2) получаем $-3x^2-10x+8=-3(x+4)\left(x-\frac{2}{3}\right)=$ $=(x+4)(2-3x)$. ◀

Задача 10. Сократить дробь $\frac{x^2-x-20}{8-10x-3x^2}$.

▷ Используя результаты решения задачи 9, имеем $x^2-x-20=(x+4)(x-5)$, $8-10x-3x^2=(x+4)(2-3x)$, поэтому

$$\frac{x^2-x-20}{8-10x-3x^2}=\frac{(x+4)(x-5)}{(x+4)(2-3x)}=\frac{x-5}{2-3x}. \blacktriangleleft$$

Уравнение $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$ называют *биквадратным*.

Задача 11. Решить биквадратное уравнение $2x^4-17x^2-9=0$.

▷ Сделаем замену неизвестного: $x^2=t$. Тогда $x^4=t^2$ и данное уравнение запишется в виде $2t^2-17t-9=0$.

Решим последнее уравнение: $t_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot 2\cdot(-9)}}{2\cdot 2}=$ $=\frac{17\pm\sqrt{361}}{4}=\frac{17\pm 19}{4}$, откуда $t_1=9$, $t_2=-\frac{1}{2}$.

Задача свелась к решению уравнений $x^2=9$ и $x^2=-\frac{1}{2}$.

Уравнение $x^2=9$ имеет два корня: $x_{1,2}=\pm 3$; уравнение $x^2=-\frac{1}{2}$ не имеет действительных корней. Ответ. $x_{1,2}=\pm 3$. ◀

Задача 12. Решить уравнение $\frac{3x+1}{x^2-1}-\frac{2x}{x-1}=\frac{3}{x+1}$.

▷ Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{3x+1^{\backslash 1}}{(x-1)(x+1)}-\frac{2x^{\backslash x+1}}{x-1}-\frac{3^{\backslash x-1}}{x+1}=0,\quad \frac{3x+1-2x(x+1)-3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=0,$$

$$\frac{3x+1-2x^2-2x-3x+3}{x^2-1}=0,\quad \frac{-2x^2-2x+4}{x^2-1}=0.$$

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля:

$$-2x^2-2x+4=0, \text{ а } x^2-1\neq 0.$$

Решая уравнение $-2x^2-2x+4=0$, находим его корни: $x_1=-2$, $x_2=1$.

Так как $x^2-1=0$ при $x=1$, то $x_2=1$ — посторонний корень.

Ответ. $x=-2$. ◀

Упражнения

107. Решить уравнение:

1) $0{,}3x^2=0$; 2) $5x^2+0{,}1=0$; 3) $x^2=24$; 4) $-x^2+9=0$;

5) $\frac{1}{3}x^2+6=0$; 6) $-x^2+\frac{1}{4}=0$; 7) $\frac{1}{5}x^2-2x=0$; 8) $3x+4x^2=0$;

9) $x(x-3)=4(x+1)+3x^2-7x$;

10) $\frac{x^2-2}{2}+\frac{2+x^2-x}{3}=\frac{3x-1}{3}$;

11) $x^2-7x+12=0$; 12) $x^2+x-30=0$;
13) $x^2+4x+9=0$; 14) $x^2+3x-108=0$;
15) $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$; 16) $\frac{1}{4}x^2-2x+4=0$;
17) $2x^2+x-15=0$; 18) $3x^2-14x+8=0$;
19) $-4x^2+11x+3=0$; 20) $-2x^2+3x-3=0$.

108. Решить уравнение:
1) $x^2-10=5-x(x+7)$; 2) $3x(x-2)+7=0$.

109. Составить приведенное квадратное уравнение, если известны его корни:
1) $x_1=3,\ x_2=-7$; 2) $x_1=-4,\ x_2=0$.

110. Найти сумму и произведение корней уравнения
$$3x^2-7x-3=0.$$

111. Пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, найти корни уравнения:
1) $x^2+5x+6=0$; 2) $x^2-3x-4=0$; 3) $x^2+3x-4=0$.

112. Разложить на множители квадратный трехчлен:
1) $x^2-12x+35$; 2) $x^2+9x+20$;
3) $5x^2+9x-2$; 4) $4x^2-x-3$;
5) $-2x^2+5x-2$; 6) $\frac{2}{3}x^2+2x-12$.

113. Сократить дробь $\frac{2x^2+x-1}{3x^2+4x+1}$.

114. Решить уравнение:
1) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x}=0$; 2) $\frac{-x^2-2x+15}{x^2+4x}=0$; 3) $\frac{x^2-x-12}{x^2-9}=0$;
4) $\frac{3x^2+8x-3}{2x+6}=0$; 5) $\frac{1}{2}+\frac{4}{x}=\frac{5}{x-3}$; 6) $\frac{7}{x}+\frac{1}{x-5}=1\frac{1}{2}$.

115. Решить уравнение:
1) $x^4-7x^2+12=0$; 2) $x^4-10x^2+9=0$;
3) $x^4+2x^2-15=0$; 4) $x^4+x^2-6=0$.

116. Решить систему уравнений:
1) $\begin{cases}2x-y=0,\\3x^2-y^2+4=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-2y=8,\\x^2+2y^2=22;\end{cases}$
3) $\begin{cases}x^2+y^2=10,\\xy=3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\xy+6=0.\end{cases}$

117. Сумма двух чисел равна $9\frac{1}{2}$, а их произведение равно 12. Найти эти числа.

118. Одно из двух чисел на 5 больше другого, а их удвоенное произведение равно 5,5. Найти оба числа.

119. Одно число на 7 меньше другого, а 20% от их произведения равны 12. Найти эти числа.

120. Расстояние от города до деревни 36 км. Один из велосипедистов преодолел его на 1 ч быстрее другого. Найти скорости велосипедистов, если скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого.

121. Моторная лодка проплыла по течению реки до ближайшей пристани 22 км и после двухчасовой стоянки вернулась обратно. Найти скорость лодки в стоячей воде, если на весь путь ушло 8,4 ч, а скорость течения реки 3 км/ч.

122. Две бригады, работая вместе, выполнили работу за 12 дней. Сколько дней потребовалось бы каждой бригаде на выполнение этой работы, если одной из них на это требуется на 10 дней меньше, чем другой?

123. При одновременной работе двух труб бассейн наполняется за 7 ч 18 мин. За какое время наполняется бассейн каждой трубой в отдельности, если через одну трубу он наполняется на 6 ч быстрее, чем через другую?

124. Пусть $x=2$ — корень уравнения $2x^2+px-2=0$. Найти p и разложить левую часть уравнения на множители.

125. Пусть $x=-5$ — корень уравнения $3x^2+10x+q=0$. Найти q и разложить левую часть уравнения на множители.

126. Разложить на множители многочлен:

1) a^4-7a^2-18; 2) a^4-9a^2+20.

127. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2-2y-2=0, \\ x^2+y^2-5=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4, \\ xy=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=17, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=40, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=20. \end{cases}$

128. Не вычисляя корней уравнения $x^2-3x-4=0$, найти:

1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2+x_2^2$; 3) $x_1^3+x_2^3$.

129. Не вычисляя корней уравнения $2x^2-3x-2=0$, найти:

1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2+x_2^2$; 3) $x_1^3+x_2^3$.

130. Решить уравнение:

1) $x\sqrt{x-1}=0$; 2) $(x+3)\sqrt{1+x}=0$.

<u>131.</u> Решить относительно x уравнение:

1) $ax^2+5x=0$; 2) $ax^2-3x=0$; 3) $x^2-a=0$; 4) $2x^2+a=0$.

<u>132.</u> Найти все значения a, при которых уравнение $x^2+4x+a=0$: 1) имеет два различных действительных корня; 2) имеет один корень; 3) не имеет действительных корней.

<u>133.</u> Найти все значения a, при которых уравнение $ax^2-2x+9=0$ имеет один корень.

<u>134.</u> Найти все значения m, при которых уравнение $mx^2-2x+1=0$ имеет: 1) один корень; 2) два различных корня.

§ 7. Квадратичная функция

Квадратичная функция — это функция вида $y=ax^2+bx+$ $+c$, где a, b и c — заданные числа, $a\neq 0$, x — действительное переменное.

Значения x, при которых функция принимает значение, равное нулю, называют *нулями функции*.

Кривую, являющуюся графиком функции $y=ax^2$, называют *параболой*.

График функции $y=x^2+px+q$ — парабола, полученная сдвигом параболы $y=x^2$ вдоль координатных осей. На рисунке 16 изображены параболы вида $y=x^2+n$, на рисунке 17 — параболы вида $y=(x-m)^2$, а на рисунке 18 отражены этапы построения параболы $y=(x+2)^2-3$.

<u>Задача 1.</u> Построить график функции $y=x^2-3x-4$.

▷ Выделим полный квадрат в трехчлене x^2-3x-4:

$$x^2-3x-4=x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4},$$

поэтому $y=\left(x-1\frac{1}{2}\right)^2-6\frac{1}{4}$.

График функции изображен на рисунке 19. Отметим, что:

— вершина параболы — точка $A\left(1\frac{1}{2};\ -6\frac{1}{4}\right)$;

— ось симметрии — прямая, проходящая через точку A параллельно оси Oy;

— нули функции: $x_1=-1$, $x_2=4$;

— $y>0$ при $x<-1$ и $x>4$; $y<0$ при $-1<x<4$;

— $y(0)=-4$;

— наименьшее значение функции $y\left(1\frac{1}{2}\right)=-6\frac{1}{4}$. ◀

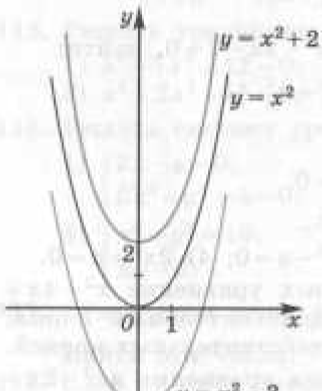


Рис. 16

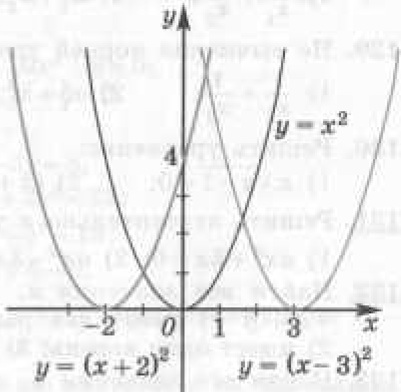


Рис. 17

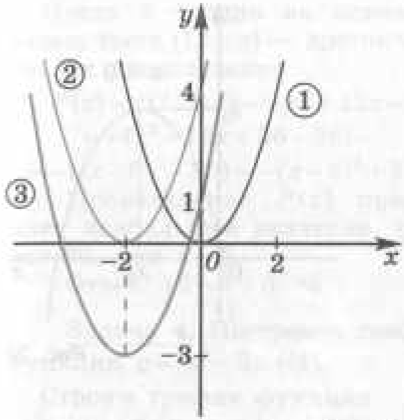


Рис. 18

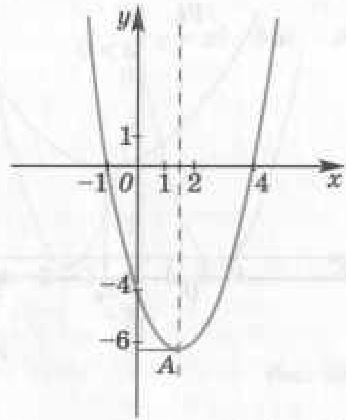


Рис. 19

Графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, полученная сдвигами параболы $y=ax^2$ вдоль координатных осей. Координаты вершины параболы можно найти методом выделения полного квадрата, а можно по формулам

$$x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=y(x_0).$$

Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх; если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз.

Задача 2. Построить график функции $y=-2x^2+3x+5$.

▷ 1) Найдем координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2\cdot(-2)}=\frac{3}{4};$$

$$y_0=y(x_0)=-2\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\frac{3}{4}+5=$$

$$=-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+5=5+\frac{9}{8}=6\frac{1}{8}.$$

2) Построим вершину параболы $\left(\frac{3}{4};\ 6\frac{1}{8}\right)$ и через нее проведем прямую, параллельную оси Oy,— ось симметрии параболы.

3) Найдем нули функции:

$$-2x^2+3x+5=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot(-2)\cdot5}}{2\cdot(-2)}=\frac{-3\pm7}{-4};$$

$$x_1=\frac{-3+7}{-4}=-1,\quad x_2=\frac{-3-7}{-4}=2\frac{1}{2}.$$

Построим точки $(-1;\ 0)$, $\left(2\frac{1}{2};\ 0\right)$.

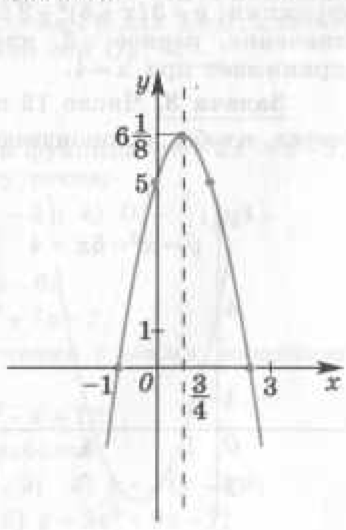


Рис. 20

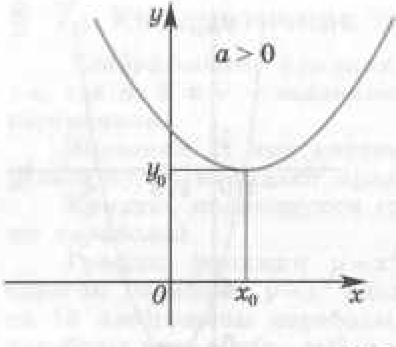


Рис. 21

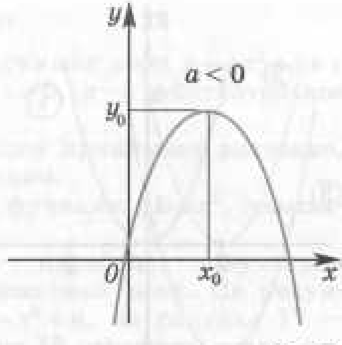


Рис. 22

4) Возьмем две точки оси Ox, симметричные относительно точки $x_0=\frac{3}{4}$, например $x=0$ и $x=1\frac{1}{2}$. Вычислим значения функции: $y(0)=y\left(1\frac{1}{2}\right)=5$. Построим точки (0; 5), $\left(1\frac{1}{2}; 5\right)$.

5) Проведем через построенные точки параболу (рис. 20). ◄

Если $a>0$, то *наименьшее значение* квадратичная функция $y=a(x-x_0)^2+y_0$ принимает при $x=x_0$. Это наименьшее значение равно y_0 (рис. 21).

Если $a<0$, то *наибольшее значение* квадратичная функция $y=a(x-x_0)^2+y_0$ принимает при $x=x_0$. Это наибольшее значение равно y_0 (рис. 22).

Например, наименьшее значение, равное -2, квадратичная функция $y=3(x+5)^2-2$ принимает при $x=-5$. Наибольшее значение, равное -3, квадратичная функция $y=-2(x-4)^2-3$ принимает при $x=4$.

Задача 3. Число 12 представить в виде суммы таких двух чисел, чтобы их произведение было наибольшим.

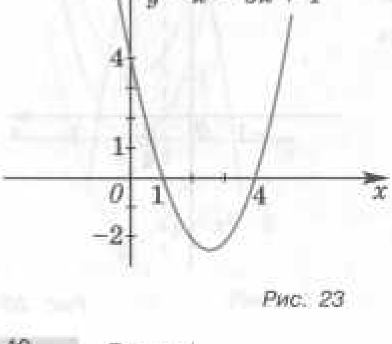


Рис. 23

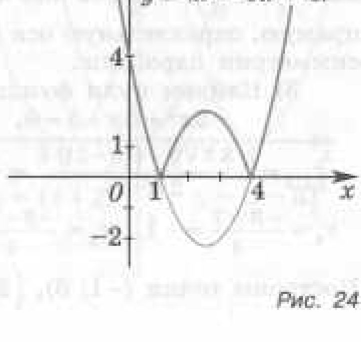


Рис. 24

▷ Пусть x — одно из искомых чисел, тогда $(12-x)$ — другое число. Их произведение

$$P(x)=x(12-x)=-x^2+12x=$$
$$=-(x^2-12x+36-36)=$$
$$=-((x-6)^2-36)=-(x-6)^2+36.$$

Произведение $P(x)$ принимает наибольшее значение, равное 36, при $x=6$.

Ответ. $12=6+6$. ◀

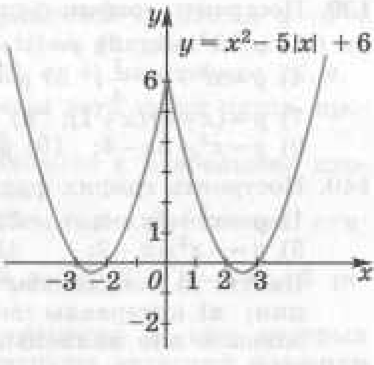


Рис. 25

<u>Задача 4.</u> Построить график функции $y=|x^2-5x+4|$.

▷ Строим график функции

$y=x^2-5x+4$ (рис. 23).

Так как $|a|=a$ при $a\geqslant 0$ и $|a|=-a$ при $a<0$, то ту часть графика функции $y=x^2-5x+4$, где она принимает отрицательные значения (т. е. на интервале $1<x<4$), нужно отразить симметрично относительно оси Ox (рис. 24). ◀

<u>Задача 5.</u> Построить график функции $y=x^2-5|x|+6$.

▷ По определению модуля имеем $y=x^2-5x+6$ при $x\geqslant 0$, $y=x^2+5x+6$ при $x<0$.

Это означает, что при $x\geqslant 0$ график заданной функции совпадает с графиком функции $y=x^2-5x+6$, а при $x<0$ — с графиком функции $y=x^2+5x+6$ (рис. 25).

Для построения графика функции $y=x^2-5|x|+6$ можно было построить график функции $y=x^2-5x+6$ для $x\geqslant 0$, а затем отразить его симметрично относительно оси Oy. ◀

Упражнения

135. Не выполняя построения графика функции $y=-2x^2+x-3$, определить, принадлежит ли ему точка:

1) $A(-1;\ 0)$; 2) $B(1;\ 4)$; 3) $C\left(\frac{1}{2};\ -3\right)$; 4) $D\left(-\frac{1}{2};\ -4\right)$.

136. Найти нули функции:

1) $y=x^2-4x+3$; 2) $y=x^2+x-6$;
3) $y=3x^2+5x-2$; 4) $y=-3x^2+7x-2$.

137. Найти координаты точек пересечения с осями координат параболы:

1) $y=2x^2+5x+3$; 2) $y=-3x^2-x+10$.

138. Найти координаты вершины параболы:

1) $y=(x-1)^2+5$; 2) $y=-(x+2)^2-3$; 3) $y=-(x+3)^2$;
4) $y=x^2-7$; 5) $y=2x^2-4x+1$; 6) $y=3x^2+6x-7$;
7) $y=-4x^2+16x-2$; 8) $y=-5x^2-20x-13$.

139. Построить график функции:

1) $y=x^2+3$; 2) $y=(x+3)^2$; 3) $y=x^2-6x+9$;
4) $y=x^2+x+\frac{1}{4}$; 5) $y=x^2+2x$; 6) $y=x^2-2x$;
7) $y=(x-3)(x+1)$; 8) $y=(x-1)(x+5)$;
9) $y=x^2+3x-4$; 10) $y=x^2-3x-4$.

140. Построить график функции:

1) $y=x^2+2x-4$; 2) $y=-x^2+4x-5$;
3) $y=-x^2-x+2$; 4) $y=x^2+4x-5$.

Найти: а) координаты вершины параболы; б) нули функции; в) интервалы знакопостоянства функции; г) наибольшее или наименьшее значение функции.

141. Найти наименьшее значение квадратичной функции:

1) $y=x^2+8$; 2) $y=2x^2-3$;
3) $y=(x+7)^2-5$; 4) $y=(x+7)^2+4$.

142. Найти наибольшее значение квадратичной функции:

1) $y=-x^2+1$; 2) $y=-3x^2-1$;
3) $y=-(x+1)^2+2$; 4) $y=-2(x-3)^2+6$.

143. Построить график функции:

1) $y=-x^2+2x$; 2) $y=-x^2-4x$; 3) $y=2x^2-4x+1$;
4) $y=2x^2+4x+1$; 5) $y=-2x^2+2x-1$; 6) $y=-2x^2+4x-1$.

144. Определить наименьшее (наибольшее) значение функции:

1) $y=-5(x+3)^2+1$; 2) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-4$;
3) $y=x^2-4x+9$; 4) $y=-x^2+6x-1$.

145. Найти значение x, при котором функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. Найти это значение функции:

1) $y=x^2-4x+1$; 2) $y=x^2+6x-3$;
3) $y=-x^2+2x+3$; 4) $y=-x^2-2x+5$;
5) $y=-2x^2+4x+1$; 6) $y=2x^2+6x-1$.

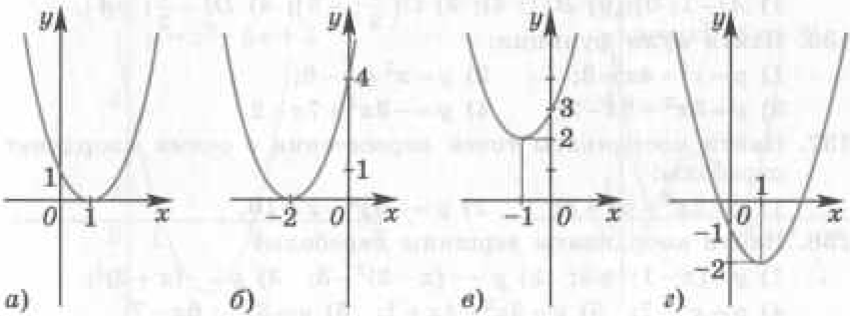


Рис. 26

146. Найти значения p и q квадратичной функции $y=x^2+px+q$, используя ее график: 1) на рисунке 26, *а*; 2) на рисунке 26, *б*; 3) на рисунке 26, *в*; 4) на рисунке 26, *г*.

147. Число 8 представить в виде суммы двух таких чисел, произведение которых наибольшее.

148. Найти длины сторон прямоугольника с наибольшей площадью, периметр которого 28 см.

149. Число 6 представить в виде суммы таких двух чисел, сумма кубов которых наибольшая.

150. С помощью графиков функций $y=x^2-2$ и $y=-2x+1$ решить неравенство $x^2-2\leqslant-2x+1$.

151. С помощью графиков найти значения x, при которых значения функции $y=2x^2-1$ меньше значений функции $y=5-x$.

152. Построить график функции:

1) $y=|x^2-1|$; 2) $y=|4-x^2|$;

3) $y=|(x-1)(x+3)|$; 4) $y=|x(x-2)|$;

5) $y=x^2-2\cdot|x|-3$; 6) $y=x^2+|x|-2$.

§ 8. Квадратные неравенства

Квадратным называется неравенство, в левой части которого стоит квадратный трехчлен, а в правой — нуль.

Задача 1. Решить неравенство

$$x^2-x-2\geqslant 0.$$

▷ Найдем точки пересечения параболы $y=x^2-x-2$ с осью Ox, для чего решим квадратное уравнение $x^2-x-2=0$. Его корни: $x_1=-1$, $x_2=2$. Изобразим схематически график функции $y=x^2-x-2$, учитывая, что $a=1>0$, т. е. ветви параболы направлены вверх (рис. 27).

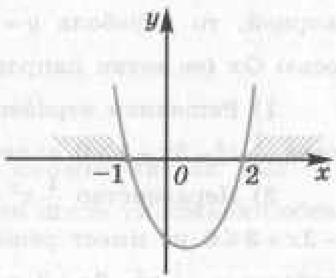


Рис. 27

Исходному неравенству удовлетворяют те значения x, при которых точки параболы лежат на оси Ox или выше этой оси.

Ответ. $x\leqslant-1$, $x\geqslant 2$. ◀

Задача 2. Решить неравенство

$$-2x^2-5x+3>0.$$

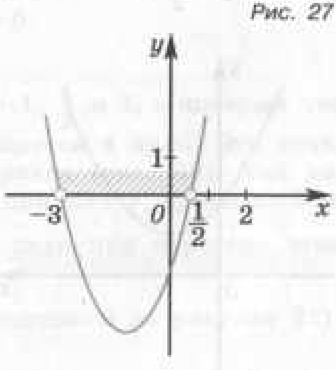


Рис. 28

▷ Умножая обе части неравенства на -1, запишем его в виде $2x^2+5x-3<0$.

Найдем корни уравнения $2x^2+5x-3=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{-5\pm 7}{4};\ x_1=-3,\ x_2=\frac{1}{2}.$$

Изобразим схематически график функции $y=2x^2+5x-3$, учитывая, что ветви параболы направлены вверх (рис. 28).

Исходному неравенству удовлетворяют те значения x, при которых точки параболы на рисунке 28 лежат ниже оси Ox.

Ответ. $-3<x<\frac{1}{2}$. ◄

<u>Задача 3.</u> Решить неравенство:

1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2-6x+9\geqslant 0$;
3) $x^2-6x+9<0$; 4) $x^2-6x+9\leqslant 0$.

▷ Так как уравнение $x^2-6x+9=0$ имеет единственный корень $x=3$, то парабола $y=x^2-6x+9$, ветви которой направлены вверх, имеет одну общую точку с осью абсцисс $x=3$.

Ответ. 1) $x<3$, $x>3$; 2) x — любое число; 3) нет решений; 4) $x=3$. ◄

<u>Задача 4.</u> Решить неравенство:

1) $\frac{1}{2}x^2-2x+3\geqslant 0$; 2) $\frac{1}{2}x^2-2x+3<0$.

▷ Так как уравнение $\frac{1}{2}x^2-2x+3=0$ не имеет действительных корней, то парабола $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$ не имеет общих точек с осью Ox (ее ветви направлены вверх).

1) Решением неравенства $\frac{1}{2}x^2-2x+3\geqslant 0$, а также неравенства $\frac{1}{2}x^2-2x+3>0$ является любое значение x (рис. 29).

2) Неравенство $\frac{1}{2}x^2-2x+3<0$, а также неравенство $\frac{1}{2}x^2-2x+3\leqslant 0$ не имеет решений (рис. 30), так как все точки параболы $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$ лежат выше оси Ox. ◄

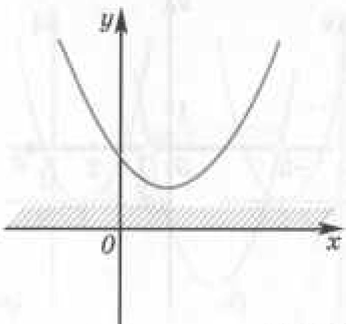


Рис. 29

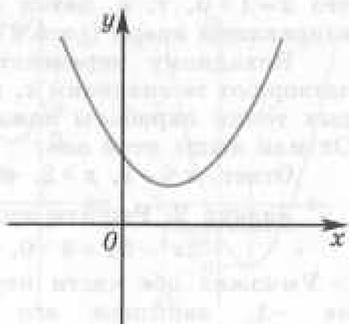


Рис. 30

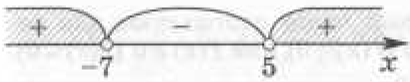


Рис. 31

Рис. 32

Метод интервалов применяют для решения неравенств, в левой части имеющих дробь, числитель и знаменатель которой являются произведениями множителей вида $x-a$, а в правой части — нуль (знаменатель дроби может быть равен 1).

Задача 5. Решить методом интервалов неравенство

$$(x-5)(x+7)>0.$$

▷ Отметим на числовой прямой точки 5 и -7 незакрашенными кружками, подчеркивая, что $x=5$ и $x=-7$ не являются решениями неравенства. Определим знаки значений выражения $(x-5)(x+7)$ на каждом из интервалов: $x<-7$, $-7<x<5$, $x>5$.

При $x>5$ оба множителя произведения $(x-5)(x+7)$ положительны, поэтому $(x-5)(x+7)>0$ на интервале $x>5$.

Учитывая смену знака произведения при переходе к соседнему (левому) интервалу, отметим для каждого интервала знаки произведения $(x-5)(x+7)$ (рис. 31).

Решениями неравенства являются все значения x из интервалов $x<-7$ и $x>5$. ◀

Задача 6. Решить неравенство

$$\frac{(x-3)^2}{3x^2+2x-1}>0.$$

▷ Разложим знаменатель дроби на множители: $3x^2+2x-1=3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)$. Исходное неравенство после умножения обеих его частей на 3 запишется в виде

$$\frac{(x-3)^2}{(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}>0.$$

Отметим на числовой оси точки -1, $\frac{1}{3}$ и 3, в которых числитель или знаменатель дроби обращается в нуль. Эти точки разбивают числовую ось на 4 интервала (рис. 32). Так как числитель дроби $(x-3)^2$ положителен при всех x, кроме $x=3$, то значение дроби $\frac{(x-3)^2}{(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}$ меняет знак при переходе через точки -1 и $\frac{1}{3}$ (знаки в интервалах показаны на рисунке 32).

Ответ. $x<-1$, $\frac{1}{3}<x<3$, $x>3$. ◀

Метод интервалов, который часто используют для решения неравенств вида $f(x)>0$ ($f(x)<0$) или $f(x)\geqslant 0$ ($f(x)\leqslant 0$), где $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, а $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, не имеющие общих множителей, состоит в следующем:

1. Решаются уравнения $P(x)=0$ и $Q(x)=0$.
2. Отмечаются найденные корни (если они имеются) на числовой оси, учитывая, что в точках, где $Q(x)=0$, функция $f(x)$ не определена.
3. Определяется знак $f(x)$ на правом крайнем промежутке и расставляются знаки функции (при движении вдоль числовой оси справа налево) на всех образовавшихся промежутках, учитывая следующий факт: если в разложении на множители многочлена $P(x)$ (или $Q(x)$) содержится множитель вида $x-a$ или $(x-a)^{2k+1}$, $k\in N$, то функция $f(x)$ меняет знак при переходе через точку a; а если в разложении содержится множитель вида $(x-a)^{2k}$, $k\in N$, то $f(x)$ не меняет знак при переходе через точку a.
4. Учитывая знак исходного неравенства, записывается ответ.

Задача 7. Решить методом интервалов неравенство

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}<0.$$

▷ Пусть $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $Q(x)=$ $=x^3+2x^2+x=x(x+1)^2$. Функция $f(x)$ не определена при $x=0$ и $x=-1$; меняет знак при переходе через точки 0; 1; 2 и не меняет знак при переходе через точку -1. Отметим на числовой оси точки -1; 0; 1; 2, замечая, что $f(x)>0$ при $x>2$. Остается расставить знаки $f(x)$ на промежутках, выделенных на рисунке 33.

Рис. 33

Ответ. $x<-1$; $-1<x<0$, $1<x<2$. ◀

Упражнения

Решить неравенство (153—155):

153. 1) $x^2-2x-8\leqslant 0$; 2) $x^2-2x-8>0$; 3) $x^2+6x+9\geqslant 0$;
4) $x^2+6x+9>0$; 5) $x^2+6x+9<0$; 6) $x^2+3x+3<0$.

154. 1) $x^2-12x+36<0$; 2) $x^2+x+\frac{1}{4}\leqslant 0$; 3) $-x^2+3x-4\geqslant 0$;
4) $-x^2-5x-7<0$; 5) $0{,}5x^2+x-4<0$; 6) $-2x^2-5x+3<0$.

155. 1) $x^2\geqslant 25$; 2) $x^2<9$; 3) $2x^2\leqslant x$;
4) $\frac{2}{3}x^2\geqslant 2x$; 5) $x^2+\frac{1}{4}>x$; 6) $-3x^2\geqslant 2x+1$.

156. Методом интервалов решить неравенство:
1) $(x+5)(x+2)>0$; 2) $(x+1)(x-4)\leqslant 0$;

3) $\frac{x-7}{x+8} \leqslant 0$; 4) $\frac{x+6}{x-10} \geqslant 0$; 5) $(x-1)x(x+3) \leqslant 0$;

6) $x(x+2)(x-3) > 0$; 7) $\frac{2x^2-x}{x+1} > 0$; 8) $\frac{3x^2+x}{x-2} \leqslant 0$.

157. Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{5x^2+9x-2}$; 2) $\sqrt{-3x^2+x+4}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x-1}}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{x^2+6x+9}}$.

158. Методом интервалов решить неравенство:

1) $\frac{x^2-6x+8}{x^2+2x-3} \leqslant 0$; 2) $\frac{x^2+x-6}{x^2+x+1} \geqslant 0$;

3) $\frac{(x+2)^2}{(x-1)(x+5)} \geqslant 0$; 4) $\frac{(x+3)^2(x+1)}{x-4} \leqslant 0$;

5) $\frac{(x-4)^2(x+2)}{(x-5)^3} \leqslant 0$; 6) $\frac{(x+7)^3(x-2)}{x+3} \geqslant 0$.

159. Решить неравенство:

1) $\frac{(x-4)\sqrt{x+5}}{x+2} > 0$; 2) $\frac{(x-2)\sqrt{x+5}}{(x-3)\sqrt{x+3}} \geqslant 0$;

3) $(x+1)(x-2)\sqrt{(3-x)(x+2)} > 0$.

§ 9. Свойства и графики функций

Областью определения функции называют множество всех значений, которые может принимать ее аргумент.

Например: 1) областью определения квадратичной функции $y=2x^2+3x-5$ является множество всех действительных чисел; 2) область определения функции $y=\frac{5x}{x-2}$ — множество всех действительных чисел, кроме $x=2$ (при $x=2$ дробь $\frac{5x}{x-2}$ не имеет смысла); 3) функция $y=f(x)$, заданная графически (рис. 34), определена при $-4 \leqslant x < -2$, $-2 < x < 1$, $3 \leqslant x \leqslant 6$.

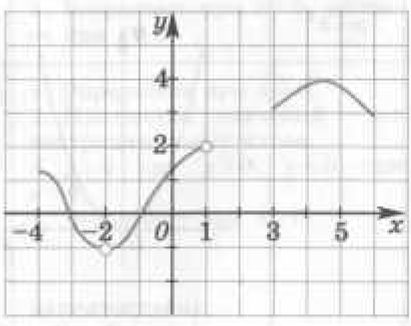


Рис. 34

Задача 1. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{5x}{x-2}}.$$

▷ Корень квадратный имеет смысл, когда подкоренное выражение неотрицательно, поэтому, решая неравенство $\frac{5x}{x-2} \geqslant 0$, находим область определения функции: $x>2$ и $x \leqslant 0$. ◀

Функцию называют *возрастающей*, если большему значению ее аргумента соответствует большее значение функции.

Функцию называют *убывающей*, если большему значению ее аргумента соответствует меньшее значение функции.

Задача 2. Показать, что функция $y=x^2$: 1) убывает на промежутке $x \leqslant 0$; 2) возрастает на промежутке $x \geqslant 0$.

▷ 1) Пусть $x_1 < x_2 \leqslant 0$. Нужно показать, что $y(x_1)-y(x_2)>0$:

$$y(x_1)-y(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0,$$

так как $x_1-x_2<0$ и $x_1+x_2<0$. Таким образом, $y(x_1)>y(x_2)$, что означает, что функция $y=x^2$ на промежутке $x \leqslant 0$ убывает.

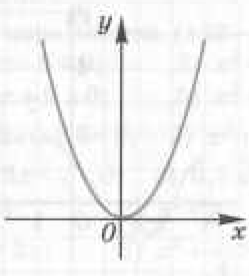
2) Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Так как $x_1-x_2<0$, а $x_1+x_2>0$, то $y(x_1)-y(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0$, т. е. $y(x_1)<y(x_2)$, и, значит, функция $y(x)$ возрастает на промежутке $x \geqslant 0$. ◀

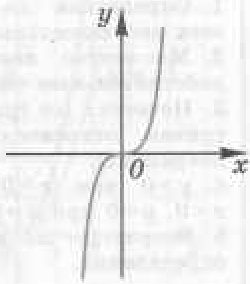
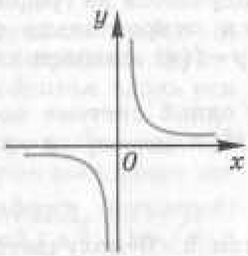
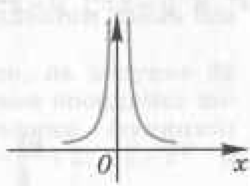
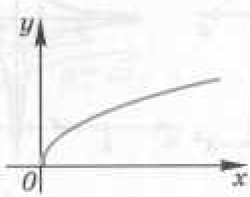
Функцию $y(x)$ называют *четной*, если $y(-x)=y(x)$ для любого x из области определения этой функции.

Например, функции $y=x^6$ и $y=\frac{1}{x^4}$ — четные, так как $(-x)^6=x^6$ для любого x и $\frac{1}{(-x)^4}=\frac{1}{x^4}$ для любого $x \neq 0$.

Функцию $y(x)$ называют *нечетной*, если $y(-x)=-y(x)$ для любого x из области определения этой функции.

Например, функции $y=x^5$ и $y=\frac{1}{x^3}$ — нечетные, так как $(-x)^5=-x^5$ для любого x и $\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}$ для любого $x \neq 0$.

Функция	График	Свойства
$y=x^2$	 (квадратичная парабола)	1. Область определения — множество всех действительных чисел. 2. Множество значений — множество всех неотрицательных чисел ($y \geqslant 0$). 3. Четная (ее график симметричен относительно оси ординат). 4. $y>0$ при $x \neq 0$, $y=0$ при $x=0$. 5. Убывает при $x \leqslant 0$, возрастает при $x \geqslant 0$.

Функция	График	Свойства
$y=x^3$	 (кубическая парабола)	1. Область определения — множество всех действительных чисел. 2. Множество значений — множество всех действительных чисел. 3. Нечетная (ее график симметричен относительно начала координат). 4. $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$, $y=0$ при $x=0$. 5. Возрастает на всей области определения.
$y=\frac{1}{x}$	 (гипербола)	1. Определена при $x\neq 0$. 2. Множество значений — все действительные числа, кроме $y=0$. 3. Нечетная (ее график симметричен относительно начала координат). 4. $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$. 5. Убывает при $x<0$ и при $x>0$.
$y=\frac{1}{x^2}$		1. Определена при $x\neq 0$. 2. Множество значений — все положительные числа. 3. Четная (ее график симметричен относительно оси ординат). 4. $y>0$ при $x<0$ и при $x>0$. 5. Возрастает при $x<0$, убывает при $x>0$.
$y=\sqrt{x}$		1. Определена при $x\geq 0$. 2. Множество значений — все неотрицательные числа. 3. $y>0$ при $x>0$, $y=0$ при $x=0$. 4. Возрастает при $x\geq 0$.

Продолжение

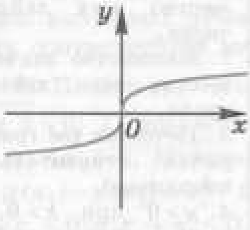
Функция	График	Свойства
$y=\sqrt[3]{x}$		1. Определена на множестве всех действительных чисел. 2. Множество значений — все действительные числа. 3. Нечетная (ее график симметричен относительно начала координат). 4. $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$, $y=0$ при $x=0$. 5. Возрастает на всей области определения.

График функции $y=-f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ ***зеркальным отражением*** относительно оси абсцисс (графики функций $y=-f(x)$ и $y=f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс).

Например, на рисунке 35 в одной системе координат построены графики функций: $y=x^2$ и $y=-x^2$; $y=x^3$ и $y=-x^3$; $y=\frac{1}{x}$ и $y=-\frac{1}{x}$.

График функции $y=kf(x)$ при $k>0$ получается *сжатием* (*растяжением*) графика функции $y=f(x)$ вдоль оси ординат.

Например, на рисунке 36 в одной системе координат построены графики функций: $y=x^2$ и $y=2x^2$; $y=x^2$ и $y=\frac{1}{2}x^2$; $y=-\sqrt{x}$ и $y=-3\sqrt{x}$.

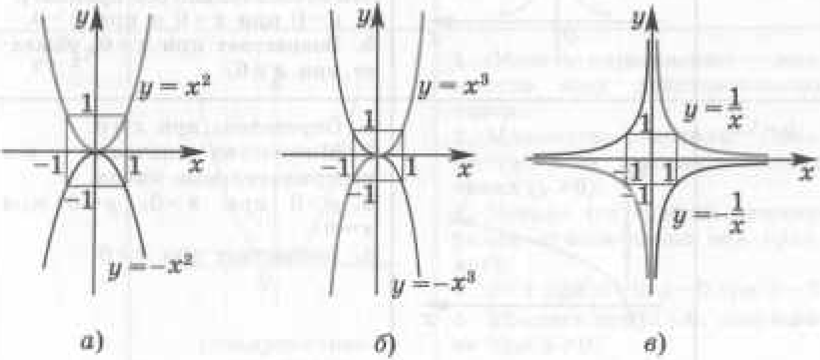
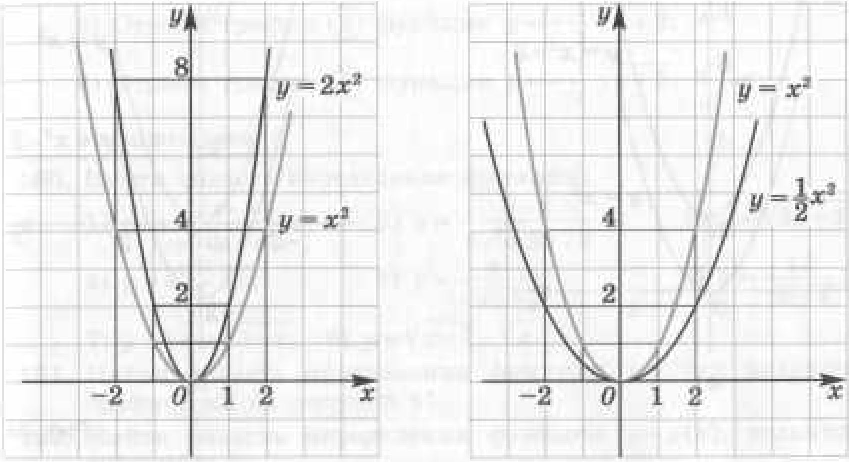


Рис. 35



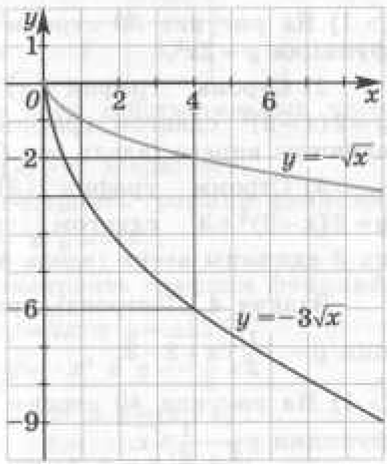
а) *б)*

График функции $y=f(x+a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ *сдвигом* вдоль оси абсцисс.

Например, на рисунке 37 в одной системе координат построены графики функций: $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{x+2}$; $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{x-2}$.

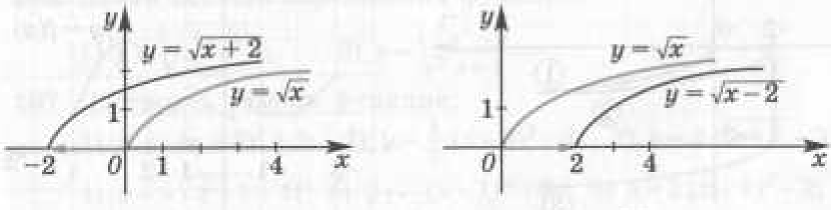
График функции $y=f(x)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом вдоль оси ординат.

Например, на рисунке 38 в одной системе координат построены графики функций: $y=x^2$ и $y=x^2+2$; $y=x^2$ и $y=x^2-2$.



в)

Рис. 36



а) *б)*

Рис. 37

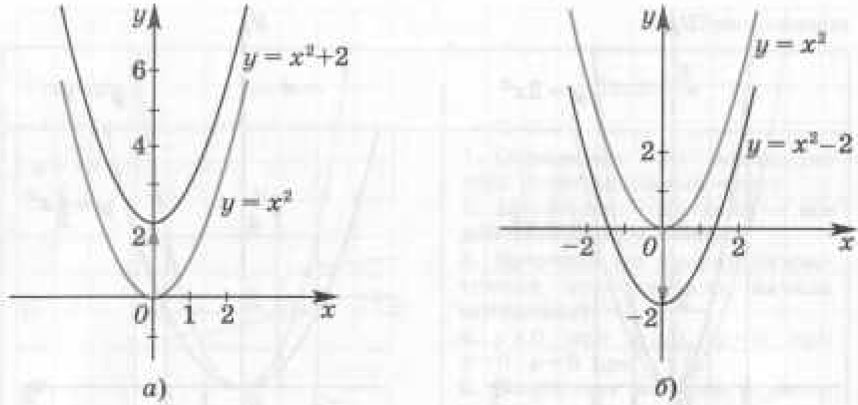


Рис. 38

Задача 3. Построить график функции $y=2(x-2)^2+3$.

▷ 1) На рисунке 39 строим график ① функции $y=2x^2$.

2) Строим график ② функции $y=2(x-2)^2$ сдвигом графика ① на 2 единицы вправо (вдоль оси Ox).

3) Строим график ③ функции $y=2(x-2)^2+3$ сдвигом графика ② на 3 единицы вверх (вдоль оси Oy). ◀

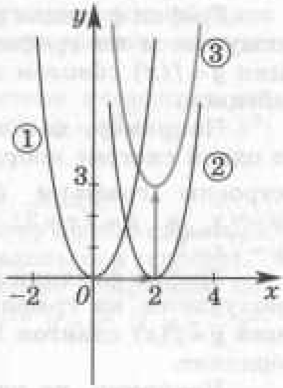


Рис. 39

Задача 4. Построить график функции $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x+2}-3$.

▷ 1) На рисунке 40 строим график ① функции $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

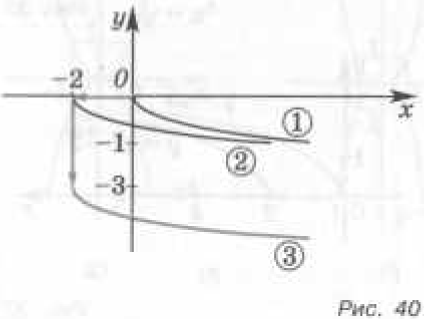


Рис. 40

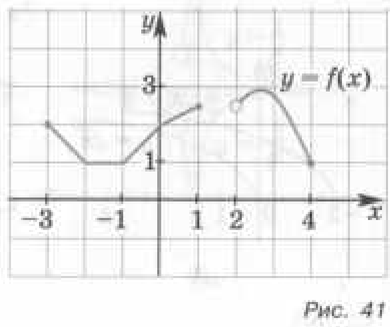


Рис. 41

2) Строим график ② функции $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x+2}$.

3) Строим график ③ функции $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x+2}-3$. ◀

Упражнения

160. Найти область определения функции:

1) $y=\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$; 2) $y=\frac{5-x}{2x^2+3x-2}$; 3) $y=\sqrt{3x+1}$;

4) $y=\sqrt{7-3x}$; 5) $y=\frac{3}{\sqrt{x-5}}$; 6) $y=\frac{12}{\sqrt{8+x}}$;

7) $y=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}$; 8) $y=\sqrt{x-7}-\sqrt{x}$.

161. Найти область определения функции $y=f(x)$, заданной графически на рисунке 41.

162. Найти область определения функции $y=y(x)$, заданной таблицей:

x	-7	-3	$\frac{1}{4}$	7	25
$y(x)$	-8	-1	0	2	17

163. Доказать, что на множестве всех действительных чисел функция:

1) $y=-3x+1$ убывает; 2) $y(x)=x^3$ возрастает.

164. В одной системе координат построить графики функций:

1) $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$ и $y=-\frac{1}{x^2}$.

165. В одной системе координат построить графики функций:

1) $y=2x$ и $y=-2x$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=-\sqrt[3]{x}$;

3) $y=-x^2$ и $y=-3x^2$; 4) $y=-x^2$ и $y=-\frac{1}{3}x^2$;

5) $y=x^2$ и $y=(x-1)^2$; 6) $y=x^3$ и $y=(x+1)^3$;

7) $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=\sqrt[3]{x-2}$; 8) $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=\sqrt[3]{x+3}$;

9) $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{x}+3$; 10) $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{x}-3$;

11) $y=x^3$ и $y=x^3-2$; 12) $y=x^3$ и $y=x^3+2$.

166. Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt[3]{\frac{5x-3}{x-4}}$; 2) $y=\sqrt{\frac{x^2-5}{x+1}}$.

167. Построить график функции:

1) $y=-(x+3)^2+2$; 2) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$; 3) $y=2\sqrt{x+4}-3$;

4) $y=-\sqrt{x-3}+4$; 5) $y=-(x-1)^3+2$; 6) $y=2(x+3)^3-2$;

7) $y=\frac{2}{x-1}+3$; 8) $y=\frac{3}{(x+1)^2}-1$.

168. Решить графически уравнение:

1) $2x+1=\frac{1}{x}$; 2) $1-x=-\frac{2}{x}$; 3) $x^2+2=\frac{3}{x}$; 4) $\sqrt{x+1}=x^2-1$.

169. Построить график функции:

1) $y=\begin{cases} x, \text{ если } x<0, \\ x^3, \text{ если } x\geqslant 0; \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} -x, \text{ если } x<0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x\geqslant 0. \end{cases}$

§ 10. Прогрессии и сложные проценты

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

Задача 1. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n=n+\frac{n(n+1)}{2}$. Найти шестой член этой последовательности.

▷ $a_6=6+\frac{6(6+1)}{2}=6+21=27$. ◀

Задача 2. Найти третий член последовательности, заданной *рекуррентной формулой* $a_{n+1}=-2a_n+3$ и условием $a_1=-7$.

▷ $a_2=-2a_1+3=-2\cdot(-7)+3=17$; $a_3=-2a_2+3=-31$. ◀

Арифметическая прогрессия — это числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (называемым разностью арифметической прогрессии), т. е. $a_{n+1}=a_n+d$.

Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, первый член которой $b_1\neq 0$, а каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же, отличное от нуля число q (называемое знаменателем геометрической прогрессии), т. е. $b_{n+1}=b_n\cdot q$, где $b_1\neq 0$, $q\neq 0$.

Формула общего члена	$a_n=a_1+(n-1)d$	$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$
Характеристическое свойство	$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, $n>1$	$b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, $n>1$
Сумма n первых членов	$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$; $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$	$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q\neq 1$; $S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}$, $q\neq 1$

Задача 3. Найти четвертый член арифметической прогрессии, если $a_1 = -8$, $d = -\frac{1}{2}$.

▷ По формуле общего члена арифметической прогрессии $a_4 = a_1 + 3d = -8 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -9\frac{1}{2}$. ◀

Задача 4. Найти девятый и первый члены арифметической прогрессии, если $a_8 = 16$, $a_{10} = 26$.

▷ $a_9 = \frac{a_8 + a_{10}}{2} = \frac{16 + 26}{2} = 21$; $d = a_9 - a_8 = 21 - 16 = 5$, $a_8 = a_1 + 7d$, откуда $a_1 = a_8 - 7d = 16 - 7 \cdot 5 = 16 - 35 = -19$. ◀

Задача 5. Найти пятый и первый члены геометрической прогрессии с положительными членами, если $b_4 = 54$, $b_6 = 486$.

▷ $b_5 = \sqrt{b_4 \cdot b_6} = \sqrt{54 \cdot 486} = \sqrt{54 \cdot 54 \cdot 9} = 54 \cdot 3 = 162$; $q = b_5 : b_4 = 162 : 54 = 3$; $b_4 = b_1 \cdot q^3$, откуда $b_1 = b_4 : q^3 = 54 : 3^3 = 54 : 27 = 2$. ◀

Задача 6. Найти сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если $a_1 = -5$, $d = 6$.

▷ $S_{10} = \frac{2a_1 + (10-1)d}{2} \cdot 10 = \frac{2 \cdot (-5) + 9 \cdot 6}{2} \cdot 10 = (-10 + 54) \cdot 5 = 220$. ◀

Задача 7. Найти сумму первых семи членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 4$, $a_7 = 42$.

▷ $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{4 + 42}{2} \cdot 7 = 23 \cdot 7 = 161$. ◀

Задача 8. Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если $b_1 = -16$, $b_6 = -\frac{1}{2}$.

▷ $b_6 = b_1 \cdot q^5$, откуда $q^5 = \frac{b_6}{b_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-16} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ и $q = \frac{1}{2}$;

$$S_6 = \frac{b_6 q - b_1}{q - 1} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - (-16)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{1}{4} + 16}{-\frac{1}{2}} = \frac{15\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{63}{2} = -31\frac{1}{2}. \text{ ◀}$$

Задача 9. Вкладчик поместил в банк a рублей под ежегодные $p\%$. Какую сумму он получит через 3 года?

▷ Через год на вкладе будет $a + a \cdot \frac{p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей. Через 2 года сумма вклада увеличится еще на $p\%$, но уже от суммы, которая оказалась на счету через год, и станет равной $a\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \left(a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\right)\frac{p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$.

Через 3 года на счету будет $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+\left(a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\right)\cdot\frac{p}{100}=$
$=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\left(1+\frac{p}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ рублей. ◀

Формулу общего члена геометрической прогрессии, записанную в виде $b=b_1\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, называют *формулой сложных процентов*.

Задача 10. Банк начислил по вкладам 4% годовых от суммы вклада. Вычислить, сколько денег получит вкладчик через 5 лет, если он положил на счет 10 000 рублей.

▷ Нужную сумму денег b найдем по формуле сложных процентов при $b_1=10\,000$ р., $p=4$, $n=5$:
$b=10\,000(1+0{,}04)^5=10\,000\cdot1{,}04^5\approx12166{,}529$, т. е. 12166 р. 53 к. ◀

Упражнения

170. Последовательность задана формулой $a_n=n^2+1$. Найти a_5, a_7. Выяснить, являются ли числа 122; 92 членами этой последовательности.

171. Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $x_{n+1}=3x_n+2$ и условием $x_1=\frac{1}{9}$. Записать первые четыре члена этой последовательности.

172. Найти первые пять членов:
1) арифметической прогрессии, у которой $a_1=0{,}1$, $d=-0{,}2$;
2) геометрической прогрессии, у которой $b_1=0{,}1$, $q=-0{,}2$.

173. Дана арифметическая прогрессия a_1, a_2, a_3, ... Найти:
1) a_8, если $a_1=-3$, $d=5$;
2) a_{15}, если $a_1=4$, $d=-0{,}5$.

174. Дана геометрическая прогрессия b_1, b_2, b_3, ... Найти:
1) b_6, если $b_1=100$, $q=-0{,}1$;
2) b_{50}, если $b_1=-27$, $q=-1$.

175. Найти разность арифметической прогрессии, если:
1) $a_1=15$, $a_8=-6$; 2) $a_1=-3$, $a_{11}=2$.

176. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если:
1) $b_1=-\frac{1}{32}$, $b_4=\frac{1}{4}$; 2) $b_1=-50$, $b_5=-0{,}08$.

177. Разность арифметической прогрессии равна $-2{,}5$. Найти a_1, если $a_{12}=14{,}5$.

178. Знаменатель геометрической прогрессии равен 0,4. Найти b_1, если $b_5=3{,}2$.

179. Найти двенадцатый и первый члены арифметической прогрессии, если:
1) $a_{11}=13$, $a_{13}=7$; 2) $a_{11}=-14$, $a_{13}=-6$.

180. Найти пятый и первый члены геометрической прогрессии с положительными членами, если:

1) $b_4=\frac{1}{27}$, $b_6=\frac{1}{3}$; 2) $b_4=36$, $b_6=9$.

181. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии:

1) 5, 9, 13, ..., если $n=14$; 2) 2, −3, −8, ..., если $n=12$.

182. Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии:

1) −16, −4, −1, ..., если $n=5$;

2) $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ..., если $n=6$.

183. Найти a_1 и d арифметической прогрессии, если:

1) $a_6=20$, $S_6=102$; 2) $a_7=9$, $S_7=98$.

184. Найти b_1 геометрической прогрессии, если:

1) $q=\frac{1}{2}$, $S_6=-15\frac{3}{4}$; 2) $q=-\frac{1}{2}$, $S_5=4\frac{1}{8}$.

185. Найти число n членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1=5$, $q=-2$, $S_n=-215$;

2) $b_1=-6$, $q=2$, $S_n=378$.

186. В арифметической прогрессии $a_1=-10$, $d=0{,}2$. При каких n выполняется неравенство $a_n<2$?

187. Найти сумму первых шести членов арифметической прогрессии, если $a_6=-10$, $a_{16}=-6$.

188. Найти сумму членов арифметической прогрессии с пятнадцатого члена по двадцать пятый включительно, если $a_n=2n+3$.

189. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если $b_n=-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

190. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если сумма первого и четвертого членов равна 27, а сумма второго и третьего членов равна 18.

191. Три различных числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа x, $2y$, $3z$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

192. Три числа, сумма которых равна 78, образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Эти же три числа являются первым, третьим и девятым членами некоторой арифметической прогрессии. Найти большее из этих чисел.

193. Клиент коммерческого банка положил на 4 года под 8% годовых 200 000 рублей. Какую сумму он получит по истечении указанного срока?

194. Популяция некоторого микроба увеличивается ежедневно на 20%. Какое количество микробов станет в исследуемой колонии через неделю, если изначально их там было 10^6?

§ 11. Начала статистики

Статистика занимается сбором, представлением (наглядным представлением в виде таблиц, диаграмм, графиков) и анализом информации о количественных характеристиках событий, явлений и совокупностей объектов.

Однотипные объекты можно сравнивать по различным параметрам. Например: российские монеты можно сравнивать по номиналу, весу, диаметру; юношей одного класса можно сравнивать по возрасту, весу, росту и т. д. Каждый из названных параметров (каждая из величин) может принимать некоторые числовые значения.

В статистике исследуют совокупности числовых значений конкретных величин. При этом всю совокупность данных называют *генеральной совокупностью*, а любую выбранную из нее часть — *выборкой*.

Выборка называется *репрезентативной* (от англ. representative — представительный), если имеющиеся в ней данные находятся примерно в тех же пропорциях, что и в генеральной совокупности.

Совокупность данных иногда можно охарактеризовать одним числом — *мерой центральной тенденции* ее элементов. К таким характеристикам относятся мода, медиана и среднее.

Мода — это наиболее часто встречающееся в выборке значение. Например, мода выборки 5, 13, 7, 5, 14, 5, 7 равна 5, а выборка 7, 5, 13, 7, 5, 14 имеет две моды: 5 и 7.

Медиана: 1) значение серединного члена последовательности данных выборки, расположенных в порядке возрастания (или убывания) их значений, если количество элементов выборки — нечетное число; 2) среднее арифметическое значений двух соседних серединных членов последовательности данных выборки, расположенных в порядке возрастания (или убывания) их значений, если количество элементов выборки — четное число. Например: 1) медиана выборки 1, 1, 3, 7, 9, 12, 15 равна 7; 2) медиана выборки 1, 1, 3, 7, 12, 15 равна 5.

Среднее — это среднее арифметическое значений всех данных выборки. Например, средним выборки 7, 12, 8, 11, 3, 13 является число $\frac{7+12+8+11+3+13}{6}=9$.

Размах вариации — это мера изменчивости, равная разности между наибольшим и наименьшим значениями данных в выборке. Например, размах выборки 36, 2, 57, 13, 24, 38, 105, 57 равен $105-2=103$.

Относительная частота события A в данной серии однотипных испытаний (обозначается $W(A)$) — это отношение числа испытаний M, в которых событие A произошло, к числу всех проведенных испытаний N, т. е. $W(A)=\frac{M}{N}$.

Под *статистической вероятностью* $P(A)$ понимают число, около которого колеблется относительная частота события A при большом числе испытаний.

Задача 1. Жильцы некоторого дома (представляющие собой репрезентативную выборку из генеральной совокупности — жителей некоторого района) участвовали во Всероссийской переписи населения. Обследованные люди (их количество $N=160$) распределились по десяти возрастным подгруппам так:

Возрастная подгруппа	0—10 лет	11—20 лет	21—30 лет	31—40 лет	41—50 лет	51—60 лет	61—70 лет	71—80 лет	81—90 лет	91—100 лет
Номер подгруппы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество людей (частота M в подгруппе)	10	17	20	34	30	19	14	10	5	1

С помощью таблицы:

1) убедиться в том, что сумма частот ΣM совпадает с объемом выборки N; 2) найти относительную частоту W людей возраста от 31 года до 40 лет в представленной выборке; 3) построить полигон частот представленных данных.

▷ 1) $\Sigma M = 10+17+20+34+30+19+14+10+5+1=160=N$;

2) $W=\frac{M}{N}=\frac{34}{160}\approx 0{,}22=22\%$; 3) полигон частот данных таблицы изображен на рисунке 42. ◀

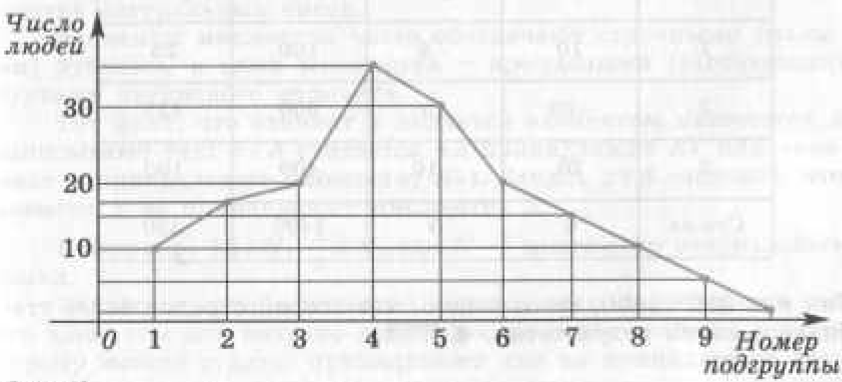


Рис. 42

Отклонение от среднего — разность между значениями элемента выборки и среднего.

Центральную тенденцию выборки часто оценивают с помощью *суммы квадратов* всех *отклонений элементов выборки от среднего.*

Задача 2. Два стрелка сделали по 3 серии выстрелов по мишеням (в серии 10 выстрелов). Результаты стрельбы представлены в таблице:

Номер серии	Результат 1-го стрелка (очки), n_1	Результат 2-го стрелка (очки), n_2
1	960	945
2	920	965
3	970	940

Суммарно каждый из них набрал 2850 очков. Выяснить, кто из этих стрелков более стабилен в своих результатах.

▷ Среднее значение результатов стрельбы каждого из претендентов одно и то же:

$$\bar{n}=\frac{2850}{3}=950.$$

Найдем сумму квадратов отклонений от среднего для каждого из стрелков и внесем их в таблицу:

Номер серии	Отклонение от $\bar{n}$		Квадрат отклонения от $\bar{n}$	
	$n_1-\bar{n}$	$n_2-\bar{n}$	$(n_1-\bar{n})^2$	$(n_2-\bar{n})^2$
1	10	−5	100	25
2	−30	15	900	225
3	20	−10	400	100
Сумма	0	0	1400	350

Так как $350<1400$, то очевидно, что второй стрелок более стабилен в своих результатах. ◀

Упражнения

195. Найти моду выборки 25, 40, 25, 40, 31, 40.

196. Найти медиану выборки, предварительно упорядочив ее:
1) 13, 21, 6, 4, 11; 2) 1, 12, 8, 3, 10, 2.

197. Найти среднее значение выборки 1, 3, 6, 1, 5, 4, 8, 3.

198. Найти размах выборки 0,8, 0,2, 1,3, 0,9, 1,1, 1,5.

199. 1) Найти относительную частоту события A — появления орла в серии испытаний, состоящей из 500 подбрасываний монеты, в которой орел появился 254 раза.

2) Найти относительную частоту события A — выпадения трех очков в серии испытаний, состоящей из 1000 бросаний игрального кубика, в которой три очка появились 164 раза.

200. Найти моду, медиану, среднее и размах выборки, значения элементов которой представлены в частотной таблице:

Значение X	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота M	1	3	4	7	6	5	2	1

§ 12. Множества

1. Множество и его элементы. Подмножества

Понятие *множества* в математике относится к неопределяемым (подобно, например, понятиям числа и точки). Вместо определения приводятся примеры различных множеств:

1) множество жителей города; 2) множество точек плоскости; 3) множество натуральных чисел и т. д.

Предметы или понятия, из которых состоит множество, называют его элементами. Например, число 5 — элемент множества натуральных чисел.

Элементы множества часто обозначают строчными (малыми) буквами, а сами множества — прописными (заглавными) буквами латинского алфавита.

Тот факт, что элемент x является элементом множества A записывают так: $x \in A$ (читается «x принадлежит A» или «элемент x принадлежит множеству A»). Запись $x \notin A$ означает, что элемент x не принадлежит множеству A.

Например: $12 \in N$, $\frac{2}{3} \notin N$, где N — множество натуральных чисел.

Считается, что множество задано, если перечислены все его элементы или названо характеристическое свойство, по которому можно судить, принадлежит или не принадлежит данный элемент рассматриваемому множеству.

Перечисляемые элементы множества принято записывать в фигурных скобках. Например, $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ — множество, состоящее из первых пяти натуральных чисел. Это же множество (обозначим его M) можно записать, сформулировав его характеристическое свойство, например, следующим образом:

$$M=\{x: x\in N,\ 1\leqslant x\leqslant 5\}. \qquad (1)$$

В этой записи зафиксировано, что множество M состоит из элементов x, обладающих перечисленными после двоеточия свойствами (двоеточие заменяет слова «таких, что»). Запись (1) читается так: «Множество M состоит из элементов x, таких, что каждый из них является натуральным числом и удовлетворяет неравенству $1\leqslant x\leqslant 5$».

Задача 1. Перечислить элементы множества A, заданного характеристическим свойством, если $A=\{x: x\in N,\ 2x^2-7x+3=0\}$.

▷ Элементы множества A — это натуральные корни уравнения $2x^2-7x+3=0$. Среди корней уравнения $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=3$ только $x_2\in N$.

Ответ. $\{3\}$. ◀

Если бы в задаче 1 уравнение не имело ни одного натурального корня, то в ответе следовало бы указать так называемое *пустое множество* (не содержащее ни одного элемента). Пустое множество обозначается знаком $\varnothing$.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называют *равными*. Если множества A и B равны, то записывают $A=B$. Например, если $A=\{2;\ 0;\ 3\}$, $B=\{3;\ 2;\ 0\}$, то очевидно, что $A=B$.

Если каждый элемент множества B является и элементом множества A, то множество B называют *подмножеством* (частью) множества A и записывают $B\subset A$ или $A\supset B$. Такая запись читается как «(множество) B содержится в (множестве) A» или «A содержит B». Например, подмножествами множества $\{a;\ b;\ c\}$ являются следующие 8 множеств: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{b,\ c\}$, $\{a,\ b,\ c\}$, $\varnothing$.

Очевидно, что любое множество является своим подмножеством, а пустое множество считают подмножеством любого другого множества.

2. Разность множеств. Дополнение до множества

Пусть имеются два множества A и B. Их элементы на рисунке 43 условно изображены частями плоскости, находящимися внутри замкнутых линий и называемыми *кругами Эйлера*. Множество C, элементами которого являются все элементы множества A, не принадлежащие множеству B, называют *разностью* множеств A и B и записывают $C=A\setminus B$ (на рисунке множество C закрашено).

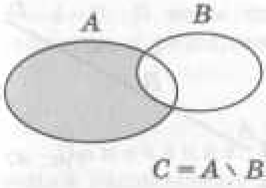


Рис. 43

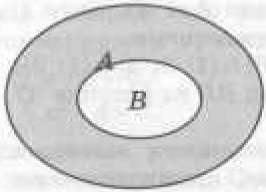


Рис. 44

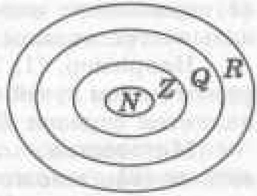


Рис. 45

Примеры.

1) Если $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, b\}$, то $A\setminus B=\{c\}$.

2) Если $A=\{a, b, c\}$, $B=\{c, d\}$, то $A\setminus B=\{a, b\}$.

3) Если $A=\{a, b\}$, $B=\{c\}$, то $A\setminus B=\{a, b\}$.

4) Если $A=\{a, b\}$, $B=\{a, b, c\}$, то $A\setminus B=\varnothing$.

Если $B\subset A$, то разность $A\setminus B$ называют *дополнением* множества B до множества A (на рисунке 44 дополнение закрашено).

3. Числовые множества

Школьный курс математики начинается с изучения множества *натуральных чисел*, т. е. чисел счета 1, 2, 3, 4, 5, ... Дополняя множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ нулем и отрицательными числами, получаем *множество целых чисел* $\boldsymbol{Z}$, т. е. числа $0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Дополняя множество целых чисел обыкновенными дробями, получаем *множество рациональных чисел* $\boldsymbol{Q}$, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число. Очевидно, что при этом любое целое число является рациональным, так как может быть представлено в виде $\frac{m}{1}$. Напомним, что любое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Дополняя множество рациональных чисел иррациональными числами (бесконечными непериодическими десятичными дробями), получаем *множество* всех *действительных чисел* $\boldsymbol{R}$.

Описанный выше процесс расширения понятия числа с помощью кругов Эйлера изображен на рисунке 45.

Используя символику теории множеств, можно, например, сказать, что множество $C=\boldsymbol{Z}\setminus\boldsymbol{N}$ есть дополнение множества натуральных чисел до множества целых чисел, т. е. является множеством чисел $0, -1, -2, -3, \ldots$.

4. Пересечение и объединение множеств

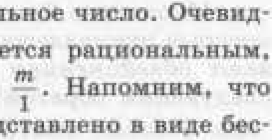


Рис. 46

Множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B (и только из этих элементов), называют *пересечением* множеств A и B. Этот факт записывают следующим образом: $C=A\cap B$ (на рисунке 46 закрашено пересечение множеств A и B). Знак $\cap$ называется знаком пересечения.

Например, $\{1;\ 2;\ 3\} \cap \{1;\ 3;\ 4\} = \{1;\ 3\}$; пересечением лучей CA и BD на рисунке 47 является отрезок BC.

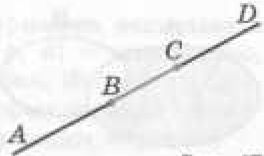
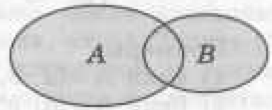


Рис. 47

Множества, пересечение которых есть пустое множество, называют *непересекающимися*. Например, множества $\{a,\ b\}$ и $\{c\}$ — непересекающиеся множества.

Отметим, что знак фигурной скобки при записи систем уравнений и неравенств означает задачу нахождения пересечения множеств решений входящих в систему уравнений или неравенств.



$C = A \cup B$

Рис. 48

<u>Задача 2.</u> Решить систему $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

▷ Находим множество корней уравнения $x^2 + x - 2 = 0$: $\{1;\ -2\}$, а затем находим пересечение этого множества с множеством решений неравенства $x \geqslant 0$:

$$\{1;\ -2\} \cap [0;\ +\infty) = \{1\}.$$

Число 1, и только оно, является как корнем уравнения, так и решением неравенства рассматриваемой системы. ◀

Множество C, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называют *объединением* множеств A и B. Этот факт записывают следующим образом:

$$C = A \cup B$$

(на рисунке 48 с помощью кругов Эйлера изображены множества A и B и закрашено объединение этих множеств). Знак $\cup$ называется знаком объединения.

Например, $\{1;\ 2\} \cup \{1;\ 3;\ 4\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; объединением лучей CA и BD на рисунке 47 является прямая AD; решение неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$ можно записать так: $(-\infty;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$.

<u>Задача 3.</u> Решить уравнение

$$(x+1)(x^2-4) = 0. \qquad (1)$$

▷ Произведение многочленов равно нулю, когда хотя бы один из них равен нулю. Решаем уравнения $x + 1 = 0$ (его корень $x_1 = -1$) и $x^2 - 4 = 0$ (его корни $x_1 = -2$, $x_2 = 2$). Множество корней исходного уравнения $\{-1;\ -2;\ 2\}$ является объединением множеств корней уравнений $x + 1 = 0$ и $x^2 - 4 = 0$. ◀

Решая уравнение (1), мы искали значения x, которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений $x + 1 = 0$ и

$x^2-4=0$. В этом случае говорят, что решение уравнения (1) сводится к решению совокупности уравнений, и пишут:

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ x^2-4=0. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Замечание. В школьных учебниках совокупность уравнений записывают их перечислением. Совокупность (2) можно записать так: $x+1=0$; $x^2-4=0$.

Задача 4. Решить неравенство $(x-5)(x+3)>0$.

▷ Произведение двух множителей положительно, если они одного знака, поэтому решение исходного неравенства сводится к решению совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-5>0, \\ x+3>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-5<0, \\ x+3<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая системы неравенств, входящие в совокупность, получаем совокупность их решений: $\left[\begin{array}{l} x>5, \\ x<-3. \end{array}\right.$

Ответ. $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$. ◀

Вопросы к § 12

1. Какими способами задаются множества?
2. Что такое пустое множество?
3. Какие множества называют равными?
4. Какое множество называют подмножеством данного множества?
5. Что называют разностью множеств A и B?
6. Что называют дополнением множества X до множества Y?
7. Что является дополнением множества целых чисел до множества рациональных чисел?
8. Что является дополнением множества рациональных чисел до множества действительных чисел?
9. Что называют пересечением множеств A и B?
10. Что является пересечением множества целых чисел с множеством действительных чисел?
11. Какие множества называют непересекающимися?
12. Что называют объединением множеств A и B?
13. Что является объединением множества натуральных чисел с множеством рациональных чисел?
14. В каком случае объединение множеств A и B равно пересечению этих множеств?
15. Когда разность $A \setminus B$ является дополнением множества B до множества A?

Упражнения

201. Верна ли запись $3 \in M$, $2 \notin M$, $\frac{1}{2} \in M$, $-2 \notin M$, если $M = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$?

202. Пусть A — множество всех натуральных делителей числа 12. Верно ли, что: $1 \in A$; $3 \notin A$; $-2 \in A$; $7 \notin A$?

203. Записать все подмножества множества:

1) $B = \{6;\ 7\}$; 2) $C = \{1;\ 2;\ 3\}$.

204. Найти все элементы множества:

1) $A = \{x : x \in N,\ 2x < 5\}$; 2) $M = \{a : a \in Z,\ -1\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 3\}$;

3) $C = \{x : x^2 - 6x + 9 = 0\}$; 4) $X = \{x : x^2 + 3x - 4 = 0\}$.

205. На плоскости отмечены точки A и B. Охарактеризовать множество точек M на плоскости, таких, что:

1) $\{M : AM = 2\}$; 2) $\{M : AM = MB\}$.

206. Найти дополнение множества A до множества B, если:

1) $A = \{-5;\ -4;\ -3\}$, $B = \{-5;\ -4;\ -3;\ -2\}$;

2) $A = \{-1;\ 0\}$, $B = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

207. Найти $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если:

1) $A = \{4;\ 5;\ 6\}$, $B = \{-5;\ -4;\ -3;\ -2\}$;

2) $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{-1;\ 0;\ 1\}$;

3) $A = \{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{1;\ 2;\ 3\}$;

4) $A = \{5;\ 6;\ 7\}$, $B = \{-5{,}5;\ -6;\ 6\}$.

208. Зная, что $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных, $\boldsymbol{Z}$ — множество целых, $\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных, $\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел, найти:

1) $\boldsymbol{Q} \setminus \boldsymbol{Z}$; 2) $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$; 3) $\boldsymbol{Q} \setminus \boldsymbol{N}$; 4) $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}$.

209. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, если:

1) $A = \{a;\ b;\ c\}$, $B = \{a;\ b\}$; 2) $A = \{a;\ b;\ c\}$, $B = \{c;\ d\}$;

3) $A = \{a;\ b\}$, $B = \varnothing$; 4) $A = \{a\}$; $B = \{c;\ d;\ e\}$.

210. Найти $A \cap B$ и $A \cup B$ для множеств, указанных в упражнении **207**.

211. Найти пересечение и объединение отрезков $[1;\ 7]$ и $[5;\ 8]$.

212. Найти пересечение и объединение отрезков $[0;\ 3]$ и $[5;\ 7]$.

213. Записать пересечение и объединение множества корней уравнения $x^2 + 9x - 10 = 0$ с множеством корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$.

214. Записать решение неравенства $x^2 - 7x + 6 \geqslant 0$, используя символику теории множеств.

215. Записать множество A натуральных делителей числа 18 и множество B натуральных делителей числа 45. Найти $A \cap B$. Чем по отношению к числам 18 и 45 является наибольшее из чисел, принадлежащих множеству $A \cap B$?

216. Пусть C — множество чисел, кратных числу 18 (очевидно, оно бесконечно), а D — множество чисел, кратных числу 45. Охарактеризовать элементы множества $C \cap D$. Как называется наименьшее из чисел, являющееся элементом множества $C \cap D$?

217. Найти $A \cap B$, если

$$A = \{x : |x| < 5,\ x \in Z\} \text{ и } B = \{x : |x - 1| < 7,\ x \in N\}.$$

218. Найти $A \cup B$, если

$$A = \{x : x^2 - 6x + 9 \leqslant 0\} \text{ и } B = \{x : |x| \leqslant 1,\ x \in Z\}.$$

219. Найти $A \cup B \cup C$ и $A \cap B \cap C$, если:

1) $A = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, $C = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ -1;\ -2;\ -3\}$;

2) $A = \{x : x \leqslant 1\}$, $B = \{x : -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x \in Z\}$, $C = \{x : -2 \leqslant x \leqslant 0\}$.

220. Пусть D_1 — множество всех квадратов, D_2 — множество всех прямоугольников, D_3 — множество всех ромбов, D_4 — множество всех параллелограммов. Найти множества:

1) $D_1 \cap D_2$; 2) $D_1 \cup D_2$; 3) $D_2 \cap D_3$; 4) $D_3 \cap D_4$; 5) $D_3 \cup D_4$; 6) $D_2 \cup D_1 \cup D_3 \cup D_4$; 7) $D_4 \cap D_3 \cap D_2 \cap D_1$.

221. Оформить решение уравнения, используя символику теории множеств:

1) $(x^2 - 16)(25 - x^2) = 0$; 2) $(x^3 - 1)(x^2 + x + 3) = 0$.

222. Оформить решение неравенства, используя символику теории множеств:

1) $(x + 3)(2x - 1) > 0$; 2) $(3x + 2)(x - 4) < 0$.

223. Решить совокупность уравнений:

1) $\left[\begin{array}{l} x^2 + 4x + 4 = 0, \\ 2x^2 - x - 1 = 0; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} |x - 3| = 2, \\ x^2 - 7x + 10 = 0. \end{array}\right.$

224. Решить совокупность неравенств:

1) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 49 < 0, \\ 9 - x^2 \geqslant 0; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 2x - 5 \geqslant x + 1, \\ x^2 - 9x + 14 < 0. \end{array}\right.$

§ 13. Логика

1. Высказывание

Любое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* (верно) или *ложно* (неверно), называется *высказыванием*.

Например, высказываниями являются следующие утверждения: 1) число -10 является целым числом (это утверждение истинно); 2) Волга впадает в Каспийское море (истинное утверждение); 3) $2 > 3$ (ложное утверждение).

Из каждого высказывания v можно получить новое высказывание, отрицая его, т. е. утверждая, что высказывание v не имеет места (не выполняется). Такое высказывание будет либо истинно, либо ложно. Его называют *отрицанием* высказывания v и обозначают $\overline{v}$ (читается «не v» или «v с чертой»).

Например, для высказывания v: «число 7 — четное», высказывание $\overline{v}$ можно сформулировать следующим образом: «число 7 — нечетное» или «число 7 не является четным». Заметим, что здесь высказывание v ложно, а высказывание $\overline{v}$ истинно. И в других случаях, если одно из высказываний v или $\overline{v}$ истинно, то другое ложно.

В таблице записаны примеры высказываний и их отрицаний с использованием математической символики.

Высказывание v		Высказывание $\overline{v}$	
$4+3=7$	(истинно)	$4+3\neq 7$	(ложно)
$2>3$	(ложно)	$2\leqslant 3$	(истинно)
$-10\in \boldsymbol{Z}$	(истинно)	$-10\notin \boldsymbol{Z}$	(ложно)
$\boldsymbol{Z}\subset \boldsymbol{Q}$	(истинно)	$\boldsymbol{Z}\not\subset \boldsymbol{Q}$	(ложно)
$\boldsymbol{Z}\cap \boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}$	(истинно)	$\boldsymbol{Z}\cap \boldsymbol{N}\neq \boldsymbol{N}$	(ложно)

2. Предложения с переменными

Математика часто использует утверждения, зависящие от той или иной переменной. Например: 1) $x>0$; 2) треугольник ABC — прямоугольный. Очевидно, что для одних значений x (в первом примере) и одних треугольников (во втором примере) сформулированные утверждения истинны, а для других ложны.

Утверждения подобного рода называют *предложениями с переменной* и обозначают $p(x)$ (в случае зависимости от двух переменных предложения обычно обозначают $p(x;\ y)$). Для каждого предложения принято указывать, на каком множестве X оно задано. Если множество очевидно, то его обычно не указывают. Например, предложение $p(x)$: $3x^2+5x-2=0$ является уравнением, корни которого предполагается искать на множестве действительных чисел (его корнями являются $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-2$). Если бы требовалось, например, найти только целочисленные корни этого уравнения, то задача была бы сформулирована следующим образом: $3x^2+5x-2=0$, $x\in \boldsymbol{Z}$ (решением такого уравнения является $x=-2$).

Множество X, на котором задано предложение $p(x)$, можно разбить на два подмножества: одно содержит те элементы X, для которых предложение $p(x)$ истинно (его называют *множеством истинности*), другое — для которых $p(x)$ ложно. Если первое из подмножеств обозначить A, то второе будет множеством $\overline{A}$. Очевидно, что каждое из множеств A и $\overline{A}$ является дополнением другого до множества X.

Например, множеством истинности A неравенства $x^2-1<0$ является интервал $(-1;\ 1)$, а множеством $\overline{A}$ является дополнение этого интервала до множества всех действительных чисел: $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$.

Два предложения $p(x)$ и $q(x)$, заданные на одном и том же множестве, имеющие равные множества истинности, называют *равносильными*. Например, предложения $x^2\leq 4$ и $|x|\leq 2$, являющиеся неравенствами, равносильны, так как у них одинаковые множества истинности — отрезок $[-2;\ 2]$.

Предложение $\overline{p(x)}$ (определенное на множестве X) называют *отрицанием* предложения $p(x)$ (определенного на том же множестве X), если оно обращается в истинное (ложное) высказывание для тех и только тех значений x, для которых $p(x)$ ложно (истинно).

$A\cup\overline{A}=X$

$A\cap\overline{A}=\varnothing$

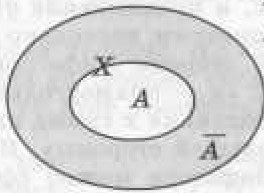


Рис. 49

Очевидно, что если A — множество истинности предложения $p(x)$, то $\overline{A}$ будет множеством истинности предложения $\overline{p(x)}$. На рисунке 49 с помощью кругов Эйлера показано соотношение между множествами X, A и $\overline{A}$.

3. Символы общности и существования

Если в математике хотят сказать, что некоторое предложение $p(x)$ верно для всех $x\in X$, то записывают так: $(\forall x)p(x)$.

Знак общности $\forall$ — перевернутая первая буква английского слова *All* (все) заменяет слова «для любого», «для всех», «каждый».

Если хотят сказать, что предложение $p(x)$ истинно хотя бы для одного значения $x\in X$, то записывают $(\exists x)p(x)$.

Знак существования $\exists$ — зеркально отраженная первая буква английского слова *Exists* (существует) заменяет слова «существует», «найдется», «хотя бы один».

Каждое из высказываний $(\forall x)p(x)$ и $(\exists x)p(x)$ может быть либо истинным, либо ложным.

Например: 1) если предложением $p(x)$ является неравенство $|x|\geq 0$, то истинным будут и высказывание $(\forall x)p(x)$, и высказывание $(\exists x)p(x)$; 2) если предложением $p(x)$ является неравенство $x^2\geq 1$, то $(\exists x)p(x)$ — истинное высказывание (например, при $x=2$ предложение $p(x)$ истинно: $2^2\geq 1$); высказывание же $(\forall x)p(x)$ ложно (например, при $x=0{,}5$ предложение $p(x)$ ложно).

Отметим, что для опровержения высказывания вида $(\forall x)p(x)$ достаточно привести *контрпример*, т. е. пример невыполнения высказывания $p(x)$ хотя бы для одного $x \in X$.

4. Прямая и обратная теоремы

Многие теоремы в математике формулируются по следующей схеме: «Для любого элемента $x \in X$ из предложения $p(x)$ следует предложение $q(x)$» или коротко:

$$(\forall x \in X)\,p(x) \Rightarrow q(x), \qquad (1)$$

где знак следования $\Rightarrow$ заменяет слова «откуда следует», «тогда», «если..., то...».

Часто запись (1) заменяют более короткой:

$$p(x) \Rightarrow q(x). \qquad (2)$$

Предложение $p(x)$ в утверждении (1) называется *условием теоремы*, а предложение $q(x)$ — *заключением теоремы*.

Рассмотрим несколько примеров.

1) В теореме Пифагора условие $p(x)$ можно сформулировать так: «x — прямоугольный треугольник»; заключение $q(x)$: «В треугольнике x сумма квадратов меньших сторон равна квадрату большей стороны». Используя терминологию логики, теорему Пифагора можно сформулировать, например, так: «Из того, что некоторый треугольник — прямоугольный, следует, что сумма квадратов его меньших сторон равна квадрату большей стороны».

2) Теорема «Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке» является краткой (удобной для заучивания) формулировкой теоремы «Если фигура x — треугольник, то биссектрисы его углов пересекаются в одной точке». Здесь условием теоремы является предложение $a(x)$: «Фигура x — треугольник (любой треугольник)», а заключением является предложение $b(x)$: «Биссектрисы углов фигуры x пересекаются в одной точке».

3) В теореме Виета «Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливы формулы $x_1+x_2=-p$, $x_1 \cdot x_2=q$» условием $k(x)$ является предложение: «x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$». Заключение теоремы есть предложение $m(x)$: «$x_1+x_2=-p$, $x_1 \cdot x_2=q$».

Теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ и $q(x) \Rightarrow p(x)$ называют *взаимно обратными теоремами*. Иногда одну из этих теорем называют *прямой*, а другую —*обратной*. Очевидно, что любую из взаимно обратных теорем можно принять за прямую.

Из определения взаимно обратных теорем ясно, что если в формулировке прямой теоремы поменять местами условие и заключение, то получится формулировка обратной теоремы.

Например:

1) теорему, обратную теореме Пифагора, можно сформулировать так: «Если сумма квадратов меньших сторон треугольника равна квадрату большей стороны, то этот треугольник прямоугольный»;

2) в теореме Виета, поменяв местами условие и заключение, имеем условие: «$x_1+x_2=-p$, $x_1 \cdot x_2=q$» и заключение: «x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$».

Традиционно теорема, обратная теореме Виета, формулируется так: «Если действительные числа x_1, x_2, p и q таковы, что $x_1+x_2=-p$ и $x_1 \cdot x_2=q$, то x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$».

Важно знать, что среди пар взаимно обратных теорем обе могут быть верными (как, например, для теорем Виета и Пифагора); обе могут быть неверными; одна из них может быть верной, а другая — неверной. Например:

1) прямая теорема «Если натуральное число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10» и обратная ей теорема «Если натуральное число делится на 10, то оно оканчивается цифрой 0» верны (истинны) обе;

2) неверными *являются* и прямая теорема «Сумма углов треугольника равна 360°», и обратная ей теорема «Если сумма углов многоугольника равна 360°, то этот многоугольник — треугольник»;

3) теорема «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» верна. Обратная же теорема «Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник является ромбом» неверна, так как можно привести пример (контрпример) четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями, не являющегося ромбом (рис. 50).

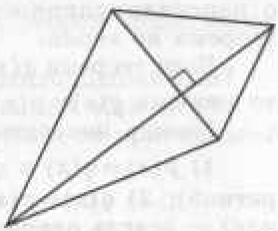


Рис. 50

5. Необходимые и достаточные условия

Если теорема $p(x) \Rightarrow q(x)$ верна, то ее условие $p(x)$ называют *достаточным условием* для заключения $q(x)$, а заключение $q(x)$ называют *необходимым условием* для $p(x)$.

Например, теорема «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» верна, значит, ее условие $p(x)$: «Четырехугольник x — ромб» — является достаточным условием для заключения $q(x)$: «Диагонали четырехугольника x взаимно перпендикулярны». Таким образом, для того чтобы диагонали четырехугольника были перпендикулярны, достаточно, чтобы этот четырехугольник был ромбом. Заключение этой теоремы $q(x)$ является необходимым условием для предложения $p(x)$. Можно сказать, что, для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были перпендикулярны.

Если верна не только теорема $p(x) \Rightarrow q(x)$, но и ей обратная $q(x) \Rightarrow p(x)$, то $p(x)$ является необходимым и достаточным условием для $q(x)$, а $q(x)$ является *необходимым и достаточным условием* для $p(x)$.

Например, верными являются как теорема Пифагора, так и ей обратная, поэтому сформулировать ее можно так: «Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов его меньших сторон была равна квадрату большей».

Заметим, что слова «необходимо и достаточно» в формулировках теорем часто заменяют словами «тогда и только тогда», «в том и только в том случае», «те и только те».

6. Противоположные теоремы

Теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ и $\overline{p(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}$ называются *взаимно противоположными*.

Например, для теоремы «Сумма (внутренних) углов треугольника равна 180°» противоположной будет теорема, в которой вместо условия и заключения будут сформулированы их отрицания: «У многоугольника, не являющегося треугольником, сумма (внутренних) углов отлична от 180°». Обе эти теоремы верны.

Есть теоремы, для которых одна из взаимно противоположных теорем верна, а другая нет. Например, для теоремы о перпендикулярности диагоналей ромба противоположная ей теорема не верна.

Если теорема $q(x) \Rightarrow p(x)$ — обратная для теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$, то теорема $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$ называется *противоположной обратной*.

Можно показать, что пары теорем:

1) $p(x) \Rightarrow q(x)$ и $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$ (прямая и противоположная обратной); 2) $q(x) \Rightarrow p(x)$ и $\overline{p(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}$ (обратная и противоположная) — всегда одновременно истинны или ложны. Например:

— *прямая* теорема «Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке» истинна;

— *обратная* ей теорема «Если биссектрисы внутренних углов многоугольника пересекаются в одной точке, то этот многоугольник является треугольником» ложна (например, у ромба, являющегося четырехугольником, биссектрисы внутренних углов пересекаются в одной точке);

— *противоположная* теорема «Если многоугольник не является треугольником, то биссектрисы его внутренних углов не пересекаются в одной точке» ложна (контрпример — ромб);

— теорема, *противоположная обратной*, «Если биссектрисы внутренних углов многоугольника не пересекаются в одной точке, то этот многоугольник не является треугольником» истинна.

Нередко доказательство прямой теоремы бывает затруднительно (в этом учащиеся убедились в курсе планиметрии). Тогда прибегают к доказательству *методом от противного*, которое заключается фактически в доказательстве вместо прямой теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ теоремы, противоположной обратной, $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$. ▬

Вопросы к § 13

1. Что называется высказыванием?
2. Привести примеры истинных и ложных высказываний.
3. Привести пример отрицания некоторого высказывания.
4. Привести пример предложения с переменной.
5. Что называется множеством истинности?
6. Какие предложения называются равносильными?
7. Какое предложение называют отрицанием предложения $p(x)$?
8. Объяснить запись $(\forall x)p(x)$.
9. Объяснить запись $(\exists x)p(x)$.
10. Как можно опровергнуть высказывание $(\forall x)p(x)$?
11. В примере формулировки конкретной теоремы выделить ее условие и заключение.
12. Какие теоремы называются взаимно обратными?
13. Что называют достаточным условием некоторого предложения?
14. Что называют необходимым условием некоторого предложения?
15. В каких случаях при формулировках теорем используют термин «необходимо и достаточно»?
16. Какие теоремы называют взаимно противоположными?
17. Какую теорему называют противоположной обратной?
18. В чем состоит суть доказательства методом от противного?

Упражнения

225. Сформулировать высказывание $\overline{v}$, если известно высказывание v: 1) $2=2$; 2) $15\geqslant3$; 3) любое натуральное число является целым числом; 4) у Земли только один естественный спутник.

226. Найти множество истинности предложения:

1) n — натуральный делитель числа 12;

2) k — натуральный делитель числа 10;

3) $-5<x<1$, $x\in Z$;

4) $\begin{cases} x^2-2x+1\leqslant0, \\ x>0; \end{cases}$ 5) $\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=3; \end{array}\right.$ 6) $\left[\begin{array}{l} 2x^2-x+3=0, \\ -x+1=0. \end{array}\right.$

227. Найти множество истинности для предложения $\overline{p(x)}$, если дано предложение $p(x)$:

1) $-1\leqslant x\leqslant2$; 2) $x\in(-\infty;\ 4)\cup(5;\ +\infty)$;

3) $-x^2-3x+4=0$; 4) $x^2+1\leqslant0$.

228. Для каждого из предложений $p(x)$:

1) $\sqrt{x}=5$; 2) $|x|>-2$; 3) $x^2-3=0$; 4) $x^2+3>0$

определить, истинным или ложным является высказывание $(\forall x)p(x)$; $(\exists x)p(x)$.

229. Для каждого из утверждений $p(x)$: 1) треугольник x — равнобедренный; 2) параллелограмм x является квадратом; 3) вписанный угол x равен половине дуги, на которую он опирается; 4) у четырехугольника x сумма внутренних углов равна $360°$ — определить, истинным или ложным является высказывание $(\forall x)p(x)$; $(\exists x)p(x)$.

230. Выделить условие и заключение теоремы: 1) если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3; 2) каждый член арифметической прогрессии (начиная со второго) равен полусумме соседних с ним членов.
Сформулировать теорему, обратную данной.

231. Сформулировать теорему, обратную теореме:
1) сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна $180°$;
2) если две параллельные прямые пересечены третьей, то образовавшиеся накрест лежащие углы равны;
3) около любого прямоугольника можно описать окружность.
Установить, истинной или ложной является каждая из сформулированных теорем.

232. Заменить многоточие словами «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» таким образом, чтобы полученное утверждение было истинным:
1) чтобы хорошо ответить на уроке, ... прийти в школу;
2) для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 2, ..., чтобы эти числа были четными;
3) для того чтобы число делилось на 9, ..., чтобы сумма его цифр делилась на 9;
4) для того чтобы числа x_1 и x_2 были корнями уравнения $x^2+px+q=0$, ..., чтобы $x_1 \cdot x_2 = q$.

233. Привести контрпример, опровергающий утверждение:
1) в любой четырехугольник можно вписать окружность;
2) для любого треугольника сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны; 3) сумма чисел с разными знаками есть число отрицательное; 4) в равнобедренном треугольнике один угол тупой.

234. Доказать или опровергнуть высказывание:
1) сумма двух последовательных натуральных чисел есть число четное; 2) сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

235. Задана функция $y=kx+b$. При каких значениях k истинно предложение:
1) «При любом b графиком функции является прямая»;
2) «При любом $b \neq 0$ график функции параллелен оси Ox»;
3) «Существует b, при котором график функции совпадает с осью абсцисс»;
4) «Существует b, при котором график функции проходит через начало координат»?

Проверь себя!

1. Представить в виде степени: $\frac{(a^3)^5 \cdot a^0 \cdot a^2}{a^{-2}}$.
2. Записать число 0,00038 в стандартном виде.
3. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x-3y=7, \\ 3x+4y=2. \end{cases}$
4. Решить систему неравенств $\begin{cases} 5x+3>0, \\ \frac{1}{2}x-4<0. \end{cases}$
5. Вынести множитель из-под знака корня $\sqrt{9x^3y^5}$, если $x<0$ и $y<0$.
6. Решить уравнение $5x+3-2x^2=0$.
7. Построить график функции $y=x^2-5x+6$.
8. Выписать первые пять членов последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1}=-a_n^2+1$ и условием $a_1=2$.
9. Найти моду, медиану и среднее значение выборки 5, 3, 8, 7, 4, 5.

---

1. Выполнить действия: $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{b\sqrt{b}}{a-b}$.
2. Решить уравнение $|2x-3|=5$.
3. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x^2+x-6\geqslant 0, \\ 3x+1<0. \end{cases}$
4. Извлечь корень $\sqrt{a^2-4a+4}$, если $a<2$.
5. Построить график функции $y=\frac{1}{x+1}-2$.
6. Найти сумму членов арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, ... с девятого по семнадцатый включительно, если $a_n=2n-3$.
7. Найти $A\cap B$ и $A\cup B$, если $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B=\{x: 3\leqslant x\leqslant 5\}$.
8. Опровергнуть утверждение: «Число вида $\frac{n+3}{2}$, где $n\in N$, является целым числом», приведя контрпример.
9. Для предложения $p(x)$: «Четырехугольник x является прямоугольником», определить, истинным или ложным является высказывание $(\forall x)p(x)$; $(\exists x)p(x)$.
10. Сформулировать теорему, обратную теореме «Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, имеет длину, равную половине длины третьей стороны». Верна ли прямая теорема? обратная теорема?

Глава II

Делимость чисел

Только понимание природы чисел гарантирует понимание возможности действий над ними и остальных их свойств.

Л. Эйлер

§ 1. Понятие делимости. Делимость суммы и произведения

Говорят, что целое число a делится на натуральное число m, если существует целое число p, такое, что $a=mp$.

Число m называют *делителем* числа a, а число p — *частным* от деления a на m.

Два натуральных числа называются *взаимно простыми*, если среди натуральных чисел они не имеют никаких общих делителей, кроме единицы. Например, числа 10 и 77 взаимно просты, так как натуральными делителями числа 10 являются числа 1, 2, 5, 10, а натуральными делителями числа 77 являются числа 1, 7, 11, 77.

Наибольшее из натуральных чисел, являющихся одновременно делителями натуральных чисел a и b, называют *наибольшим общим делителем* (НОД) чисел a и b. Например, для чисел $a=80$ и $b=84$ их НОД равен 4.

Отметим, что числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда их НОД равен 1.

Рассмотрим свойства делимости суммы, разности и произведения чисел (буквами a и b далее обозначаются целые числа, а буквами m, n, k и l — натуральные числа).

1) Если a делится на m и b делится на m, то числа $a+b$ и $a-b$ также делятся на m.
2) Если a и b делятся на m, то при любых k и l число $ka+lb$ делится на m.
3) Если a делится на m, а b не делится на m, то числа $a+b$ и $a-b$ не делятся на m.
4) Если a делится на m, а m делится на k, то a делится на k.

5) Если a делится на m, а b делится на n, то ab делится на mn.
6) Если число a делится на каждое из чисел m, n, причем m, n — взаимно простые числа, то a делится на их произведение mn.
7) Если a делится на m, то a^k делится на m^k.

Ограничимся доказательством утверждения 1.

Если целые числа a и b делятся на натуральное число m, то существуют такие целые числа p и q, что $a=mp$, $b=mq$, откуда получаем $a+b=m(p+q)$, $a-b=m(p-q)$.

Так как $p+q$ — целое число, $p-q$ — целое число или 0, то числа $a+b$ и $a-b$ делятся на m.

Целое число, делящееся на 2, называют четным, а целое число, не делящееся на 2, называют нечетным. Четное число a можно записать в виде $a=2k$, а нечетное число a — в виде $a=2k-1$, где k — некоторое целое число.

Задача 1. Доказать, что квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного числа имеет вид $4p+1$, где $p \in \mathbf{Z}$.

▷ а) Пусть a — четное число, тогда $a=2k$, откуда находим $a^2=2k \cdot 2k=4k^2$, где k^2 — натуральное число. Следовательно, a^2 делится на 4.

б) Пусть a — нечетное число, тогда $a=2k-1$, откуда следует, что $a^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=4(k^2-k)+1$, где $k^2-k=p$ — целое число, т. е. $a^2=4p+1$. ◀

Задача 2. Доказать, что число $a=16^{10}-2^{35}$ делится на 31.

▷ Так как $16^{10}=2^{40}$, то $a=2^{40}-2^{35}=2^{35}(2^5-1)=31 \cdot 2^{35}$, откуда следует, что a делится на 31. ◀

Задача 3. Натуральные числа $8n+3$ и $5n+1$ делятся на натуральное число $m \neq 1$. Найти m.

▷ Так как числа $8n+3$ и $5n+1$ делятся на m, то и число

$$5(8n+3)-8(5n+1)=7$$

должно делиться на m. Но единственное натуральное число, не равное 1, на которое делится 7, равно 7.

Ответ. $m=7$. ◀

Задача 4. Пусть x и y — такие натуральные числа, что число $5x+7y$ делится на 13. Доказать, что число $a=46x+41y$ делится на 13.

▷ Воспользуемся равенством

$$a=46x+41y=4(5x+7y)+13(2x+y).$$

Число $4(5x+7y)$ делится на 13, так как $5x+7y$ по условию делится на 13. Число $13(2x+y)$ также делится на 13 при любых натуральных x и y. Следовательно, число a делится на 13. ◀

Задача 5. Доказать, что при любых натуральных x и y число $a=(x+3y+5)^5(3x+5y+2)^4$ делится на 16.

▷ Если числа x, y — оба четные или оба нечетные, то $3x+5y+2$ — четное число, и поэтому $(3x+5y+2)^4$ делится на $2^4=16$.

Если одно из чисел x, y четное, а другое нечетное, то $x+3y+5$ — четное число, и поэтому $(x+3y+5)^5$ делится на $2^5=32$ и, значит, делится на 16. ◀

Упражнения

1. Доказать, что на 8 делится: 1) куб четного числа; 2) разность квадратов двух нечетных чисел.
2. Доказать, что число $16^{20}+2^{76}$ делится на 17.
3. Натуральные числа $5n+1$ и $7n+2$ делятся на натуральное число $m>1$. Найти m.
4. 1) Пусть x и y — такие натуральные числа, что число $7x+9y$ делится на 11. Доказать, что число $57x+78y$ делится на 11. 2) Сумма натуральных чисел m и n делится на 7. Доказать, что число $2m^2+5mn+3n^2$ делится на 7.
5. Доказать, что число $555^{777}+777^{555}$ делится на 37.
6. Доказать, что число $(m+5n+7)^6(3m+7n+2)^7$ делится на 64 при любых натуральных m и n.
7. Доказать, что если к произведению четырех последовательных натуральных чисел прибавить единицу, то получится число, равное квадрату некоторого натурального числа.
8. Доказать, что:
   1) число 16^3+31^4-2 делится на 15;
   2) число $10^{10}+28^3-2$ делится на 9;
   3) число 36^3+19^3-16 делится на 17.

§ 2. Деление с остатком

Не всякое натуральное число a делится на данное натуральное число m.

Например, число 28 не делится на 3, а результат деления можно записать с помощью равенства $28=3\cdot9+1$, где 9 — частное, 1 — остаток.

Аналогично делению натурального числа a на натуральное число m соответствует равенство

$$a=qm+r, \qquad (1)$$

где q — целое неотрицательное число, r принимает одно из значений 0, 1, 2, ..., $m-1$.

Для любого целого числа a деление на натуральное число m определяется равенством (1), в котором $q\in Z$, r — неотрицательное целое число, такое, что $0\leqslant r<m$.

Например, если $a=-37$, $m=5$, то $-37=(-8)5+3$.

Задача 1. Найти остаток от деления числа $a=10\cdot 5^{25}$ на 4.

▷ Число 5^{25} оканчивается цифрой 5, поэтому две последние цифры числа образуют число 50. Остаток от деления числа a на 4 равен остатку от деления числа 50 на 4, т. е. равен 2. ◀

Задача 2. Найти остаток от деления числа 92^7 на 13.

▷ При делении на 13 числа 92 остаток равен 1, т. е. $92=13\cdot 7+1$.

При делении числа 92^2 остаток также равен 1, так как $92^2=(13\cdot 7+1)^2=13^2\cdot 7^2+2\cdot 13\cdot 7+1=13(13\cdot 7^2+2\cdot 7)+1=13k+1$; $k\in N$.

Аналогично $92^3=92\cdot 92^2=(13\cdot 7+1)(13k+1)=13p+1$; $p\in N$. $92^4=13q+1$, $q\in N$. $92^7=92^3\cdot 92^4=(13p+1)(13q+1)=13r+1$, где $r\in N$. Следовательно, остаток от деления числа 92^7 на 13 равен 1. ◀

Задача 3. Доказать, что если целое число a не делится на 3, то $a^2=3p+1$, где $p\in Z$.

▷ Пусть a не делится на 3, тогда остаток r от деления a на 3 равен 1 или 2. Если $r=1$, то $a=3m+1$, где $m\in N$, откуда $a^2=9m^2+6m+1=3(3m^2+2m)+1=3p+1$, где $p=3m^2+2m$ — натуральное число. Если $r=2$, то $a=3m+2=3(m+1)-1=3k-1$, где $k=m+1$ — натуральное число. Отсюда $a^2=(3k-1)^2=3(3k^2-2k)+1=3p+1$, где $p=3k^2-2k$ — натуральное число. ◀

Задача 4. Доказать, что число n^3+5n делится на 6 при любом $n\in N$.

▷ Пусть $n>1$. Воспользуемся равенством

$$n^3+5n=n^3-n+6n=(n-1)n(n+1)+6n.$$

Так как $6n$ делится на 6, то достаточно доказать, что $A=(n-1)n(n+1)$ (т. е. произведение трех последовательных натуральных чисел) делится на 6. Среди чисел $n-1$, n, $n+1$ по крайней мере одно делится на 2, и поэтому A делится на 2. Кроме того, одно из этих трех чисел делится на 3. Следовательно, A делится на 6. ◀

Задача 5. Найти последнюю цифру числа a, если:

1) $a=2^{387}$; 2) $a=3^{275}$; 3) $a=7^{358}$.

Задачу можно сформулировать иначе: найти остаток от деления числа a на 10.

▷ 1) Выпишем последовательные степени двойки:

$$2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32,\ 2^6=64 \text{ и т. д.}$$

Последние цифры этих чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра числа 2^k, где $k\in N$, определяется только тем, каков остаток от деления числа k на 4.

Из равенства $387=384+3$, где число 384 делится на 4, следует, что остаток от деления числа 387 на 4 равен 3. Поэтому последняя цифра числа — восьмерка ($2^3=8$). Вообще если

$a=2^k$, где $k \in N$, а при делении числа k на 4 получается остаток, равный r, где $r=1, 2, 3$, то последняя цифра числа 2^k совпадает с последней цифрой числа 2^r. Если число k делится на 4 (в этом случае $r=0$), то последняя цифра числа 2^k — шестерка, так как 2^4 оканчивается цифрой 6.

2) Выпишем последовательные степени тройки:

$$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ 3^6=729 \text{ и т. д.}$$

Последние цифры степеней тройки повторяются через 4, т. е. из равенства $275=272+3$, где 272 делится на 4, следует, что 7 — последняя цифра a, так как 3^3 оканчивается цифрой 7.

3) Числа 7^k при $k=1, 2, 3, 4, 5$ оканчиваются соответственно цифрами 7, 9, 3, 1, 7. Таким образом, последние цифры чисел 7^k повторяются через 4. Так как $358=356+2$, где число 356 делится на 4, то последняя цифра числа такая же, как и у числа 7^2,— это цифра 9. ◀

Задача 6. Найти все целые n, при которых дробь $a=\dfrac{n^5+3}{n^2+1}$ — целое число.

▷ Представим a в виде суммы многочлена и дроби, числитель которой — многочлен первой степени. С этой целью запишем a в следующем виде:

$$a=\frac{(n^5+n^3)-(n^3+n)+n+3}{n^2+1}.$$

Произведя деление, получаем $a=n^3-n+\dfrac{n+3}{n^2+1}$.

Так как n^3-n — целое число, то a — целое число тогда и только тогда, когда дробь $\dfrac{n+3}{n^2+1}$ — целое число. Этому условию удовлетворяют только целые числа $-3, -1, 0, 1, 2$. ◀

Упражнения

9. Найти остаток от деления:

1) числа 39^{46} на 5; 2) числа 64^{29} на 7; 3) числа 103^{15} на 17; 4) числа $10^{10}+28^3-1$ на 3; 5) числа $7\cdot10^{30}$ на 9.

10. Найти последнюю цифру числа $12^{39}+13^{41}$.

11. Найти остаток от деления числа $36^{24}+21^{45}+7^8$ на 10.

12. Пусть натуральное число n не делится на 3. Доказать, что число n^2-1 делится на 3.

13. Доказать, что число $96^9-32^5-48^6$ делится на 10.

14. Найти остаток от деления на 11 числа a, если:

1) $a=2^{2002}+3^{2002}$; 2) $a=3^{2002}+7^{2002}$.

15. Доказать, что натуральные числа m и n делятся на 3, если число m^2+n^2 делится на 3.

16. Пусть натуральные числа a, b и c не делятся на 3. Доказать, что число $a^2+b^2+c^2$ делится на 3.

17. Найти все целые n, при которых дробь $a=\dfrac{n^4-n^3+2n^2}{n^2+1}$ будет целым числом.

§ 3. Признаки делимости

Напомним признаки делимости на 10, 5 и 4.

1) Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.

2) Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или 5.

3) Натуральное число $n>9$ делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, полученное из данного отбрасыванием всех цифр, кроме двух последних, делится на 4.

Например, число 273652 делится на 4, так как 52 делится на 4, а число 37826 не делится на 4, так как 26 не делится на 4.

Переходя к признакам делимости на 9 и 3, напомним, что любое натуральное число можно представить суммой слагаемых вида $a_k\cdot 10^k$, где a_k — цифра k-го разряда числа a. Например, $8345=5+4\cdot 10+3\cdot 10^2+8\cdot 10^3$.

Если натуральное число a является n-значным, то

$$a=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}=a_0+10\cdot a_1+10^2\cdot a_2+\ldots+10^{n-1}\cdot a_{n-1}. \quad (1)$$

Задача 1. Доказать, что натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

▷ Пусть число a имеет вид (1), $S=a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}$ — сумма его цифр. Тогда

$$a-S=a_0+10\cdot a_1+10^2\cdot a_2+\ldots+10^{n-1}\cdot a_{n-1}-(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})=$$
$$=9a_1+99a_2+\ldots+(10^{n-1}-1)a_{n-1}. \quad (2)$$

Так как числа 9, 99, 999, ..., $10^{n-1}-1$ составлены из одних девяток, то эти числа делятся на 9. Тогда из равенства (2) следует, что если число a делится на 9, то и S делится на 9.

Верно и обратное: из делимости суммы S на 9 следует делимость числа a на 9. ◀

Задача 2. Доказать, что натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

▷ Воспользуемся обозначениями предыдущей задачи. Если S делится на 3, то a также делится на 3, так как разность $a-S$, делящаяся на 9, делится и на 3. Обратно: из того, что a делится на 3, следует, что и S также делится на 3, так как $a-S$ делится на 3. ◀

Задача 3. Доказать, что число $a=123^3+567^4$ делится на 3.

▷ Каждое из чисел 123 и 567 делится на 3, так как сумма цифр каждого делится на 3. Поэтому числа 123^3 и 567^4 делятся на 3, откуда следует, что число a делится на 3. ◀

Задача 4. Натуральное число $p=\overline{abc}$, где a, b, c — цифры соответствующих разрядов, делится на 37. Доказать, что и число $q=\overline{bca}$ также делится на 37.

▷ Так как p делится на 37, то $p=100a+10b+c=37k$, где k — целое число. Тогда $q=100b+10c+a=10p-999a$. Число 999 делится на 37, так как оно делится на 111, а число 111 делится на 37. Поэтому число q делится на 37 как разность двух чисел, каждое из которых делится на 37. ◀

Задача 5. Доказать, что число $a=10^{25}+10^{17}-182$ делится на 18.

▷ Число a делится на 2, так как каждое из чисел 10^{25}, 10^{17}, 182 является четным. Докажем, что число a делится на 9. Запишем это число в следующем виде: $a=10^{25}-1+10^{17}-1-180$.

Числа $10^{25}-1$, $10^{17}-1$ и 180 делятся на 9, откуда следует, что a делится на 9. Таким образом, число a делится на взаимно простые числа 2 и 9, и поэтому оно делится на 18. ◀

Задача 6. Доказать, что число $a=10^6+10^8-200$ делится на 198.

▷ Так как $198=2\cdot9\cdot11$, то достаточно доказать, что число a делится на 2, 9 и 11. Запишем это число в виде $a=10^6-1+$ $+10^8-1-198$.

Числа 10^6-1 и 10^8-1 делятся не только на 9, но и на 11, так как в записи каждого из них содержится только цифра 9, и притом четное число раз (6 и 8). Число 198 также делится на 9 и 11. Поэтому число a делится на 9 и 11. Кроме того, a делится на 2. Следовательно, a делится на 198. ◀

Упражнения

18. Доказать, что число 207^5-72^6 делится на 9.

19. Доказать, что число $6\cdot7204^{15}+364^{22}$ делится на 4.

20. Доказать, что число $a=n^4+2n^3-n^2-2n$ делится на 24 при любом $n\in N$ $(n>1)$.

21. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

22. Найти остаток от деления числа $10^2\cdot5^{45}$ на 8.

23. 1) Доказать, что число n^3+3n^2+5n+3 делится на 3 при любом $n\in N$.

2) Доказать, что число $2n^3-3n^2+n$ делится на 6 при любом $n\in N$ $(n>1)$.

24. Доказать, что число n^5-n делится на 5 при любом $n \in N$.

25. Доказать, что:

1) число $6^{12}-1$ делится на 37; 2) число $2^{48}-1$ делится на 65; 3) число $3^{17}-3$ делится на 240; 4) число $10^{12}+263$ делится на 11; 5) число $10^{24}-298$ делится на 99.

§ 4. Сравнения

Если целые числа a и b при делении на натуральное число m дают равные остатки, то говорят, что эти числа *сравнимы по модулю* m, и пишут

$$a \equiv b \pmod m.$$

Иначе говоря, запись $a \equiv b \pmod m$ означает, что разность $a-b$ делится на m. В частности, если $a \equiv 0 \pmod m$, то число a делится на m.

Например, $36 \equiv 6 \pmod{10}$, $29 \equiv 3 \pmod{13}$, $10 \equiv -1 \pmod{11}$, $67 \equiv -2 \pmod{23}$.

Заметим, что в § 2 в качестве остатков при делении натуральных чисел выбирались неотрицательные целые числа. При решении задач с помощью сравнений часто бывает удобно в качестве остатка брать целые отрицательные числа.

Перечислим основные свойства сравнений.

1) Если $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.

2) Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то

$a+c \equiv b+d \pmod m$, $a-c \equiv b-d \pmod m$, $ac \equiv bd \pmod m$,

т. е. сравнения по одному модулю можно складывать, вычитать и перемножать, как и верные числовые равенства. В частности, можно обе части сравнения умножать на одно и то же целое число.

3) Если $ak \equiv bk \pmod m$, $m \neq 1$, а числа k и m взаимно просты, то $a \equiv b \pmod m$, т. е. обе части сравнения можно сокращать на общий множитель, если он и модуль m — взаимно простые числа.

Ограничимся доказательством свойства 3.

○ По условию число $ak-bk=k(a-b)$ делится на m. Так как k и m — взаимно простые числа, $m \neq 1$, то на m делится число $a-b$, т. е. $a \equiv b \pmod m$. ●

Задача 1. Доказать, что число a делится на m, если:

1) $a=96^{19}+32^{13}-8 \cdot 73^{16}$, $m=10$;

2) $a=64^{25}+48^{17}$, $m=7$;

3) $a=(38 \cdot 53)^{20}+(27 \cdot 64)^{15}$, $m=13$;

4) $a=2 \cdot 5^{21}+3^{12} \cdot 2^{10}$, $m=19$.

▷ 1) Пользуясь тем, что $96 \equiv 6 \pmod{10}$, и учитывая, что при возведении числа 6 в любую степень $k \in N$ получается число, оканчивающееся цифрой 6, имеем по свойствам сравнений $96^{19} \equiv 6^{19} \equiv 6 \pmod{10}$.

Далее, применяя результат задачи 5 (§ 2), получаем

$$32^{13} \equiv 2^{13} \equiv 2 \pmod{10}, \quad 73^{16} \equiv 3^{16} \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{10}.$$

По свойствам сравнений $a \equiv 6+2-8 \equiv 0 \pmod{10}$, т. е. число a делится на 10.

2) Так как $64 \equiv 1 \pmod 7$, $48 \equiv -1 \pmod 7$, то по свойствам сравнений (возведение в степень и сложение)

$$a \equiv 1^{25} + (-1)^{17} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 7,$$

т. е. число a делится на 7.

3) Пользуясь тем, что $38 \equiv -1 \pmod{13}$, $53 \equiv 1 \pmod{13}$, $27 \equiv 1 \pmod{13}$, $64 \equiv -1 \pmod{13}$, имеем

$$a \equiv (-1)^{20} \cdot 1^{20} + 1^{13} \cdot (-1)^{13} = 1 - 1 \equiv 0 \pmod{13},$$

т. е. число a делится на 13.

4) Запишем число a в следующем виде: $a = 10 \cdot 25^{10} + 9 \cdot 6^{10}$ и заметим, что $25 \equiv 6 \pmod{19}$. Тогда

$$a \equiv 10 \cdot 6^{10} + 9 \cdot 6^{10} = 19 \cdot 6^{10} \equiv 0 \pmod{19},$$

т. е. число a делится на 19. ◀

Задача 2. Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 22^{25} \cdot 35^{11} \cdot 47^{15}$, $m = 3$; 2) $a = 2^{127} + 18^{21}$, $m = 17$;

3) $a = 5 \cdot 2^{37} + 7 \cdot 29^5$, $m = 15$.

▷ 1) Числа 22, 35 и 47 не делится на 3, откуда следует, что $22^2 \equiv 35^2 \equiv 47^2 \equiv 1 \pmod 3$, так как квадрат целого числа, не делящегося на 3, дает при делении на 3 остаток 1 (задача 3, § 2). Отсюда получаем $22^{24} \equiv 35^{10} \equiv 47^{14} \equiv 1 \pmod 3$, и поэтому

$$a \equiv 22 \cdot 35 \cdot 47 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 3,$$

т. е. искомый остаток равен 1.

2) Так как $2^4 = 16 \equiv -1 \pmod{17}$, $18 \equiv 1 \pmod{17}$, то

$$a = 2^3 \cdot (2^4)^{31} + 18^{21} \equiv 8 \cdot (-1)^{31} + 1^{21} \equiv -8 + 1 \equiv 10 \pmod{17},$$

т. е. искомый остаток равен 10.

3) Пользуясь тем, что $2^4 \equiv 1 \pmod{15}$, $2^{36} \equiv 1 \pmod{15}$, $29 \equiv -1 \pmod{15}$, $29^5 \equiv -1 \pmod{15}$, получаем $a \equiv 5 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) \equiv 3 \pmod{15}$. Поэтому искомый остаток равен 3. ◀

Задача 3. Доказать, что если натуральное число n не делится на 5, то число $n^4 - 1$ делится на 5.

▷ Пусть r — остаток от деления n на 5, тогда $n = 5k + r$, где $k \in Z$, $k \geqslant 0$, а r — одно из чисел 1, 2, 3, 4, так как n не делится на 5. Пользуясь тем, что $n \equiv r \pmod 5$, получаем $n^4 \equiv r^4 \pmod 5$. Так как $1^4 \equiv 1 \pmod 5$, $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$, $4^4 \equiv 1 \pmod 5$, то $r^4 \equiv 1 \pmod 5$ при $r = 1, 2, 3, 4$ и $n^4 \equiv 1 \pmod 5$. Это означает, что $n^4 - 1$ делится на 5. ◀

Докажем признак делимости на 11. Пусть натуральное число a имеет вид

$$a=\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}=a_0+10a_1+10^2a_2+\dots+10^n a_n. \qquad (1)$$

Задача 4. Доказать, что натуральное число a, записанное в виде (1), делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 сумма $a_0-a_1+a_2-a_3+\dots+(-1)^n a_n$.

▷ Так как $10\equiv-1 \pmod{11}$, то

$$10^2\equiv10^4\equiv\dots\equiv10^{2k}\equiv1 \pmod{11} \text{ при любом } k\in N,$$
$$10^1\equiv10^3\equiv\dots\equiv10^{2k+1}\equiv-1 \pmod{11} \text{ при любом } k\in N.$$

По свойствам сравнений

$$a\equiv a_0-a_1+a_2-a_3+\dots+(-1)^n a_n \pmod{11},$$

т. е. число a делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма его цифр, взятая с чередующимися знаками. ◀

Задача 5. Найти остаток от деления числа $a=(987654321)^3$ на 11.

▷ Пусть b — основание данной степени, тогда $a=b^3$. Сумма $1-2+3-4+5-6+7-8+9$, составленная из цифр числа (с чередующимися знаками), равна 5. Поэтому $b\equiv5 \pmod{11}$, откуда следует, что $a=b^3\equiv5^3\equiv4 \pmod{11}$. Следовательно, искомый остаток равен 4. ◀

Задача 6. При каких натуральных n число $a=24n+9$ делится на 13?

▷ Пользуясь свойствами сравнений, запишем цепочку соотношений:

$$24n+9\equiv0 \pmod{13}, \quad 8n+3\equiv0 \pmod{13}, \quad 64n\equiv-24 \pmod{13},$$
$$-n\equiv-24\equiv-11 \pmod{13}, \quad n\equiv11 \pmod{13}.$$

Таким образом, число a делится на 13 тогда и только тогда, когда $n-11=13k$, т. е. при $n=11+13k$, $k\in N$. ◀

Упражнения

26. Доказать, что число: 1) $91^{40}-55^{35}$ делится на 18; 2) $84^{20}+101^{19}$ делится на 17; 3) $(75\cdot39)^{10}+(94\cdot58)^{15}$ делится на 19; 4) $10^{327}+56$ делится на 11; 5) $4^{15}+233$ делится на 3.

27. Найти остаток от деления числа: 1) $25^{26}+29^{26}$ на 3; 2) $2^{367}+43$ на 17; 3) $2^{1995}+5\cdot10^3$ на 3; 4) $2^{76}+3\cdot10^{18}$ на 9.

28. Доказать, что число: 1) $28\cdot20^{15}-10\cdot18^{13}$ делится на 19; 2) $3^3\cdot23^8+5^8\cdot2^{14}$ делится на 13; 3) $125^{24}-1825$ делится на 600; 4) $100^{20}-50\cdot16^5$ делится на 49; 5) $42^{365}+53^{241}$ делится на 5; 6) $71^{325}+41^{135}$ делится на 7.

§ 5. Решение уравнений в целых числах

Обратимся к линейным уравнениям с двумя неизвестными, т. е. к уравнениям вида

$$ax+by=c. \qquad (1)$$

Предположим, что a, b, c — целые числа, и поставим задачу — найти целочисленные решения уравнения (1), т. е. все пары целых чисел x, y, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство, или показать, что таких чисел нет.

Будем считать, что коэффициенты a, b, c уравнения (1) не имеют общего делителя, отличного от единицы (в противном случае разделим обе части уравнения на этот общий делитель).

Пусть d — наибольший общий делитель чисел a, b. Возможны два случая: $d=1$, $d \neq 1$.

В первом случае уравнение (1) имеет целочисленные решения, во втором нет. Справедливы следующие утверждения:

Теорема

1) Если коэффициенты a и b уравнения $ax+by=c$ являются взаимно простыми числами (их наибольший общий делитель $d=1$), то это уравнение имеет по крайней мере одно целочисленное решение.
2) Если $d \neq 1$, то уравнение $ax+by=c$ не имеет целочисленных решений.
3) Если $d=1$, то уравнение $ax+by=c$ имеет бесконечное множество целочисленных решений, которые задаются формулами

$$x=\alpha+bt,\ y=\beta-at, \qquad (2)$$

где $(\alpha;\ \beta)$ — некоторое целочисленное решение уравнения $ax+by=c$, а t — произвольное целое число.

○ Ограничимся доказательством утверждений 2 и 3.

а) Докажем утверждение 2. Пусть уравнение (1) имеет целочисленное решение. Тогда существуют целые числа x и y, которые обращают уравнение (1) в верное числовое равенство.

Так как d — наибольший общий делитель чисел a и b, причем $d \neq 1$, то $a=md$, $b=nd$, где m и n — целые числа, не имеющие общих натуральных делителей, отличных от единицы (m и n — взаимно простые числа).

Тогда равенство (1) примет вид $dmx+dny=c$, или

$$d(mx+ny)=c. \qquad (3)$$

По предположению числа a, b, c не имеют общего делителя, отличного от единицы. Но из равенства (3) следует, что c делится на d, где $d \neq 1$, т. е. a, b и c имеют общий делитель $d \neq 1$. Полученное противоречие означает, что уравнение (1) при $d \neq 1$ не может иметь целочисленных решений.

б) Докажем утверждение 3, опираясь на утверждение 1. Пусть $(\alpha; \beta)$ — целочисленное решение уравнения (1), тогда является верным равенство

$$a\alpha + b\beta = c. \tag{4}$$

Если $(x; y)$ — произвольное целочисленное решение уравнения (1), то равенство (1) верно. Вычитая почленно из равенства (1) равенство (4), получаем $a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$, откуда следует, что

$$x = \alpha + \frac{b(\beta - y)}{a}. \tag{5}$$

Число α — целое и, кроме того, a и b — взаимно простые числа. Поэтому число x, определяемое формулой (5), будет целым тогда и только тогда, когда $\beta - y$ делится на a. Обозначим

$$t = \frac{\beta - y}{a}, \tag{6}$$

тогда t — целое число и равенство (5) примет вид $x = \alpha + bt$, а из равенства (6) следует, что $y = \beta - at$.

Таким образом, доказано, что если $(\alpha; \beta)$ — какое-либо целочисленное решение уравнения (1), то все решения этого уравнения задаются формулами (2), где $t \in \mathbf{Z}$. ●

Замечание. Если $(x_1; y_1)$ — целочисленное решение уравнения $ax + by = 1$, то $(cx_1; cy_1)$ является целочисленным решением уравнения (1), так как из верного равенства $ax_1 + by_1 = 1$ следует верное равенство $a(cx_1) + b(cy_1) = c$.

Это утверждение часто оказывается полезным при отыскании решения уравнения (1).

Задача 1. Доказать, что уравнение $42x + 66y = 13$ не имеет целочисленных решений.

▷ Левая часть уравнения при любых целых x и y является четным числом, а правая — нечетным. Поэтому уравнение не может иметь целочисленных решений. К этому же выводу можно прийти, применяя утверждение 2. ◀

Задача 2. Найти все целочисленные решения уравнения $7x + 15y = 3$.

▷ Рассмотрим уравнение $7x + 15y = 1$. Оно имеет целочисленное решение $(-2; 1)$. Поэтому (замечание к теореме) исходное уравнение имеет целочисленное решение $(-6; 3)$, а все целочисленные решения этого уравнения задаются формулами (2), т. е.

$x = -6 + 15t$, $y = 3 - 7t$, $t \in \mathbf{Z}$. ◀

В заключение рассмотрим две задачи, в которых речь идет об отыскании целочисленных решений нелинейных уравнений.

Задача 3. Найти все целочисленные решения уравнения $x^2 = y^2 + 7$.

▷ Запишем уравнение в виде $(x-y)(x+y) = 7$.

Так как делителями правой части уравнения являются пары чисел 1, 7 и −1, −7, то совокупность всех целочисленных решений уравнения совпадает с множеством всех целочисленных решений следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=7; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=7, \\ x+y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=-7; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-7, \\ x+y=-1. \end{cases}$$

Решив эти системы, найдем все целочисленные решения исходного уравнения: (4; 3), (4; −3), (−4; −3), (−4; 3). ◀

Замечание. Из уравнения следует, что если найдено одно его целочисленное решение, то остальные 3 решения можно получить из этого решения, используя равенство $(-a)^2=a^2$.

Задача 4. Доказать, что уравнение $x^2-y^2=1994$ не имеет целочисленных решений.

▷ Запишем уравнение в виде $(x-y)(x+y)=1994$.

а) Если числа x и y являются одновременно четными или нечетными, то числа $x-y$ и $x+y$ четные, и поэтому левая часть уравнения в этом случае делится на 4. Но правая часть не делится на 4. Поэтому в рассматриваемом случае уравнение не имеет целочисленных решений.

б) Если одно из чисел x, y четное, а другое нечетное, то $x-y$ и $x+y$ — нечетные числа, и поэтому левая часть уравнения — число нечетное, тогда как правая часть уравнения — четное число. Следовательно, и в этом случае уравнение не имеет целочисленных решений. ◀

Задача 5. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, при которых является верным равенство $3xy+16x+13y+61=0$.

▷ Умножим данное уравнение на 3 и преобразуем левую часть полученного уравнения:

$$9xy+3\cdot 16x+3\cdot 13y+3\cdot 61=3y(3x+13)+16(3x+13)+$$
$$+3\cdot 61-16\cdot 13=(3x+13)(3y+16)-25.$$

Решим уравнение

$$(3x+13)(3y+16)=25. \qquad (1)$$

Так как делителями числа 25 являются числа ± 1, ± 5, ± 25, то множество всех целочисленных решений уравнения (1) содержится в множестве целочисленных решений следующих шести систем:

1) $\begin{cases} 3x+13=1, \\ 3y+16=25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+13=-1, \\ 3y+16=-25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+13=5, \\ 3y+16=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x+13=-5, \\ 3y+16=-5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x+13=25, \\ 3y+16=1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x+13=-25, \\ 3y+16=-1. \end{cases}$

Первая, четвертая и пятая системы имеют целочисленные решения (−4; 3), (−6; −7) и (4; −5) соответственно. Остальные системы не имеют решений в целых числах. ◀

Упражнения

29. 1) Доказать, что уравнение $15x+40y=17$ не имеет целочисленных решений.
2) Найти все целочисленные решения уравнения $4x-3y=11$.

30. 1) Доказать, что уравнение $x^2-y^2=30$ не имеет целочисленных решений.
2) Доказать, что уравнение $21x^2-7y^2=9$ не имеет целочисленных решений.

Найти все целочисленные решения уравнения (31—32).

31. 1) $x^2-y^2=21$; 2) $xy=5-x$.

32. 1) $3xy+10x-13y-35=0$; 2) $3xy+19x+10y+55=0$;
3) $x^3-6x^2-xy+13x+3y+7=0$;
4) $x^3-xy-7x+2y+23=0$.

33. 1) Найти все натуральные числа x, y, при которых является верным равенство $2x^2+5xy-12y^2=6$.
2) Найти все целые положительные числа x, y, при которых является верным равенство $2x^2-xy-y^2+2x+7y=28$.

Упражнения к главе II

34. Доказать, что число $333333^2+777777^3$ делится на 37.

35. Доказать, что число a делится на m, если:
1) $a=25^{10}+7\cdot5^{18}$, $m=32$; 2) $a=10^{15}+10^{20}-92$, $m=18$;
3) $a=86^7-12^5-38^6$, $m=10$.

36. Найти последнюю цифру числа a, если:
1) $a=72^{125}+43^{421}$; 2) $a=43^{43}-17^{17}$.

37. Доказать, что число $13n^2+1$ не делится на 3 ни при каком $n\in N$.

38. Доказать, что число $n^3+3n^2+8n+82$ не делится на 3 ни при каком $n\in N$.

39. Доказать, что число $11n^3+n$ делится на 6 при любом $n\in N$.

40. Доказать, что при любых натуральных m и n число $(3m+5n+7)^3(7m+n+2)^4$ делится на 8.

41. Доказать, что если целое число $m-1$ делится на 9, то число m^3-1 делится на 27.

42. Найти целочисленные решения уравнения:
1) $3x+4y=18$; 2) $9x-7y=4$.

43. Доказать, что не имеет решений в целых числах уравнение:
1) $13x^2+1=3y^2$; 2) $9x^2=y^2+74$.

44. Доказать, что число a делится на m, если:
1) $a=10^{37}-199$, $m=99$; 2) $a=2^{25}+1$, $m=33$.

45. Найти остаток от деления числа a на m, если:
1) $a=10^{245}+123456789$, $m=11$;
2) $a=7\cdot2^{25}+13\cdot14^9$, $m=5$.

46. Найти натуральное число $m \neq 1$, если натуральные числа $8n+3$ и $7n+1$ делятся на m.

47. Пусть m и n — натуральные числа, такие, что число $m+n+2$ делится на 6. Доказать, что число m^3+n^3+8 также делится на 6.

48. Доказать, что число n^5-6n делится на 5 при любом $n \in N$.

49. Найти все целые числа n, такие, что число a является целым, если:

1) $a=\dfrac{n^2+2}{n-1}$; 2) $a=\dfrac{2n^2+1}{2n^2-1}$;

3) $a=\dfrac{n^4+3n^2+7}{n^2+1}$; 4) $a=\dfrac{n^5+3}{n^2+1}$.

50. Найти все целочисленные решения уравнения:
1) $x^2=y^2+4y+8$; 2) $x^3-3x^2-xy-8x-2y+27=0$;
3) $3xy+16x+13y+61=0$; 4) $3xy-10x+16y-45=0$.

Вопросы к главе II

1. Натуральное число a делится на натуральные числа m и n. Можно ли утверждать, что a делится на mn?

2. Натуральные числа a и b не делятся на натуральное число m. Можно ли утверждать, что на m не делится:
1) их сумма; 2) их произведение?

3. Натуральные числа a и b не делятся на 3. Можно ли утверждать, что число a^2-b^2 делится на 3?

4. Можно ли утверждать, что при любых натуральных m и n делится на $m+n$ число a, если:

1) $a=m^3+n^3$; 2) $a=m^5+n^5$;

3) $a=m^6-n^6$; 4) $a=\dfrac{m^8-n^8}{m^2+n^2}$?

5. Найти количество натуральных чисел, являющихся делителями числа a (включая единицу и само число a), если:
1) $a=64$; 2) $a=600$.

6. Сформулировать признаки делимости на 6, 8, 12, 15, 125.

Проверь себя!

1. Найти остаток от деления числа 123456781 на 9 (не производя деления).
2. Найти остаток от деления числа $10 \cdot 5^{15}$ на 4.
3. Найти последнюю цифру числа $a=2^{85}+3^{73}$.
4. Не выполняя операций вычитания и деления, выяснить, делится ли число $a=8675423-5723468$ на 3.
5. Выяснить, делится ли число 123456780 на 12.
6. Доказать, что при любом $n \in N$ число $a=n^3+35n$ делится на 6.

Историческая справка

Основной задачей теории делимости считается задача выяснения делимости одних целых чисел на другие, нахождения остатков от деления этих чисел. В основе теории делимости лежит утверждение, доказанное французским ученым Б. Паскалем (1623—1662): «Пусть натуральное число $n>1$ записано в q-ичной системе:

$$n=a_kq^k+a_{k-1}q^{k-1}+\ldots+a_1q+a_0.$$

Обозначим через r_s остаток от деления q^s на $p>1$ ($s=1, 2, \ldots, k$) и составим число

$$m=a_kr_k+a_{k-1}r_{k-1}+\ldots+a_1r+a_0,$$

тогда числа m и n имеют одинаковые остатки при делении на p».

Рассмотренную в главе теорию сравнений (которую также называют арифметикой сравнений, арифметикой остатков или арифметикой вычетов) разработал немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855). Отметим, что для Ферма и Эйлера попытки создания в свое время такой теории не увенчались успехом.

Помимо Ферма и Эйлера, значительный вклад в решение отдельных задач теории делимости внес французский ученый Ж. Лагранж (1736—1813).

Различными обобщениями золотой теоремы Гаусса (квадратичным законом взаимности) ученые занимались вплоть до наших дней. Значительный вклад в этом направлении внес отечественный математик И. Р. Шафаревич (род. в 1923 г.).

Глава III

Многочлены. Алгебраические уравнения

Все, что было без этого темно, сомнительно и неверно, математика сделала ясным, верным и очевидным.

М. В. Ломоносов

§ 1. Многочлены от одного переменного

Напомним, что в результате сложения, вычитания и умножения многочленов снова получаются многочлены. В этом параграфе познакомим вас со способами деления многочленов уголком и расскажем подробнее, как применяется этот способ для решения алгебраических уравнений.

Любой многочлен (обозначим его $P(x)$), содержащий только одно переменное x и его натуральные степени, можно записать в *стандартном виде*

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \qquad (1)$$

где a_0, $a_1, \ldots$, a_{n-1}, a_n — некоторые действительные числа. Если $a_0 \neq 0$, то многочлен $P(x)$ называют *многочленом степени n* (или n-й степени), член a_0x^n — *старшим* членом, a_n — *свободным* членом. Многочлен $P(x)=a_0$, где a_0 — заданное число, $a_0 \neq 0$, называют *многочленом нулевой степени*. Число 0 называют *нулевым многочленом*.

Чтобы показать, что степень многочлена равна n, вместо $P(x)$ иногда пишут $P_n(x)$. Для обозначения многочленов используют также и другие буквы: $Q_k(x)$, $M_n(x)$ и т. д. Например, $Q_2(x)=x^2+2x+2$, $M_3(x)=x^3-2x+2$.

Определение

Два многочлена от одного переменного x, представленные в стандартном виде, *тождественно равны*, если равны их степени и равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Задача 1. Найти числа a, b и c, если многочлен x^3+6x^2+ $+ax+b$ равен кубу двучлена $x+c$.

▷ По формуле куба суммы получаем

$$(x+c)^3=x^3+3x^2\cdot c+3x\cdot c^2+c^3.$$

С помощью определения тождественного равенства многочленов получим систему $\begin{cases}3c=6,\\ a=3c^2,\\ b=c^3,\end{cases}$ откуда $c=2$, $a=12$, $b=8$.

Ответ. $c=2$, $a=12$, $b=8$. ◀

Многочлены имеют много свойств, аналогичных свойствам целых чисел. Саму запись многочлена $P(x)$ в виде (1) можно считать аналогом записи чисел в десятичной системе счисления.

Степень произведения двух многочленов равна сумме степеней многочленов множителей.

Особое место в теории многочленов занимает деление одного многочлена на другой.

Рассмотрим на примерах деление многочленов уголком.

Задача 2. Разделить уголком многочлен $P(x)=10x^2-7x-12$ на многочлен $Q(x)=5x+4$.

▷
$$\begin{array}{lr|ll}
\boxed{\text{делимое}} & -\,10x^2-7x-12 & 5x+4 & \boxed{\text{делитель}}\\ \cline{3-3}
 & \underline{10x^2+8x} & 2x-3 & \boxed{\text{частное}}\\
\boxed{\text{первый остаток}} & -\,-15x-12 & & \\
 & \underline{-15x-12} & & \\
 & 0 & \boxed{\text{остаток}} &
\end{array}$$

Остаток равен нулю, поэтому многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$.

Ответ. $2x-3$. ◀

Пусть заданы многочлен $P(x)$ степени $n\geqslant 1$ и не нулевой многочлен $Q(x)$. Если существует многочлен $M(x)$, такой, что для всех x справедливо равенство

$$P(x)=M(x)\cdot Q(x), \qquad (2)$$

то говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, а формулу (2) называют *формулой деления многочленов*.

Задача 3. Разделить многочлен $P(x)=3x^4+2x^2-1$ на многочлен $Q(x)=x^2+x$.

▷ Выполним деление уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\,3x^4+2x^2-1 & x^2+x \\ \underline{3x^4+3x^3} & \overline{3x^2-3x+5} \\ -\,-3x^3+2x^2-1 & \\ \underline{-3x^3-3x^2} & \\ -\,5x^2-1 & \\ \underline{5x^2+5x} & \\ -5x-1 & \end{array}$$

На этом деление многочлена $3x^4+2x^2-1$ на многочлен x^2+x заканчивается, так как степень остатка $-5x-1$ меньше степени делителя x^2+x.

Ответ. $3x^2-3x+5$ — частное, $-5x-1$ — остаток. ◀

Обратим внимание на то, что степень частного в задаче 3 равна разности степеней делимого и делителя, а степень остатка меньше степени делителя.

Вообще если многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ делят на многочлен $Q(x)$ степени $k \geqslant 1$, $k \leqslant n$, то справедливо равенство

$$P(x)=M(x)\cdot Q(x)+R(x), \tag{3}$$

где $M(x)$ — частное, степень которого $m=n-k$, $R(x)$ — остаток, степень которого $l<k$.

Тождественное равенство (3) называют *формулой деления многочленов с остатком.*

Итак, чтобы разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, нужно:

1) расположить делимое и делитель по убывающим степеням x;

2) разделить старший член делимого на старший член делителя; полученный одночлен сделать первым членом частного;

3) первый член частного умножить на делитель, результат вычесть из делимого; полученная разность является первым остатком;

4) чтобы получить следующий член частного, нужно с первым остатком поступить так, как поступали с делимым и делителем в пунктах 2 и 3.

Это следует продолжать до тех пор, пока не будет получен остаток, равный нулю, или остаток, степень которого меньше степени делителя.

Задача 4. Разделить многочлен $3x+4x^4+1-15x^3+2x^5-9x^2$ на многочлен $2x^2-x^3$.

▷ Расположим делимое и делитель по убывающим степеням x и выполним деление уголком:

$$
\begin{array}{rl}
-\underline{\begin{array}{r}2x^5+4x^4-15x^3-9x^2+3x+1\\ 2x^5-4x^4\end{array}} & \begin{array}{|l}-x^3+2x^2\\ \hline -2x^2-8x-1\end{array}\\
-\underline{\begin{array}{r}8x^4-15x^3-9x^2+3x+1\\ 8x^4-16x^3\end{array}} & \\
-\underline{\begin{array}{r}x^3-9x^2+3x+1\\ x^3-2x^2\end{array}} & \\
-7x^2+3x+1 &
\end{array}
$$

Ответ. $-2x^2-8x-1$ — частное, $-7x^2+3x+1$ — остаток. ◄

Свойства делимости многочленов

1. Если многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, а многочлен $Q(x)$ делится на многочлен $M(x)$, то многочлен $P(x)$ делится на многочлен $M(x)$.

Например, многочлен $81x^4-1$ делится на многочлен $9x^2-1$, а многочлен $9x^2-1$ делится на многочлен $3x+1$, поэтому многочлен $81x^4-1$ делится на многочлен $3x+1$.

2. Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на многочлен $M(x)$, то многочлены $P(x)+Q(x)$ и $P(x)-Q(x)$ делятся на многочлен $M(x)$, а многочлен $P(x)\cdot Q(x)$ делится на многочлен $M^2(x)$.

Например, каждый из многочленов x^3-1 и $3x^2-7x+4$ делится на многочлен $x-1$, поэтому многочлен x^3+3x^2-7x+3, равный их сумме, и многочлен x^3-3x^2+7x-5, равный их разности, делится на $x-1$, а многочлен $3x^5-7x^4+4x^3-3x^2+7x-4$, равный их произведению, делится на многочлен $(x-1)^2=$ $=x^2-2x+1$.

Задача 5. Найти числа a и b из тождественного равенства

$$x^4+2x^3-16x^2-2x+15=(x+1)(x^3+ax^2-17x+b).$$

▷ Выполним умножение многочленов в правой части данного равенства $(x+1)(x^3+ax^2-17x+b)=x^4+ax^3-17x^2+bx+x^3+ax^2-$ $-17x+b=x^4+(a+1)x^3+(a-17)x^2+(b-17)x+b$.

Из тождественного равенства многочленов следует:

$a+1=2$, $a-17=-16$, $b-17=-2$, откуда $a=1$, $b=15$. ◄

Задача 6. Не выполняя деления многочленов, найти остаток от деления многочлена $P(x)=x^{50}+x^{25}+4$ на многочлен $Q(x)=x^2-1$.

▷ Обозначим остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ через $R(x)$. Очевидно, $R(x)=ax+b$, так как степень остатка меньше степени делителя.

По формуле деления с остатком получаем

$$x^{50}+x^{25}+4=(x^2-1)M(x)+ax+b.$$

При $x=1$

$$1+1+4=0\cdot M(x)+a+b, \text{ или } 6=a+b.$$

При $x=-1$

$$1-1+4=0\cdot M(x)-a+b, \text{ или } 4=-a+b.$$

Полученные уравнения относительно a и b образуют систему $\begin{cases} a+b=6, \\ -a+b=4, \end{cases}$ решив которую, получаем $a=1$, $b=5$.

Ответ. $R(x)=x+5$. ◄

Задача 7. При каких натуральных значениях n выражение $\frac{2n^2-11n+13}{n-3}$ является целым числом?

▷ Разделим числитель дроби на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 2n^2-11n+13 & n-3 \\ \cline{2-2} \underline{2n^2-6n} \quad\quad & 2n-5 \\ -5n+13 & \\ \underline{-5n+15} & \\ -2 & \end{array}$$

Таким образом, исходное выражение равно $2n-5-\frac{2}{n-3}$, что является целым числом тогда и только тогда, когда 2 нацело делится на $n-3$. Поскольку целыми делителями числа 2 являются числа -2, -1, 1, 2, и только они, получаем, что n может быть равным только числам 1, 2, 4, 5. ◄

Упражнения

1. Найти частное:

1) $(x^2+3x-4):(x+4)$;
2) $(x^2-7x+10):(x-5)$;
3) $(6x^3+7x^2-6x+1):(3x-1)$;
4) $(4x^3-5x^2+6x+9):(4x+3)$.

2. Найти частное:

1) $(15x^3-x^2+8x-4):(3x^2+x+2)$;
2) $(9x^4-9x^3-x^2+3x-2):(3x^2-2x+1)$.

3. Записать формулу деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

1) $P(x)=x^2-5x+6$, $Q(x)=x+4$;
2) $P(x)=4x^2-x-38$, $Q(x)=x+3$;
3) $P(x)=x^3-x^2+4$, $Q(x)=x+2$;
4) $P(x)=2x^3+8x^2-7$, $Q(x)=2x^2-1$.

4. Найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

1) $P(x)=2x^5+4x^4-5x^3-9x^2+13$, $Q(x)=x^3+2x^2$;
2) $P(x)=3x^5+2x^4+3x+7$, $Q(x)=3x+2$;

3) $P(x)=6x^4+x^3+x,\quad Q(x)=2x^4-3x^2;$
4) $P(x)=15x^6-5x^4+6x^3-1,\quad Q(x)=3x^3-x.$

5. Найти числа a и b из тождественного равенства:
1) $2x^5-4x^2+5x-3=(x-1)(2x^4+ax^3+bx^2-2x+3);$
2) $x^5+x^3-2=(x-1)(x^4-ax^3+2x^2+2x+b).$

6. Выяснить, при каком значении a многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$:
1) $P(x)=6x^2+7x+a,\quad Q(x)=2x+3;$
2) $P(x)=x^6+x^5-4x^4-4x^3+ax^2+4x+a,\quad Q(x)=x+1;$
3) $P(x)=x^3+ax^2+ax-15,\quad Q(x)=x-3;$
4) $P(x)=-4x^2+ax+5,\quad Q(x)=4x+5.$

7. Не выполняя деления многочленов, найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:
1) $P(x)=x^7+x^6-6x^5+x^2-5x,\quad Q(x)=x^2+x-6;$
2) $P(x)=x^5-2x^4+x^3+x-2,\quad Q(x)=x^2-4.$

8. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:
1) $P(x)=x^5+4x^4+x^2+3,\quad Q(x)=x^2+6x+8;$
2) $P(x)=x^8-4x^6+3x^3-x,\quad Q(x)=x^2-4.$

9. При каких натуральных значениях n выражение $\frac{2n-1}{n+1}$ является натуральным числом?

10. При каких целых значениях n выражение $\frac{3n^2-7n+17}{n+4}$ является натуральным числом?

11. При каких целых значениях n выражение $\frac{2n^2-13n-45}{3n-27}$ является целым числом?

§ 2. Схема Горнера

Задача 1. Разделить многочлен $P(x)=2x^3-3x+5$ на многочлен $Q(x)=x-4$.

▷ Разделим многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\;2x^3-3x+5 & x-4 \\
\underline{2x^3-8x^2} & \overline{2x^2+8x+29} \\
-\;8x^2-3x+5 & \\
\underline{8x^2-32x} & \\
-\;29x+5 & \\
\underline{29x-116} & \\
121 &
\end{array}$$

Ответ. $M(x)=2x^2+8x+29$, $R(x)=121$. ◀

Деление многочлена

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

на многочлен $Q(x)=x-a$ удобно выполнять, используя алгоритм, связанный с именем английского математика Горнера.

Если $M(x)$ — частное от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x)=x-a$, то справедливо равенство

$$P(x)=M(x)(x-a)+R, \qquad (2)$$

где $M(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\ldots+c_{n-2}x+c_{n-1}$ — многочлен степени $n-1$, R — число.

Из (1) и (2) следует, что

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\ldots+c_{n-1})(x-a)+R. \qquad (3)$$

Чтобы найти коэффициенты многочлена $M(x)$ и число R, раскроем скобки в правой части равенства (3) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа. Получим $a_0=c_0$, $a_k=c_k-ac_{k-1}$ при $k=1, 2, \ldots, n$; $c_n=R$. Отсюда следует, что $c_0=a_0$, $c_k=a_k+ac_{k-1}$ при $k=1, 2, \ldots, n$; $c_n=R$.

Вычисление коэффициентов многочлена и остатка производится с помощью следующей таблицы:

	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
a	$c_0=a_0$	$c_1=$ $=a_1+ac_0$	$c_2=$ $=a_2+ac_1$	…	$c_{n-1}=$ $=a_{n-1}+ac_{n-2}$	$R=$ $=a_n+ac_{n-1}$

Эта таблица называется *схемой Горнера*.

В первой строке этой таблицы содержатся коэффициенты a_0, a_1, …, a_n многочлена $P(x)$. Вторая строка заполняется по следующему правилу: «В первую клетку надо записать число a_0 из первой клетки первой строки. Во вторую клетку надо записать число a_1 из второй клетки первой строки и прибавить к нему произведение числа a на предшествующий элемент (число $c_0=a_0$) второй строки».
Следующая пустая клетка заполняется так: к стоящему над ней числу первой строки надо прибавить произведение числа a на предыдущее число второй строки.

Воспользуемся схемой Горнера для вычисления коэффициентов частного и остатка в задаче 1.

	2	0	-3	5
4	$c_0=2$	$c_1=4\cdot2=8$	$c_2=-3+4\cdot8=29$	$R=5+4\cdot29=121$

Следовательно, $2x^3-3x+5=(x-4)(2x^2+8x+29)+121$.

Задача 2. По схеме Горнера разделить многочлен $P(x)=$ $=x^4-2x^3+x^2+x+1$ на двучлен $x+3$.

	1	-2	1	1	1
-3	1	$(-2)+(-3)\cdot1=$ $=-5$	$1+(-3)(-5)=$ $=16$	$1+(-3)\cdot16=$ $=-47$	$1+(-3)(-47)=$ $=142$

Ответ. $P(x)=(x+3)(x^3-5x^2+16x-47)+142$. ◄

Если нужно разделить с остатком многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)=ax+b$, $a\neq0$, то можно сначала разделить его по схеме Горнера на многочлен $Q_1(x)=x-\left(-\frac{b}{a}\right)$. Тогда если $M(x)$ и R — частное и остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$, а $M_1(x)$, R_1 — частное и остаток от деления $P(x)$ на $Q_1(x)$, то $R=R_1$, а $M(x)=\frac{1}{a}M_1(x)$.

Задача 3. Разделить многочлен $P(x)=x^3-2x^2-10x+3$ на многочлен $Q(x)=2x+5$.

▷ Разделим многочлен $P(x)$ на двучлен $Q_1(x)=x-\left(-\frac{5}{2}\right)$ по схеме Горнера.

	1	-2	-10	3
$-\frac{5}{2}$	1	$-2+\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot1=-\frac{9}{2}$	$-10+\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{8}$

Итак, $M_1(x)=x^2-\frac{9}{2}x+\frac{5}{4}$, тогда $M(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{9}{2}x+\frac{5}{4}\right)=$ $=\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{5}{8}$, $R=R_1=-\frac{1}{8}$.

Ответ. $P(x)=(2x+5)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{5}{8}\right)-\frac{1}{8}$. ◄

Упражнения

12. Выполнить деление многочленов по схеме Горнера:
1) $(6x^3-11x^2-1):(x-2)$; 2) $(2x^4-x^3-x^2+3x-2):(x+2)$;
3) $(3x^5+3x^4+x^3-x-2):(x+1)$; 4) $(3x^3+4x^2):(3x+2)$.

13. При каком значении a многочлен x^3+ax+1 при делении на двучлен $x-a$ дает остаток, равный 3?

§ 3. Многочлен $P(x)$ и его корень. Теорема Безу

Задача 1. Дан многочлен $P(x)=2x^4-3x^3+7x^2-10x-16$. Найти $P(-1)$, $P(1)$, $P(0)$, $P(2)$.

▷ $P(-1)=2\cdot(-1)^4-3(-1)^3+7(-1)^2-10(-1)-16=2+3+7+10-16$; т. е. $P(-1)=6$; аналогично $P(1)=-20$, $P(0)=-16$, $P(2)=0$. ◄

Определение

Значение x, при котором многочлен $P(x)$ обращается в нуль, называют *корнем* этого многочлена.

Например, один из корней многочлена $P(x)=2x^4-3x^3+7x^2-10x-16$ равен 2, так как $P(2)=0$.

Задача 2. Разделить многочлен $P(x)=2x^4-3x^3+7x^2-10x-16$ на двучлен $x-1$.

▷ Воспользуемся схемой Горнера:

	2	−3	7	−10	−16
1	2	−1	6	−4	−20

Ответ. $P(x)=(x-1)(2x^3-x^2+6x-4)-20$. ◀

Сравнивая результаты решения задач 1 и 2, заметим, что остаток от деления данного многочлена $P(x)$ на $x-1$ равен значению этого многочлена при $x=1$, т. е. $R=P(1)=-20$.

Этот факт не случаен. Он выражает знаменитую *теорему Безу* (Этьен Безу (1730—1783) — французский математик).

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ равен значению этого многочлена при $x=a$, т. е.

$$P(a)=R.$$

○ Запишем формулу деления многочленов с остатком:

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R.$$

Заметим, что остаток R не содержит x, так как делитель $(x-a)$ — многочлен первой степени.

При $x=a$ из этого равенства получаем $P(a)=(a-a)Q(a)+R$, или $P(a)=0\cdot Q(a)+R$, т. е. $R=P(a)$. ●

Задача 3. Найти остаток от деления многочлена $P(x)=2x^4+3x^3-4$ на $x+2$.

▷ Так как $x+2=x-(-2)$, то $a=-2$. По теореме Безу находим $R=P(-2)=2\cdot(-2)^4+3\cdot(-2)^3-4=4$. ◀

При делении многочлена $P(x)$ на двучлен $ax+b$ получается остаток, равный значению этого многочлена при $x=-\frac{b}{a}$, т. е. $R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Например, остаток от деления многочлена $P(x)=x^3-x^2+2x-1$ на двучлен $2x-4$ равен $P(2)=8-4+4-1=7$.

Теорема Безу применяется и для определения числа корней многочлена.

Пусть многочлен $P(x)$ не равен тождественно нулю, и предположим, что, кроме корня x_1, многочлен $P(x)$ имеет другой корень $x_2 \neq x_1$. По теореме Безу $P(x)$ делится на $x - x_1$, т. е.

$$P(x) = (x - x_1) \cdot M_1(x). \qquad (1)$$

Подставим в это тождество значение $x = x_2$. Так как x_2 — корень многочлена, то $P(x_2) = 0$. Значит, $(x_2 - x_1) \cdot M_1(x_2) = 0$. Так как $x_2 \neq x_1$, то $M_1(x_2) = 0$, т. е. x_2 — корень многочлена $M_1(x)$. Применяя теорему Безу теперь уже к многочлену $M_1(x)$, получаем равенство

$$M_1(x) = (x - x_2) \cdot M_2(x). \qquad (2)$$

Подставляя равенство (2) в равенство (1), получаем

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot M_2(x). \qquad (3)$$

Предположим, что многочлен $P(x)$ имеет k разных корней $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$. Повторяя наше рассуждение k раз, получим, что многочлен $P(x)$ должен делиться на $(x - x_1) \ldots (x - x_k)$, т. е.

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k) \cdot M_k(x). \qquad (4)$$

Пусть степень многочлена $P(x)$ равна n. Справа в равенстве (4) стоит многочлен степени не меньше чем k, а слева — степени n, значит, $n \geqslant k$. Полученный результат формулируется в виде теоремы.

Теорема

Число различных корней многочлена, тождественно не равного нулю, не превосходит его степени.

Эта теорема, доказанная в XVII в. философом и математиком Р. Декартом (1596—1650), дает возможность определить равенство многочленов.

Равенство многочленов

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$ можно определить двояко (можно доказать, что оба понимания термина «равенство многочленов» фактически совпадают):

1) считать их равными, если все их соответствующие коэффициенты одинаковы, т. е. $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_m$;

2) считать их равными, если при подстановке вместо переменной любого числа c их значения равны, т. е. $P(c) = Q(c)$ при любом c.

Если многочлен $P(x) = (x - x_0)^k \cdot M(x)$, где $M(x)$ — многочлен, не имеющий корнем $x = x_0$, то x_0 для $k \geqslant 2$ называют *кратным корнем*, а число k — *кратностью корня* x_0.

Например, многочлен $x^3 + x^2 - 4x - 4$, имеющий двукратный корень $x_0 = 2$, можно разложить на множители так:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x - 2)^2(x - 1).$$

Упражнения

14. Выяснить, является ли число a корнем многочлена $P(x)$, если:

1) $P(x)=2x^4+5x^3-2x^2-9$, $a=-3$;

2) $P(x)=2x^5-3x^4+3x^3-x^2-4x+2$, $a=\frac{1}{2}$.

15. Найти остаток R от деления многочлена $P(x)$ на $x-a$, если:

1) $P(x)=x^5+3x^4-8$, $a=-2$;

2) $P(x)=4x^{11}-x^{39}-5$, $a=1$.

16. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x)=ax+b$, не выполняя деления:

1) $P(x)=x^3-3x^2+5x+7$, $Q(x)=2x+1$;

2) $P(x)=x^5-x^3+2x+1$, $Q(x)=3x+6$.

17. Найти корни многочлена третьей степени:

1) $4x^3-x$; 2) $x^3-x^2-16x+16$;

3) x^3+2x^2-x-2; 4) $2x^3-x^2-50x+25$.

18. Найти такое число c, чтобы многочлен $P(x)=x^5-x^4+cx^3$ делился на двучлен:

1) $x+4$; 2) $x-5$.

19. Найти все корни многочлена $ax^3+x^2-8x-12$, если один из них равен 3.

20. Найти все корни многочлена $6x^3+bx^2-5x-2$, если одним из них является число $-\frac{1}{2}$.

21. При каких значениях a, b и c многочлен $P(x)=x^5+ax^3+$ $+bx^2+c$ делится на $x+2$, а при делении на x^2-1 дает остаток $-3x+3$?

§ 4. Алгебраическое уравнение. Следствия из теоремы Безу

Алгебраическим уравнением называют уравнение вида

$$P_n(x)=0, \qquad (1)$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n\geqslant 1$.

Степенью алгебраического уравнения называют степень n многочлена $P_n(x)$.

Каждый корень уравнения (1) является также корнем многочлена $P_n(x)$.

<u>Задача 1.</u> Решить уравнение $x^3-2x^2-5x+6=0$.

▷ Легко догадаться, что $x=1$ — корень этого уравнения: $1-2-5+6=0$.

Разделим многочлен x^3-2x^2-5x+6 на $x-1$ уголком:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2-5x+6 & x-1 \\
\underline{x^3-x^2} & \overline{x^2-x-6} \\
-x^2-5x+6 & \\
\underline{-x^2+x} & \\
-6x+6 & \\
\underline{-6x+6} & \\
0 &
\end{array}
$$

Итак, $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$.

Решая уравнение $(x-1)(x^2-x-6)=0$, получаем $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=3$. ◀

При решении этой задачи с помощью деления многочленов удалось понизить степень уравнения — свести решение кубического уравнения к решению уравнений первой и второй степени. Это стало возможным, так как остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-1$ оказался равным нулю.

Для решения алгебраических уравнений полезны следствия из теоремы Безу.

Следствие 1. Если $x=a$ — корень уравнения $P_n(x)=0$, то $R=0$ и многочлен $P_n(x)$ делится на двучлен $x-a$.

Следствие 2. Если многочлен $P_n(x)$ делится на двучлен $x-a$, то $x=a$ — корень уравнения $P_n(x)=0$.

Оба следствия можно выразить одной формулировкой:

Для того чтобы многочлен $P_n(x)$ делился на двучлен $x-a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=a$ он обращался в нуль.

Задача 2. Выяснить, делится ли многочлен

$$P(x)=x^{100}+3x^{79}+x^{48}-x^{27} \text{ на } x+1.$$

▷ Остаток от деления $P(x)$ на $x+1$ равен

$P(-1)=(-1)^{100}+3(-1)^{79}+(-1)^{48}-(-1)^{27}=1-3+1+1=0$.

Ответ. Многочлен $P(x)$ делится на $x+1$. ◀

Задача 3. Разложить на множители многочлен $x^4+3x^3-13x^2-9x+30$, если известно, что числа 2 и -5 — его корни.

▷ Применяя следствия из теоремы Безу, утверждаем, что данный многочлен делится на $(x-2)$ и на $(x+5)$, т. е. делится на произведение $(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+3x^3-13x^2-9x+30 & x^2+3x-10 \\
\underline{x^4+3x^3-10x^2} & \overline{x^2-3} \\
-3x^2-9x+30 & \\
\underline{-3x^2-9x+30} & \\
0 &
\end{array}
$$

Итак, $x^4+3x^3-13x^2-9x+30=(x-2)(x+5)(x^2-3)=$
$=(x-2)(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$. ◄

Задача 4. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-2$ равен 6, а остаток от деления его на $x+3$ равен 1. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-2)(x+3)$.

▷ Степень многочлена $Q(x)=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$ равна 2, поэтому в остатке получится многочлен $R(x)$ степени не выше 1, т. е. $R(x)=ax+b$. Формула деления такова:

$$P(x)=(x-2)(x+3)M(x)+ax+b. \qquad (2)$$

Так как $P(2)=6$, $P(-3)=1$, то, подставляя в формулу (2) значения $x=2$ и $x=-3$, получаем систему $\begin{cases} 2a+b=6, \\ -3a+b=1, \end{cases}$ решая которую, находим $a=1$, $b=4$.

Ответ. $x+4$. ◄

Упражнения

22. Выяснить, делится ли многочлен $P(x)$ на $x-a$, если:
1) $P(x)=2x^4+3x^3-2x^2-5$, $a=-3$;
2) $P(x)=7x^{16}+4x^{13}-3x^{10}$, $a=-1$.

23. Разложить многочлен $P(x)$ на множители, если a — корень этого многочлена:
1) $P(x)=x^3+5x^2+11x+7$, $a=-1$;
2) $P(x)=3x^3+10x^2+4x+3$, $a=-3$;
3) $P(x)=x^3+4x^2-7x-10$, $a=-5$;
4) $P(x)=x^3-2x^2-5x+10$, $a=2$.

24. Решить уравнение, если известен один его корень:
1) $x^3+3x^2-25x-75=0$, $x_1=-3$;
2) $2x^3+x^2-4x-2=0$, $x_1=-\frac{1}{2}$.

25. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x+4$ равен 5, а остаток от деления его на $x-5$ равен 14. Найти остаток от деления $P(x)$ на $(x+4)(x-5)$.

26. При делении многочлена на $x+3$ остаток равен 10, а при делении его на $x+5$ остаток равен 14. Найти остаток при делении этого многочлена на $x^2+8x+15$.

27. При делении многочлена на $x+2$ остаток равен 6, при делении его на $x-3$ остаток равен 26, а при делении его на $x+4$ остаток равен 12. Найти остаток при делении этого многочлена на $(x+2)(x-3)(x+4)$.

28. Найти такие числа b и c, чтобы многочлен $x^5+bx^4+cx^3$ делился на $x+2$ и $x-3$.

29. Доказать, что многочлен $x^9+bx^8+cx^7$ делится на $x+a_1$ и на $x+a_2$, где $a_1a_2\neq 0$, тогда и только тогда, когда $b=a_1+a_2$ и $c=a_1a_2$.

§ 5. Решение алгебраических уравнений разложением на множители

Одним из способов решения алгебраического уравнения является разложение его левой части на множители.

Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$.

1) Если x_1 — корень многочлена $P_n(x)$, т. е. $P_n(x_1)=0$, то по теореме Безу многочлен $P_n(x)$ делится на $x-x_1$, т. е.

$$P_n(x)=(x-x_1)M_{n-1}(x),$$

где $M_{n-1}(x)$ — частное от деления $P_n(x)$ на $x-x_1$ (многочлен $M_{n-1}(x)$ степени $n-1$ можно найти делением $P_n(x)$ на $x-x_1$ уголком).

2) Пусть x_2 — корень многочлена $M_{n-1}(x)$. Тогда

$$M_{n-1}(x)=(x-x_2)M_{n-2}(x),$$

поэтому

$$P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)M_{n-2}(x).$$

Если многочлен $P_n(x)$ имеет n действительных корней, то его можно представить в виде

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

где a_0 — коэффициент старшего члена многочлена $P_n(x)$.

Заметим, что среди чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ могут оказаться и равные числа.

Способ нахождения целых корней некоторых уравнений дает следующая теорема:

Теорема

Если уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, где $a_n \neq 0$, имеет целый корень, то этот корень является делителем числа a_n (свободного члена уравнения).

○ Пусть $x=m$ — целый корень уравнения (1), т. е.

$$a_0m^n+a_1m^{n-1}+\dots+a_{n-1}m+a_n=0. \qquad (2)$$

Из этого равенства следует, что $m \neq 0$, так как $a_n \neq 0$. Разделив равенство (2) на $m \neq 0$, получаем

$$\frac{a_n}{m}=-a_0m^{n-1}-a_1m^{n-2}-\dots-a_{n-1}.$$

Правая часть этого равенства — целое число, так как по условию $m, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ — целые числа. Следовательно, $\frac{a_n}{m}$ — целое число, т. е. число a_n делится на m. ●

Задача 1. Решить уравнение

$$4x^5+4x^4-13x^3-6x^2+9x+2=0.$$

▷ Многочлен, стоящий в левой части уравнения, обозначим $P_5(x)$. Найдем все целые корни уравнения. Делителями числа 2 являются числа 1; -1; 2; -2. Проверим, являются ли эти числа корнями многочлена: $P_5(1)=0$, $P_5(-1)=0$, $P_5(2)=84\neq 0$, $P_5(-2)=0$. Поэтому $P_5(x)=(x-1)(x+1)(x+2)Q_2(x)$.

Делением многочлена $P_5(x)$ на многочлен

$$(x-1)(x+1)(x+2)=x^3+2x^2-x-2$$

покажем, что $Q_2(x)=4x^2-4x-1$. Корнями этого многочлена являются числа $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{2})$.

Ответ. $x_{1,2}=\pm 1$, $x_3=-2$, $x_{4,5}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{2})$. ◀

<u>Задача 2.</u> Разложить на простые множители многочлен

$$P_4(x)=x^4+3x^3-5x^2-13x+6.$$

▷ 1) Найдем целый корень многочлена $P_4(x)$, если такой есть. Согласно теореме этот корень должен быть делителем числа 6. Выпишем все делители числа 6:

$$1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 6;\ -6.$$

Проверяем по порядку: $P_4(1)=-8$, $x=1$ не является корнем; $P_4(-1)=12$, $x=-1$ не является корнем; $P_4(2)=0$, $x=2$ — корень $P_4(x)$.

Разделив $P_4(x)$ на $x-2$, получим

$$P_4(x)=(x-2)(x^3+5x^2+5x-3).$$

2) Найдем целый корень многочлена

$$M_3(x)=x^3+5x^2+5x-3,$$

если такой есть. Делителями числа -3 являются числа 1; -1; 3; -3. Числа 1 и -1 не являются корнями многочлена $M_3(x)$, так как уже установлено, что они не являются корнями многочлена $P_4(x)$. Проверяем числа 3 и -3: $M_3(3)=84$, $x_1=3$ не является корнем; $M_3(-3)=0$, $x_2=-3$ — корень $M_3(x)$.

Разделив $M_3(x)$ на $x+3$, получим $M_3(x)=(x+3)(x^2+2x-1)$.

3) Для разложения квадратного трехчлена на множители решаем уравнение $x^2+2x-1=0$, находим его корни $x_3=-1+\sqrt{2}$, $x_4=-1-\sqrt{2}$. Поэтому $M_2(x)=x^2+2x-1=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$.

Ответ. $P_4(x)=(x-2)(x+3)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$. ◀

<u>Задача 3.</u> Найти все значения a и b, при которых уравнение $4x^4+ax^3+bx^2+x+2=0$ имеет корни $x_1=2$ и $x_2=-1$. Найти остальные корни этого уравнения.

▷ Подставляя в данное уравнение $x=2$ и $x=-1$, получаем систему $\begin{cases}64+8a+4b+2+2=0,\\ 4-a+b-1+2=0,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}2a+b=-17,\\ a-b=5.\end{cases}$

Решая эту систему, находим $a=-4$, $b=-9$. Следовательно, данное уравнение таково: $4x^4-4x^3-9x^2+x+2=0$.

По теореме Безу левая часть этого уравнения делится на двучлены $(x-2)$, $(x+1)$ и поэтому делится на их произведение $(x-2)(x+1)=x^2-x-2$. Выполним это деление:

$$\begin{array}{r|l} -\,4x^4-4x^3-9x^2+x+2 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2} 4x^4-4x^3-8x^2 \quad\quad\quad & 4x^2-1 \\ \cline{1-1} -\,-x^2+x+2 & \\ -x^2+x+2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Следовательно, данное уравнение можно записать в виде $(x-2)(x+1)(4x^2-1)=0$, откуда $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$.

Ответ. $a=-4$, $b=-9$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$. ◀

Сформулируем теорему (без доказательства).

Теорема

Если рациональное число $\frac{m}{n}$ является корнем целочисленного многочлена $a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k$, то a_k делится на m, а a_0 делится на n.

Таким образом, перебрав все комбинации пар делителей свободного и старшего членов целочисленного многочлена, можно найти его корни. Отметим, что согласно последней теореме рациональными корнями приведенного многочлена могут быть лишь целые числа. Кроме того, если свободный член многочлена равен нулю, то одним из корней этого многочлена является нуль.

Задача 4. Найти все корни многочлена

$$2x^4+x^3+x^2+x-1.$$

▷ Сначала найдем все рациональные корни. Поскольку делителями свободного члена являются лишь числа ± 1, а делителями старшего коэффициента являются числа ± 1, ± 2, и только они, рациональными корнями могут быть только числа ± 1 и $\pm\frac{1}{2}$. Непосредственная проверка показывает, что числа -1 и $\frac{1}{2}$ являются корнями исходного многочлена, а числа 1 и $-\frac{1}{2}$ нет. Далее, разделив наш многочлен на произведение двучленов $2x-1$ и $x+1$ (как мы знаем, при этом делении остаток должен быть равен нулю), получим x^2+1. Таким образом, можно разложить исходный многочлен на множители:

$$2x^4+x^3+x^2+x-1=(2x-1)(x+1)(x^2+1),$$

одновременно выяснив, что других действительных корней, кроме уже найденных, у него нет. ◀

Задача 5. Решить уравнение
$$\frac{6x^3}{x+1}+\frac{5x^2-17x+2}{x-2}=\frac{18x}{2+x-x^2}.$$
▷ $\frac{6x^3}{x+1}+\frac{5x^2-17x+2}{x-2}=\frac{-18x}{x^2-x-2}$;
$$6x^3(x-2)+(x+1)(5x^2-17x+2)=-18x,\ x\neq 2,\ x\neq -1;$$
$$6x^4-12x^3+5x^3-17x^2+2x+5x^2-17x+2=-18x;$$
$$6x^4-7x^3-12x^2+3x+2=0. \qquad (1)$$

Делители свободного члена уравнения (1) равны ± 1, ± 2.
$$6\cdot(-1)^4-7(-1)^3-12(-1)^2+1-2=6+7-12-3+2=0.$$

$$\begin{array}{r|l}
-\ 6x^4-7x^3-12x^2+3x+2 & x+1 \\
6x^4+6x^3 \qquad\qquad\qquad & \overline{6x^3-13x^2+x+2} \\
\hline
-\ -13x^3-12x^2 \qquad\quad & \\
-13x^3-13x^2 \qquad\quad & \\
\hline
-\ x^2+3x \qquad & \\
x^2+x \qquad & \\
\hline
-\ 2x+2 & \\
2x+2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Итак, $6x^4-7x^3-12x^2-x-2=(x+1)(6x^3-13x^2+x+2)$.

Решим уравнение $6x^3-13x^2+x+2=0$:
при $x=2$ получим $6\cdot 8-13\cdot 4+2+2=0$, т. е. $6x^3-13x^2+x+2$ делится на $x-2$.

	6	−13	+1	+2
2	6	−1	−1	0

Итак, $6x^3-13x^2+x+2=(x-2)(6x^2-x-1)$.

Решая уравнение $6x^2-x-1=0$, получаем $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$.
В результате корни уравнения (1) таковы: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-\frac{1}{3}$, $x_4=\frac{1}{2}$. Корни $x_1=-1$ и $x_2=2$ — посторонние.

Ответ. $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$. ◀

Задача 6. Решить уравнение $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$.
▷ Решим уравнение методом замены неизвестного. Пусть $x^2+x+1=y$. Преобразуем левую часть уравнения так:
$(x^2+x+1)((x^2+x+1)+1)-12=0$, $(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12=0$.

Тогда $y(y+1)-12=0$, $y^2+y-12=0$.

Это уравнение имеет корни $y_1=-4$, $y_2=3$.

Если $y=3$, то $x^2+x+1=3$, $x^2+x-2=0$, $x_1=1$, $x_2=-2$.

Если $y=-4$, то $x^2+x+5=0$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $x_1=1$, $x_2=-2$. ◄

Упражнения

30. Решить уравнение, если известен один его корень:

1) $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$, $x_1=2$;
2) $2x^4+12x^3+11x^2+6x+5=0$, $x_1=-1$;
3) $2x^5-x^4-12x^3+6x^2+18x-9=0$, $x_1=\frac{1}{2}$;
4) $3x^5+x^4-15x^3-5x^2+12x+4=0$, $x_1=-\frac{1}{3}$.

Решить уравнение (31—32).

31. 1) $x^3-4x^2+x+6=0$; 2) $x^3-3x^2+6x-4=0$.

32. 1) $x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0$; 2) $x^4-3x^3+x^2+3x-2=0$.

Найти рациональные корни уравнения (33—34).

33. 1) $(2x+1)(x^3+1)+x^2=2x(x^3+3)-5$;
2) $(2x^2-1)^2+x(2x-1)^2=(x+1)^2+16x^2-6$.

34. 1) $x^2(x-2)(6x+1)+x(5x+3)=1$;
2) $x^2(3x+1)-(x^2+1)^2=3$.

35. Числа 3 и -4 являются корнями уравнения x^3+x^2+ $+ax+b=0$. Найти a, b и третий корень этого уравнения.

36. Доказать теорему Виета для кубического уравнения: «Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, то

$$x_1+x_2+x_3=-a,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b,\ x_1x_2x_3=-c.»$$

37. Найти действительные корни уравнения:

1) $2x^5-x^4+2x-1=0$; 2) $4x^5-x^3-4x^2+1=0$;
3) $6x^6-x^5-x^4+6x^2-x-1=0$;
4) $4x^6+4x^5-x^4-5x^3-4x^2+x+1=0$.

38. Выяснить, является ли число a корнем многочлена $P(x)$, и найти другие целые его корни, если они имеются:

1) $P(x)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$, $a=-1$;
2) $P(x)=6x^4+5x^3-14x^2+x+2$, $a=1$.

39. Доказать, что если уравнение $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$ с целыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет рациональный корень, то этот корень — целое число.

40. Доказать, что если x_1, x_2 — корни многочлена $P(x)$, то $P(x)$ делится на многочлен $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$.

41. Доказать, что уравнение $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ заменой $x+\frac{1}{x}=t$ сводится к уравнению $at^2+bt+c-2a=0$.

42. Ввести вспомогательное неизвестное и решить уравнение:

1) $(2x^2-x-1)(2x^2-x-5)-5=0$;
2) $(3x^2-x-4)(3x^2-x+2)-7=0$.

43. Решить уравнение $(x^2-3x+2)(x^2-7x+12)=4$.

§ 6. Делимость двучленов $x^m \pm a^m$ на $x \pm a$

Следствиями теоремы Безу являются признаки делимости двучленов:

1) Двучлен $x^m - a^m$ *делится* на $x - a$ при любом $m \in N$.
2) Если m — *четное* число, то двучлен $x^m - a^m$ *делится* как на $x + a$, так и на $x - a$.
Если m — *нечетное* число, то двучлен $x^m - a^m$ *не делится* на $x + a$.
3) Двучлен $x^m + a^m$ *не делится* на $x - a$.
4) Если m — *нечетное* число, то двучлен $x^m + a^m$ *делится* на $x + a$.
Если m — *четное* число, то двучлен $x^m + a^m$ *не делится* ни на $x + a$, ни на $x - a$.

Например:

$$(x^2 - a^2):(x - a) = x + a;$$
$$(x^3 + a^3):(x + a) = x^2 - ax + a^2;$$
$$(x^4 - a^4):(x - a) = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3;$$
$$(x^5 - a^5):(x - a) = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4.$$

В самом деле, при делении двучлена $x^m - a^m$ на двучлен $x - a$ в частном получается многочлен $x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}$.

Остатки при делении (например, уголком) идут в таком порядке: $ax^{m-1} - a^m$ — первый остаток, $a^2x^{m-2} - a^m$ — второй остаток, ..., $a^m x^{m-m} - a^m = a^m - a^m = 0$ — последний m-й остаток.

Частное содержит m членов, а сумма показателей a и x в каждом члене одна и та же — равная $m-1$; при этом показатели x уменьшаются на 1 и показатели a увеличиваются на 1; коэффициенты всех членов частного равны 1. Поэтому сразу можно написать результат деления:

$$x^6 - a^6 = (x - a)(x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5).$$

Чтобы получить частное от деления $x^m - a^m$ на $x + a$ при m четном или частное от деления $x^m + a^m$ на $x + a$ при m нечетном, достаточно в многочлене-частном заменить a на $-a$.

Задача 1. Найти частное и остаток от деления двучлена $x^7 - 128$ на:

1) разность $x - 2$; 2) сумму $x + 2$.

▷ 1) По следствию 1 из теоремы Безу разность $x^7 - 128$ делится без остатка на разность $x - 2$. Частное $M(x) = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 64$, а остаток $R(x) = 0$.

2) По следствию 2 из теоремы Безу разность $x^7 - 128$ не делится на сумму $x + 2$. Частное $M(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64$, а остаток $R(-2) = (-2)^7 - 128 = -256$. ◀

Задача 2. Разложить на множители двучлен $x^5 + 243$.

▷ Сумма нечетных степеней двучлена $x^m + a^m$ делится на $x + a$. Поэтому $x^5 + 243 = x^5 + 3^5 = (x + 3)(x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81)$. ◀

Упражнения

44. С помощью следствий из теоремы Безу выполнить деление двучленов $x^k \pm a^n$ на $x \pm a$:

1) $(243x^5 - 32):(3x-2)$;

2) $(a^4x^4 - b^4):(ax-b)$;

3) $(x^{30}+1):(x^5+1)$;

4) $\left(3\frac{3}{8}a^6 + 8b^{12}\right):(1{,}5a^2+2b^4)$.

45. Каким должно быть целое число n, чтобы числа вида 10^n+1 делились на 11?

46. Каким должно быть целое число n, чтобы числа вида 7^n-1 делились на 8 и 6?

47. Доказать, что многочлен $(x^{n-1}-1)(x^n-1)(x^{n+1}-1)$, где $n \in N$, делится на произведение $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)$.

§ 7. Симметрические многочлены

Задача 1. Не решая уравнения $x^2-x-1=0$ (имеющего действительные корни), составить новое квадратное уравнение, корнями которого будут:

1) квадраты корней данного уравнения;

2) кубы корней данного уравнения.

▷ 1) Обозначим через y_1 и y_2 корни искомого уравнения, а через p и q его коэффициенты.

По теореме Виета для данного уравнения $x_1+x_2=1$, $x_1 \cdot x_2 = -1$, для искомого уравнения $y_1+y_2=-p$, $y_1 \cdot y_2 = q$. По условию задачи $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$. Тогда $p = -(x_1^2+x_2^2)$, $q = x_1^2 \cdot x_2^2$.

Чтобы найти значения p и q, нужно выразить $x_1^2+x_2^2$ и $x_1^2 \cdot x_2^2$ через x_1+x_2 и x_1x_2:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1^2-2(-1)=3,$$

$$x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1x_2)^2 = (-1)^2 = 1, \text{ т. е. } p=-3,\ q=1.$$

2) В этом случае $p = -(x_1^3+x_2^3)$, $q = x_1^3 \cdot x_2^3$.

Выразим сумму кубов чисел x_1 и x_2 и произведение кубов этих чисел через x_1+x_2 и $x_1 \cdot x_2$:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=1(3+1)=4,$$

$$x_1^3 \cdot x_2^3 = (x_1 \cdot x_2)^3 = -1, \text{ т. е. } p=-4,\ q=-1.$$

Ответ. 1) $x^2-3x+1=0$; 2) $x^2-4x-1=0$. ◀

При решении этой задачи нам понадобилось выразить сумму квадратов $x_1^2+x_2^2$ и сумму кубов $x_1^3+x_2^3$ через x_1+x_2 и x_1x_2.

Все эти выражения обладают общим замечательным свойством *симметричности* — их значения не меняются при перестановке переменных x_1 и x_2, т. е. при замене x_1 на x_2, а x_2 на x_1.

Каждое из этих выражений является многочленом от двух переменных x_1 и x_2; их называют *симметрическими многочленами*, причем многочлены x_1+x_2 и x_1x_2 называют простейшими (или элементарными) симметрическими многочленами от двух переменных. Таким образом, задача 1 свелась к следующей общей задаче — выразить симметрический многочлен от двух переменных через простейшие симметрические многочлены x_1+x_2 и x_1x_2.

Задача 2. Известно, что $x+y=3$ и $xy=-4$. Найти значение выражения x^4+y^4.

▷ Для решения этой задачи нужно выразить симметрический многочлен x^4+y^4 через основные симметрические многочлены:

$$x^4+y^4=x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=((x+y)^2-$$
$$-2xy)^2-2(xy)^2=(3^2+8)^2-2\cdot16=17^2-32=289-32=257. \blacktriangleleft$$

Определение

Многочлен $p(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ от n переменных называется *симметрическим*, если он остается неизменным при любой перестановке переменных.

Таковы, например, следующие многочлены:

$$(x_1^2+x_2^2)^2-3x_1x_2^3-3x_1^3x_2,$$
$$(x+y)(y+z)(z+x).$$

Вернемся к разложению на множители многочлена $P_n(x)$, имеющего n действительных корней $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$:

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n).$$

Если раскрыть скобки в правой части этого равенства и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов левой и правой его частей, то получим

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$
$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0},$$
$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_3}{a_0}, \qquad (1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1x_2x_3\ \ldots\ x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Такой способ нахождения коэффициентов многочлена называют *методом неопределенных коэффициентов*.

Равенства (1) называют формулами Виета (Ф. Виет вывел эти формулы для $n \leqslant 5$). При $n=2$ имеем знакомые формулы $x_1+x_2=-\frac{a_1}{a_0}$, $x_1x_2=\frac{a_2}{a_0}$.

Легко усмотреть, что многочлены левой части равенств (1) и есть элементарные симметрические многочлены.

Задача 3. Разложить на множители многочлен

$$(x+y)^4+x^4+y^4.$$

▷ Воспользуемся решением задачи 2 для преобразования суммы $x^4+y^4=((x+y)^2-2xy)^2-2x^2y^2=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$.

Тогда

$$(x+y)^4+x^4+y^4=(x+y)^4+(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=2((x+y)^4-$$
$$-2xy(x+y)^2+x^2y^2)=2((x+y)^2-xy)^2=2(x^2+y^2+xy)^2. \blacktriangleleft$$

Задача 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz+yz=11, \\ xyz=6. \end{cases}$

▷ Левые части уравнений системы — элементарные симметрические многочлены. Более того, формулы Виета показывают, что x, y и z являются корнями уравнения третьей степени $u^3-6u^2+11u-6=0$, где $u_1=x$, $u_2=y$, $u_3=z$. Разложим левую часть этого уравнения на множители:

$$u^3-6u^2+11u-6=u^3-6u^2+9u+2u-6=u(u^2-6u+9)+2(u-3)=$$
$$=u(u-3)^2+2(u-3)=(u-3)(u^2-3u+2)=(u-3)(u-2)(u-1).$$

Откуда находим корни уравнения $u_1=3$, $u_2=2$, $u_3=1$.

Ответ. (3; 2; 1), (3; 1; 2), (2; 3; 1), (2; 1; 3), (1; 3; 2), (1; 2; 3). ◀

Задача 5. Составить приведенное кубическое уравнение $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$, корни которого обратны корням уравнения $x^3-7x^2-10x-2=0$.

▷ Обозначим корни данного уравнения через x_1, x_2, x_3. По теореме Виета $x_1+x_2+x_3=7$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-10$, $x_1x_2x_3=2$.

Обозначим корни искомого уравнения через y_1, y_2 и y_3. По условию $y_1=\frac{1}{x_1}$, $y_2=\frac{1}{x_2}$, $y_3=\frac{1}{x_3}$. Тогда $a_1=-(y_1+y_2+y_3)=$

$$=-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=-\frac{-10}{2}=5.$$

$$a_2=(y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3)=\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_3}\right)=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{7}{2}.$$

Наконец, $a_3=-y_1y_2y_3=-\frac{1}{x_1x_2x_3}=-\frac{1}{2}$.

Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$y^3+5y^2+\frac{7}{2}y-\frac{1}{2}=0, \text{ или } 2y^3+10y^2+7y-1=0.$$

Упражнения

48. Не решая данное уравнение, составить квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $x^2-6x-7=0$.

49. Составить квадратное уравнение, корни которого были бы обратны корням уравнения $ax^2+bx+c=0$.

50. Выразить через p и q:
1) разность квадратов корней уравнения $x^2+px+q=0$;
2) сумму и разность кубов корней уравнения $x^2+px+q=0$.

51. Известно, что $x+y=3$ и $xy=-2$. Найти значение выражения $2x^2-3xy+2y^2$.

52. Известно, что $x+y=1$ и $xy=-2$. Найти значение выражения x^6+y^6.

53. Разложить на множители многочлен $x^4+x^2y^2+y^4$.

54. Составить кубическое уравнение со старшим коэффициентом, равным 1, корни которого противоположны корням уравнения $x^3-2x^2-x+2=0$.

55. Составить уравнение четвертой степени со старшим коэффициентом, равным 1, корни которого противоположны корням уравнения $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=0$.

56. Решить уравнение $x^3+3\sqrt{2}\,x^2+5x+\sqrt{2}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

§ 8. Многочлены от нескольких переменных

Многочлен с переменными $x, y, z, \ldots, w$ может быть представлен в виде суммы одночленов вида

$$ax^ny^mz^k\ldots w^l, \tag{1}$$

где a — коэффициент и $n, m, k, \ldots, l$ — некоторые целые неотрицательные числа. (Если какая-либо переменная не входит в данный одночлен, будем считать ее показатель степени равным нулю.)

Сумма показателей степени $m+n+k+\ldots+l$ одночлена (1), где $a\neq 0$, называется *степенью* этого *одночлена*. Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен, называется *степенью многочлена*.

Например, $3x^2+2xy-5y^2+7x-y+1$ — многочлен второй степени с двумя переменными; $5x^2+3xy+7y^2+3xz-4yz+8z^2+x-9$ — многочлен второй степени с тремя переменными; $x^3-xyz+y^2$ — многочлен третьей степени с тремя переменными.

Многочлены с любым числом переменных можно складывать, вычитать и умножать, получая многочлен.

Если все члены многочлена имеют одну и ту же степень, то многочлен называется *однородным*.

Например, $5x^2-3xy+y^2$, $2xyz^2+x^4-y^2z^2$ — однородные многочлены.

Задача 1. Разложить на множители однородный многочлен $P(x, y)=x^4-7x^3y+5x^2y^2+31xy^3-30y^4$, применив подстановку $x=ty$.

▷ $P(x, y)=t^4y^4-7t^3y^4+5t^2y^4+31ty^4-30y^4=y^4(t^4-7t^3+5t^2+$ $+31t-30)=y^4\cdot Q(t)$.

Делители свободного члена -30 многочлена $Q(t)$ таковы:

$$\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm5;\ \pm6;\ \pm10;\ \pm15;\ \pm30.$$

Найдем $Q(1)=1-7+5+31-30=0$.

Следовательно, $Q(t)$ делится на $t-1$. Найдем результат деления $Q(t)$ на $t-1$, пользуясь схемой Горнера:

1	−7	5	31	−30
1	−6	−1	30	0

Итак, $Q(t)=(t-1)(t^3-6t^2-t+30)$.

Найдем корни многочлена t^3-6t^2-t+30. Нетрудно убедиться в том, что $t=3$ — корень этого многочлена. Пользуясь схемой Горнера, найдем частное от деления этого многочлена на $t-3$.

1	−6	−1	30
1	−3	−10	0

Итак, $Q(t)=(t-1)(t-3)(t^2-3t-10)$.

Корнями многочлена $t^2-3t-10$ являются $t_1=-2$, $t_2=5$, т. е. $Q(t)=(t-1)(t-3)(t+2)(t-5)$. Из равенства $x=ty$ находим $t=\frac{x}{y}$. Тогда $P(x, y)=y^4\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{y}-3\right)\left(\frac{x}{y}+2\right)\left(\frac{x}{y}-5\right)=$ $=(x-y)(x-3y)(x+2y)(x-5y)$. ◀

Задача 2. Разложить на множители многочлен

$$P(x, y, z)=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2.$$

▷ Воспользуемся формулой квадрата трехчлена

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

и выделим в данном многочлене квадрат трехчлена:

$$P(x, y, z)=(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2.$$

Тогда $P(x, y, z)=(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)=(x^2-$ $-(y+z)^2)(x^2-(y-z)^2)=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)$. ◀

Задача 3. Разложить на множители многочлен

$$P(x, y, z)=x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2).$$

▷ При $x=y$ имеем $P(x, y, z)=x(x^2-z^2)+x(z^2-x^2)+z\cdot 0=0$.

Это означает, что $P(x, y, z)$ делится на $(x-y)$. Аналогично $P(x, y, z)=0$ и при $y=z$, и при $z=x$. А это значит, что $P(x, y, z)$ делится и на $y-z$, и на $z-x$.

Поэтому $P(x, y, z)=k(x-y)(y-z)(z-x)$, где k — некоторое число. Найдем k. Пусть $x=1$, $y=2$, $z=3$, тогда $2k=2$, $k=1$.

Ответ. $P(x, y, z)=(x-y)(y-z)(z-x)$. ◀

Упражнения

57. Разложить на множители:

1) $(y-z)(y+z)^2+(z-x)(z+x)^2+(x-y)(x+y)^2$;

2) $x^6-y^6+(x^4+x^2y^2+y^4)$;

3) $x^8+x^4y^4+y^8$.

58. При каких значениях a и b многочлен $a(x^4+y^4+x^2y^2)+$ $+bxy(x^2-y^2)+y^4$ делится на $(x+y)(2x-y)$?

59. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+px+q=0$. Доказать, что $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$.

60. Разложить на множители однородный многочлен $P(x, y)$, применив подстановку $y=tx$:

1) $P(x, y)=15x^4-8x^3y+31x^2y^2-16xy^3+2y^4$;

2) $P(x, y)=12x^5-32x^4y+9x^3y^2+16x^2y^3-3xy^4-2y^5$.

61. Доказать тождество $(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

§ 9. Формулы сокращенного умножения для старших степеней. Бином Ньютона

Применяя правила умножения многочлена на многочлен, легко получить знакомые формулы сокращенного умножения:

$$(x\pm a)^2=x^2\pm 2xa+a^2;$$
$$(x\pm a)^3=x^3\pm 3x^2a+3xa^2\pm a^3;$$
$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2;$$
$$(x+a)(x^2-xa+a^2)=x^3+a^3;$$
$$(x-a)(x^2+xa+a^2)=x^3-a^3;$$
$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

Например, последняя формула квадрата трехчлена получается так:

$$(x+y+z)^2=((x+y)+z)^2=(x+y)^2+2z(x+y)+z^2=$$
$$=x^2+2xy+y^2+2zx+z^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

Познакомимся теперь с формулой m-й (целой неотрицательной) степени двучлена *(бинома)* $x+a$.

Запишем последовательно формулы степени бинома:

$(x+a)^0=1;$

$(x+a)^1=1\cdot x+1\cdot a;$

$(x+a)^2=1\cdot x^2+2xa+1\cdot a^2;$

$(x+a)^3=1\cdot x^3+3x^2a+3xa^2+1\cdot a^3;$

$(x+a)^4=(x+a)^3(x+a)=1\cdot x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+1\cdot a^4;$

$(x+a)^5=(x+a)^4(x+a)=1\cdot x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+1\cdot a^5$

и т. д.

Справедлива следующая биномиальная формула Ньютона:

$$(x+a)^m=C_m^0\cdot x^m+C_m^1\cdot x^{m-1}a+C_m^2\cdot x^{m-2}a^2+\ldots+$$
$$+C_m^{m-1}\cdot xa^{m-1}+C_m^m\cdot a^m. \qquad (1)$$

Формулу (1) часто называют просто «бином Ньютона», а числа C_m^n (читается: «це из эм по эн») — биномиальными коэффициентами, причем $C_m^0=1$ и $C_m^m=1$. (С числами вида C_m^n подробнее ознакомитесь в 11 классе.)

Можно показать, что коэффициенты разложения степени бинома (биномиальные коэффициенты) легко найти по следующей схеме, которая называется «треугольник Паскаля», по имени французского математика Блеза Паскаля (1623—1662).

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

. . . .

В каждой строке этой схемы коэффициенты степени бинома, кроме первого и последнего, получаются попарным сложением ближайших коэффициентов предыдущей строки.

Например, при $m=6$ имеем строку 1 6 15 20 15 6 1, которая получается из предыдущей строки так:

$$6=1+5;\ 15=5+10;\ 20=10+10;\ 15=10+5;\ 6=5+1.$$

Таким образом,

$$(x+a)^6=x^6+6x^5a+15x^4a^2+20x^3a^3+15x^2a^4+6xa^5+a^6.$$

Заметим в формуле (1) следующее:

1) число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя степени бинома, т. е. равно $m+1$;

2) показатель степени переменного x последовательно убывает от m до 0, показатель степени числа a последовательно возрастает от 0 до m;

3) биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от начала и от конца разложения, равны, т. е. $C_m^k=C_m^{m-k}$.

Задача 1. Найти разложение бинома:

1) $(2x+1)^5$; 2) $(x-1)^6$.

▷ 1) $(2x+1)^5=(2x)^5+5\cdot(2x)^4+10\cdot(2x)^3+10\cdot(2x)^2+5\cdot 2x+1=$ $=32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1$;

2) $(x-1)^6=x^6+6x^5\cdot(-1)^1+15x^4\cdot(-1)^2+20x^3\cdot(-1)^3+15x^2\times$ $\times(-1)^4+6x\cdot(-1)^5+(-1)^6=x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$. ◀

Символом $n!$ (эн факториал) обозначают произведение натуральных чисел от 1 до n, т. е. $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)n$.

Например, $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$.

Условились считать $0!=1$.

Биномиальные коэффициенты C_m^n определяются следующим равенством:

$$C_m^n=\frac{m!}{(m-n)!\,n!}, \text{ где } m\geqslant n. \qquad (2)$$

Например, $C_6^2=\dfrac{6!}{(6-2)!\,2!}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2}=15$.

До сих пор биномиальные коэффициенты вычислялись с помощью треугольника Паскаля. В основе построения этого числового треугольника лежит следующее свойство биномиальных коэффициентов:

$$C_{m+1}^{n+1}=C_m^n+C_m^{n+1}. \qquad (3)$$

○ $C_m^n=\dfrac{m!}{(m-n)!\,n!}$, $C_m^{n+1}=\dfrac{m!}{(m-n-1)!\,(n+1)!}$, откуда

$$C_m^n+C_m^{n+1}=\frac{m!}{(m-n)!\,n!}+\frac{m!}{(m-n-1)!\,(n+1)!}=\frac{m!\,(n+1)+m!\,(m-n)}{(m-n)!\,(n+1)!}=$$

$$=\frac{m!\,(n+1+m-n)}{(m-n)!\,(n+1)!}=\frac{m!\,(m+1)}{(m-n)!\,(n+1)!}=\frac{(m+1)!}{(m-n)!\,(n+1)!}=C_{m+1}^{n+1}. \text{ ●}$$

Таким образом, вычислять биномиальные коэффициенты можно как с помощью треугольника Паскаля, так и по формуле (2).

Задача 2. Доказать, что $C_m^n=C_m^{m-n}$.

▷ По формуле (2) имеем

$$C_m^{m-n}=\frac{m!}{(m-(m-n))!\,(m-n)!}=\frac{m!}{n!\,(m-n)!}=C_m^n. \text{ ◀}$$

Задача 3. Найти разложение бинома $(x+2)^7$.

▷ $(x+2)^7=x^7+C_7^1x^6\cdot 2+C_7^2x^5\cdot 2^2+C_7^3x^4\cdot 2^3+C_7^3x^3\cdot 2^4+C_7^2x^2\cdot 2^5+$ $+C_7^1x\cdot 2^6+2^7=x^7+14x^6+84x^5+280x^4+560x^3+672x^2+448x+$ $+128$. ◀

Общий член разложения (1) T_{n+1} имеет вид

$$T_{n+1}=C_m^n x^{m-n}\cdot a^n. \qquad (4)$$

Полагая в этой формуле $n=0, 1, 2, \ldots, m$, мы получим первый, второй и другие члены разложения бинома (1).

Задача 4. Найти все рациональные члены разложения бинома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$.

▷ Пусть искомый член есть T_{n+1}. Тогда из равенства (4) имеем $T_{n+1}=C_5^n\left(\sqrt[3]{3}\right)^{5-n}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n=C_5^n\cdot 3^{\frac{5-n}{3}}\cdot 2^{\frac{n}{2}}$, где $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$. Из этих чисел нужно выбрать такие, при которых показатели $\frac{5-n}{3}$ и $\frac{n}{2}$ будут целыми числами. Очевидно, что $n=2$.

Ответ. Искомый член разложения $T_3=C_5^2\cdot 3\cdot 2=60$. ◁

Признаки делимости (и неделимости) двучлена $a^n\pm b^n$ на $a+b$ можно доказать, используя формулу бинома Ньютона. Приведем пример.

Разность одинаковых степеней чисел a и b всегда делится на разность оснований.

○ Запишем выражение a^n-b^n так:

$$a^n-b^n=((a-b)+b)^n-b^n. \quad (5)$$

По формуле бинома Ньютона получаем

$$((a-b)+b)^n=(a-b)^n+C_n^1(a-b)^{n-1}\cdot b+\ldots+C_n^1(a-b)b^{n-1}+b^n. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в равенство (5), получаем, что каждое слагаемое в правой части равенства (6) содержит множитель $(a-b)$. Отсюда следует делимость a^n-b^n на $a-b$. ●

Аналогично доказывается и делимость a^n+b^n на $a+b$ при нечетном n, и неделимость a^n+b^n на разность $a-b$ (в этом случае получается остаток $2b^n$), а также все остальные случаи делимости двучлена $a^n\pm b^n$.

Упражнения

62. Записать разложение бинома:

1) $(a-2b)^6$; 2) $(1+\sqrt{2})^5$; 3) $(1+2x)^5$; 4) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8$.

63. Найти пятый член разложения:

1) $(\sqrt{x}+x)^{10}$; 2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$; 3) $(2+\sqrt{x})^9$.

64. Найти в разложении бинома $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}$ член, не содержащий x.

65. Сколько рациональных членов содержит разложение:

1) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{5}}\right)^{124}$; 2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{\sqrt{3}}\right)^{100}$?

66. Доказать, что сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения бинома $(x+a)^n$ равна 2^n.

67. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить сумму

$$C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+2^3C_5^3+2^4C_5^4+2^5C_5^5.$$

68. Найти член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, содержащий $\frac{1}{x}$.

69. Найти член разложения бинома $\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)^{12}$, содержащий x^4.

70. Найти пятый член разложения бинома $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^m$, если коэффициент третьего члена равен 66.

§ 10. Системы уравнений

Напомним, что линейным уравнением с двумя неизвестными называют уравнение вида $ax+by=c$, где a, b, c — заданные числа.

Приведем примеры решения систем двух уравнений с двумя неизвестными, где хотя бы одно уравнение не является линейным.

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-4xy-4x+3y+5=0. \end{cases}$$

▷ Решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения находим $y=x-1$ и, подставляя во второе уравнение системы, получаем $x^3-4x(x-1)-4x+3(x-1)+5=0$, откуда

$$x^3-4x^2+3x+2=0. \qquad (1)$$

Найдем целые корни уравнения (1). Делителями числа 2 являются числа ±1, ±2. Проверкой устанавливаем, что $x_1=2$ — корень уравнения (1).

Делением уголком левой части уравнения (1) на $x-2$ находим частное x^2-2x-1, поэтому уравнение (1) можно записать в виде $(x-2)(x^2-2x-1)=0$.

Решая уравнение $x^2-2x-1=0$, находим $x_2=1+\sqrt{2}$, $x_3=1-\sqrt{2}$. Подставляя найденные значения x в выражение $y=x-1$, получаем $y_1=1$, $y_2=\sqrt{2}$, $y_3=-\sqrt{2}$.

Ответ. $(2; 1)$, $(1+\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. ◀

Задача 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=3, \\ x^4+6x^2y+8y^2=0. \end{cases}$$

▷ Эту систему можно решить, подставив $y=x-3$ во второе уравнение системы и получив уравнение

$$x^4+6x^3-10x^2-48x+72=0.$$

Однако решение этой системы можно упростить, если левую часть второго уравнения системы разложить на множители. Для этого решим второе уравнение как квадратное относительно x^2. Получим $(x^2)^2+6y(x^2)+8y^2=0$, откуда

$$x^2=-3y\pm\sqrt{9y^2-8y^2}=-3y\pm|y|=-3y\pm y. \qquad (2)$$

Следовательно, $x^2=-2y$ или $x^2=-4y$, поэтому второе уравнение системы можно записать в виде $(x^2+2y)(x^2+4y)=0$.

Итак, система такова: $\begin{cases} x-y=3, \\ (x^2+4y)(x^2+2y)=0. \end{cases}$

Она распадается на две системы:

$$\begin{cases} x-y=3, \\ x^2+4y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=3, \\ x^2+2y=0. \end{cases}$$

Решая эти системы, например, способом подстановки, находим $x_1=2$, $y_1=-1$; $x_2=-6$, $y_2=-9$; $x_3=-1+\sqrt{7}$, $y_3=-4+\sqrt{7}$; $x_4=-1-\sqrt{7}$, $y_4=-4-\sqrt{7}$. ◀

Задача 3. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y}, \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}. \end{cases}$$

▷ Заметим, что если $(x;\, y)$ — решение данной системы, то $x\neq 0$, $y\neq 0$. Перемножая уравнения системы, получаем

$$(xy+24)(xy-6)=x^2y^2, \quad x^2y^2+18xy-144=x^2y^2, \quad xy=8.$$

Подставляя $y=\dfrac{8}{x}$, например, в первое уравнение системы, получаем $32=\dfrac{x^4}{8}$, $x^4=256$.

Действительными корнями последнего уравнения являются числа $x_1=4$, $x_2=-4$.

Из формулы $y=\dfrac{8}{x}$ находим $y_1=2$, $y_2=-2$.

Ответ. $(4;\, 2)$, $(-4;\, -2)$. ◀

Задача 4. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2(x+y)=12, \\ x^2(3x-y)=20. \end{cases}$$

▷ Заметим, что если $(x;\, y)$ — решение этой системы, то $x\neq 0$, $x+y\neq 0$, $3x-y\neq 0$. Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x+y}{3x-y}=\frac{3}{5}, \quad 5x+5y=9x-3y, \quad x=2y.$$

Подставляя $x=2y$, например, в первое уравнение системы, находим $4y^2\cdot 3y=12$, $y^3=1$.

Последнее уравнение имеет только один действительный корень $y=1$. По формуле $x=2y$ находим $x=2$.

Ответ. $(2;\, 1)$. ◀

Решить систему уравнений (71—76).

71. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=74, \\ x+y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=32, \\ x-y=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x+y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x-y=1. \end{cases}$

72. 1) $\begin{cases} 2x^2-2xy+x=-9, \\ 2y-3x=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+6xy+8y^2=91, \\ x+3y-10=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=2; \\ x+y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-2)(y+1)=1, \\ x-y=3. \end{cases}$

73. 1) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=-40; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=7, \\ xy=18. \end{cases}$

74. 1) $\begin{cases} xy-x+y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy-2(x+y)=2, \\ xy+x+y=29. \end{cases}$

75. 1) $\begin{cases} y-x=1, \\ x^3-4xy+5y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x^3+9xy+25y+44=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=1, \\ 6x^2y+xy-y=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-x=2, \\ 2x^3y+9x^2y-5xy=0. \end{cases}$

76. 1) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^4-3yx^2-4y^2=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=2, \\ 2x^4+5x^2y-3y^2=0. \end{cases}$

77. Произведение двух чисел равно 135, а их разность равна 6. Найти эти числа.

78. Разность двух чисел равна 18. Сумма этих чисел, сложенная с частным от деления большего на меньшее, равна 34. Найти эти числа.

79. Периметр прямоугольника равен 14 см, а его площадь равна 12 см^2. Найти длины сторон прямоугольника.

Решить систему уравнений (80—83).

80. 1) $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=6, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{15}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy-4=\dfrac{7x}{y}, \\ xy-\dfrac{3}{2}=\dfrac{y}{2x}. \end{cases}$

81. 1) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=10, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=\dfrac{5}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=5, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=\dfrac{10}{3}. \end{cases}$

82. 1) $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=65, \\ (x+y)(x^2-y^2)=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x, \\ 1+y^2=5(1+x^2). \end{cases}$

83. 1) $\begin{cases} x+2y=3y^2, \\ 2x+y=3x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x+xy=8, \\ y^2+y+xy=4. \end{cases}$

84. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготавливала 8 м^3 сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготавливать по плану?

85. В бассейн проведены две трубы: через первую вода вливается, через вторую выливается. При совместном действии труб бассейн наполняется за 6 ч. Если бы первая труба, работая отдельно, заполняла бассейн на 1 ч дольше, а вторая сливала всю воду также на 1 ч дольше, чем первоначально, то при совместной работе этих труб бассейн наполнился бы за 12 ч. За сколько часов первая труба, работая отдельно, наполнит бассейн, а вторая сольет всю воду?

86. Бригада рабочих построила мост за 14 дней. Если бы в бригаде было на 4 человека больше и каждый работал бы ежедневно на один час дольше, то та же работа была бы выполнена за 10 дней. При увеличении же бригады еще на 6 человек и рабочего дня еще на один час вся работа была бы выполнена за 7 дней. Сколько человек было в бригаде и сколько часов в день они работали?

87. Для размещения комплекта журналов достаточно купить 13 стандартных полок. Так как в продаже были полки, на каждой из которых помещается на 7 журналов меньше, чем на стандартных, то купили 27 полок, при этом осталось свободное место для 7 журналов. Сколько журналов было в комплекте?

88. Из пунктов A и B выехали одновременно навстречу друг другу мотоциклист и велосипедист. Они встретились на расстоянии 4 км от B, а в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист находился на расстоянии 15 км от A. Определить расстояние от A до B.

89. Автобус из пункта A и автомобиль из пункта B отправляются одновременно и осуществляют безостановочное движение с постоянными скоростями между пунктами A и B. Через 42 мин после начала движения произошла их первая встреча, а через 2 ч 34 мин после начала движения автомобиль первый раз обогнал автобус. Через какое время после начала движения автобус и автомобиль впервые окажутся одновременно в пункте A?

90. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2-6x-3y-1=0, \\ y^2+2x+9y+14=0. \end{cases}$$

Решить систему уравнений (91—92).

91. $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2-10x-8y-12=0, \\ 2x^2+3xy+y^2+x-y-6=0. \end{cases}$

92. 1) $\begin{cases}(x^2+y^2)(x-y)=13,\\ xy(x-y)=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4(x^3+y^3)=9x^2y^2,\\ 4(x^2+y^2)=9x^2y^2-8xy.\end{cases}$

93. Дорога от пункта A до пункта B идет на подъем, а от пункта B до пункта C имеет спуск. Пешеход затрачивает t ч на путь от A до C и $\frac{t}{2}$ ч на обратный путь. Найти скорость пешехода на подъеме, если его скорость на спуске на a км/ч больше, чем на подъеме, а расстояние от A до C равно s км.

Упражнения к главе III

94. Выполнить деление:

1) $(15x^5+6x^4-20x^2-8x):(3x^3-4)$;
2) $(12x^5-9x^4+8x^2-6x):(4x^2-3x)$;
3) $(x^5+1):(x+1)$; 4) $(x^6-1):(x-1)$.

95. Найти частное $M(x)$ и остаток $R(x)$ от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

1) $P(x)=4x^3+3x^2-1$, $Q(x)=2x^2+x-1$;
2) $P(x)=x^3-3x^2$, $Q(x)=2x^2+5$;
3) $P(x)=3x^4+7x^3-22x^2-x-7$, $Q(x)=x^3+2x^2-4x$;
4) $P(x)=2x^4+3x^3-x$, $Q(x)=x^2+x+1$.

96. Убедившись в том, что $x_1=-2$ — корень уравнения $x^3-4x^2-5x+14=0$, найти остальные корни этого уравнения.

97. Проверить, что $x_1=1$ и $x_2=-\frac{2}{3}$ — корни уравнения $6x^4-11x^3-13x^2+10x+8=0$. Найти остальные корни этого уравнения.

98. Проверить, что $x_1=1$ — корень уравнения $x^3-(1-\sqrt{5})x^2-(1+\sqrt{5})x+1=0$. Найти остальные корни этого уравнения.

99. Число $x_1=-3$ является корнем уравнения $x^3+ax^2+5x-3=0$. Найти a и остальные корни этого уравнения.

100. Числа $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$ являются корнями уравнения $x^3+ax^2+bx-2=0$, где a и b — рациональные числа. Найти a, b и третий корень этого уравнения.

101. Найти действительные корни уравнения:

1) $9x^3+12x^2-10x+4=0$; 2) $x^4+x^3-5x^2+x-6=0$;
3) $x^5+3x^4+2x^3+6x^2+2x+6=0$;
4) $x^5-2x^4-3x^3+6x^2-4x+8=0$.

102. Уравнение $ax^3-2x^2-5x+b=0$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=-2$. Найти a, b и третий корень этого уравнения.

103. Уравнение $x^3-9x^2+ax+b=0$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=5$. Найти a, b и третий корень этого уравнения.

104. Решить уравнение:

1) $\frac{3x^2}{x-1}-\frac{7}{x+1}=\frac{5x^2+9}{x^2-1}$; 2) $\frac{1-x}{x-3}-\frac{2x}{3x+2}=\frac{4}{6+7x-3x^2}$.

105. Решить уравнение:

1) $(x^2+2x)^2-2x^2-4x-3=0$;
2) $(x^2-x-3)(x^2-x-2)=12$;
3) $(x^2+x)^2+(3x-1)x^2+5x(x-1)=6$;
4) $x^2(x^2-5)-2x(x^2-4)+4=0$;
5) $(x^2-2x)^2-4x(x^2+2)+4(10x-1)=7x^2$;
6) $(x^2-2)^2+x(x-1)(x+1)=1$.

106. Найти действительные корни уравнения:

1) $\frac{x^2}{x+2}+\frac{2x^2(x-2)}{x-3}=\frac{3x^2+19x+6}{x^2-x-6}$;
2) $\frac{2x^3}{x+2}+\frac{x^2}{x-1}=\frac{8x^2-7x+2}{x^2+x-2}$;
3) $\frac{2x^3+1}{2x+1}+\frac{3x^2}{3x-1}=\frac{15x^3}{6x^2+x-1}$;
4) $\frac{6x^3}{x+1}-\frac{5x^2-17x+2}{x-2}=\frac{18x}{2+x-x^2}$.

107. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x-xy=0, \\ y^2+3xy=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y=0, \\ x^2+y^2=5y; \end{cases}$
3) $\begin{cases} xy+x-3y=3, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

108. Найти такие числа b и c, чтобы многочлен $x^6+bx^5+cx^4$ делился на:
1) $x+2$ и $x-3$; 2) $x-4$ и $x+5$.

109. При делении многочлена поочередно на двучлены $x+2$, $x-3$, $x+4$ в остатке получаются соответственно числа 6, 26, 12. Найти остаток при делении этого многочлена на $(x+2)(x-3)(x+4)$.

110. Доказать, что многочлен $x^{10}+bx^9+cx^8$ делится на двучлены $x+a_1$ и $x+a_2$, где $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, тогда и только тогда, когда $b=a_1+a_2$, $c=a_1a_2$.

111. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист, а навстречу ему одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Мотоциклист прибыл в пункт B через 2 ч после встречи с велосипедистом, а велосипедист прибыл в пункт A через 4,5 ч после встречи. Сколько часов каждый был в пути?

112. С помощью схемы Горнера найти целые корни многочлена:
1) $P(x)=x^4+4x^3-25x^2-16x+84$;
2) $P(x)=x^5-2x^4+3x^3-10x^2-40x+48$.

113. С помощью схемы Горнера разложить по степеням $x-c$ многочлен:
1) $P(x)=x^3-5x^2+6x-7$, $c=2$;
2) $P(x)=x^4-8x^3-17x^2-5$, $c=-2$.

114. Решить уравнение:

1) $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$; 2) $2x^4+x^3-10x^2-x+2=0$;

3) $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$; 4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$.

115. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}, \\ x^2+2y^2=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \\ xy^2-x^2y=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=3, \\ 2x^2-2xy-y^2=-6. \end{cases}$

116. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9x^2-4y^2+5x+10=0, \\ 8x^2-3y^2+5y+10=0. \end{cases}$$

117. Имеются два куска сплава серебра с медью. Один из них содержит $p\%$ меди, другой — $q\%$ меди. В каком соотношении нужно брать сплавы от первого и второго кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий $r\%$ меди, где $p<r<q$?

118. Бассейн можно наполнить водой из двух кранов. Сначала был открыт только первый кран на $\frac{1}{3}$ того времени, которое требуется для наполнения бассейна вторым краном. Затем был открыт только второй кран на $\frac{1}{3}$ того времени, которое требуется для наполнения бассейна первым краном. В результате оказалось, что наполнено $\frac{13}{18}$ бассейна. За какое время наполнит бассейн каждый кран в отдельности, если, работая одновременно, оба крана наполняют бассейн за 3 ч 36 мин?

Вопросы к главе III

1. Дать определение многочлена n-й степени от одного переменного.
2. Какой многочлен называют нулевым многочленом?
3. Какие многочлены называют тождественно равными?
4. Какова формула деления многочленов?
5. Какова формула деления многочленов с остатком?
6. Как можно разделить один многочлен на другой?
7. Дать определение корня многочлена.
8. Сформулировать теорему Безу.
9. Сформулировать теорему о числе корней многочлена.
10. Сформулировать теорему о целом корне уравнения $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ с целочисленными коэффициентами.

11. Как понизить степень алгебраического уравнения, зная один из его корней?
12. Какой многочлен называется симметрическим?
13. Каковы элементарные симметрические многочлены от трех переменных?
14. Сформулировать теорему Виета для многочлена третьей степени с одним переменным.
15. Какой многочлен называют многочленом от нескольких переменных? Что называют степенью этого многочлена?
16. Какой многочлен называют однородным?
17. Записать формулу бинома Ньютона.

Проверь себя!

1. Найти частное и остаток от деления многочлена $x^5+2x^4-3x^3+2x^2-3x$ на многочлен x^2+x+1.
2. Не преобразуя многочлен $P(x)=5(x^2-7x+12)+11(x^2-8x+15)$, установить, делится ли он на двучлен $x-3$.
3. Решить уравнение $x^3+2x^2-5x-6=0$.
4. Записать разложение бинома $\left(2a-\frac{1}{5}\right)^5$.
5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7. \end{cases}$
6. Сумма квадратов числителя и знаменателя некоторой дроби равна 25. Сумма этой и обратной ей дроби равна $\frac{25}{12}$. Найти исходную дробь.

---

1. Разложить на множители многочлен
$$x^5+x^4-2x^3-2x^2-3x-3.$$
2. Решить уравнение $\frac{10}{5-x}+\frac{3x-6}{6-2x}=\frac{3}{(x-3)(x-1)}$.
3. Уравнение $x^3+x^2+ax+b=0$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=-2$. Найти a, b и третий корень этого уравнения.
4. Найти член разложения $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, содержащий x^2.
5. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0, \\ 2y^2+xy+x+3y=5. \end{cases}$
6. Две бригады, из которых вторая начинает работать на 5 дней позже первой, закончили работу за 15 дней, считая от момента начала работы второй бригады. Если бы эта работа была поручена каждой бригаде отдельно, то для ее выполнения первой бригаде понадобилось бы на 10 дней больше, чем второй. За сколько дней может выполнить эту работу каждая бригада, работая отдельно?

Историческая справка

Еще со времен вавилонян и древних индусов считается, что одной из основных целей алгебры является решение уравнений и их систем. В древнем Вавилоне 4000 лет назад умели решать уравнения первой, второй и некоторые уравнения третьей степени. Древние греки, решая уравнения, предварительно придавали им геометрическую форму: числа отождествлялись с длинами отрезков, нахождение неизвестного означало построение искомого отрезка. Но общей теории решения уравнений в те времена еще не было. Первое изложение теории решения квадратных уравнений дано в книге древнегреческого ученого Диофанта «Арифметика» (III в.). Решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степеней было получено итальянскими учеными в XVI веке.

В развитии алгебры уравнений велика роль французского математика и юриста Ф. Виета (1540—1603). Им был использован метод неопределенных коэффициентов, благодаря которому он первым записал квадратное уравнение в общем виде и выразил его решение формулой (до него удовлетворялись лишь решением примеров). Ему принадлежит применение единообразного приема решения уравнений степени $n \leq 4$. Особое значение имеет установление им зависимости между корнями и коэффициентами уравнений (формулы Виета).

Виетом было установлено, что между алгебраическими уравнениями и многочленами имеется тесная связь: найти корни многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

означает решить уравнение $P_n(x) = 0$.

Французский математик Э. Безу (1730—1783) сформулировал свою известную теорему о делении многочлена на линейный двучлен, позволяющую снизить степень алгебраического уравнения, зная один из его корней. Э. Безу занимался также исследованием систем алгебраических уравнений высших степеней и исключением неизвестных в таких системах.

Деление многочленов уголком можно обнаружить в работах И. Ньютона (1643—1727).

В «Универсальной арифметике» (1768) Л. Эйлера (1707—1783), по которой впоследствии составлялись учебники элементарной алгебры, приведено много задач, связанных с тождественным преобразованием многочленов и алгебраических дробей.

Глава IV

Степень с действительным показателем

Как алгебраисты вместо АА, ААА, ... пишут A^2, A^3, ..., так я... вместо $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, ... пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ...

И. Ньютон

§ 1. Действительные числа

Как известно из курса алгебры основной школы, рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел.

Определение

Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, т. е. дробь вида

$$+a_0, a_1a_2a_3\ldots \text{ или } -a_0, a_1a_2a_3\ldots,$$

где a_0 — целое неотрицательное число, а каждая из букв a_1, a_2, ... — это одна из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например:

1) в записи действительного числа $\pi = 3{,}1415\ldots$ число $a_0 = 3$, а первые четыре десятичных знака таковы: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$;

2) в записи действительного числа $37{,}1\overline{9} = 37{,}1999\ldots$ число $a_0 = 37$, а десятичные знаки, начиная со второго, равны 9. Заметим, что $37{,}1999\ldots = 37{,}2000\ldots = 37{,}2$.

Действительное число может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Бесконечная десятичная дробь равна нулю, если все цифры в ее записи — нули. Положительное действительное число — это десятичная дробь, не равная нулю, со знаком «+», а отрицательное — со знаком «–». Знак «+» перед дробью обычно опускается.

Вам известно, как выполняются действия над конечными десятичными дробями. Арифметические операции над действительными числами, т. е. бесконечными десятичными дробями, обычно заменяются операциями над их приближениями.

<u>Задача 1.</u> Вычислить приближенные значения выражения $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

▷ С помощью микрокалькулятора находим

$$\sqrt{2}=1{,}4142135..., \ \sqrt{3}=1{,}7320508... .$$

Поэтому с точностью до единицы $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1{,}4+1{,}7=3{,}1\approx 3$, с точностью до одной десятой $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1{,}41+1{,}73=3{,}14\approx 3{,}1$, с точностью до одной сотой $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1{,}414+1{,}732=3{,}146\approx 3{,}15$ и т. д. ◀

Числа 3; 3,1; 3,15 и т. д. являются последовательными десятичными приближениями (первые два — с недостатком, третье — с избытком) значения суммы $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Итак, при нахождении суммы $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ заменялись их десятичными приближениями — рациональными числами, и эти числа складывались по известным правилам.

Аналогично, вычисляя произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$, например, с точностью до 0,1, получаем $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\approx 1{,}41\cdot 1{,}73=2{,}4393\approx 2{,}4$.

Вообще, пусть $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ — последовательные десятичные приближения действительного числа x с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. Тогда погрешность приближения $|x-x_n|$ как угодно близко приближается к нулю (стремится к нулю). В этом случае пишут

$$|x-x_n|\to 0 \text{ при } n\to\infty, \text{ или } \lim_{n\to\infty}|x-x_n|=0$$

(читается: «$|x-x_n|$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности», или «предел $|x-x_n|$ при n, стремящемся к бесконечности, равен нулю»). Это означает, что x_n как угодно близко приближается к x, т. е.

$$x_n\to x \text{ при } n\to\infty, \text{ или } \lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

Отметим, что все основные свойства действий над рациональными числами сохраняются и для действительных чисел (переместительный, сочетательный и распределительный законы, правила сравнения и т. д.).

Рассмотрим подробнее, что значит $|x-x_n|\to 0$ при $n\to\infty$. Пусть x_1 — десятичное приближение некоторого действительного числа с точностью до 1, x_2 — с точностью до 0,1, x_3 — с точностью до 0,01 и т. д. Тогда расстояние от x до x_1 меньше 1, или $|x-x_1|<1$; аналогично $|x-x_2|<0{,}1$; $|x-x_3|<0{,}01$; ...; $|x-x_n|<10^{n-1}$, т. е. какое бы произвольное положительное число ε (пусть сколь угодно малое) мы ни взяли, найдется такой номер N члена последовательности десятичных приближений, начиная с которого все члены последовательности будут нахо-

Рис. 51

диться от x на расстоянии, меньшем ε. Иными словами, модуль разности будет стремиться к 0, что можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty}|x-x_n|=0, \text{ или } \lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

Рассмотрим еще одну числовую последовательность, заданную, например, формулой общего члена $x_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Обозначим ее $\{x_n\}$. Изобразим члены этой последовательности точками числовой прямой (рис. 51).

Заметим, что расстояние от точки x_n до точки 1, равное $|x_n-1|=\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\frac{1}{n}$, с ростом n становится все меньше и меньше (как и в предыдущем примере). Для всех членов последовательности, начиная с члена, имеющего номер 101, т. е. для всех $n\geqslant 101$, модуль разности $|x_n-1|<0{,}01$. Если же $n\geqslant 1001$, то $|x_n-1|<0{,}001$.

Зададим произвольное положительное число ε и выберем натуральное число N, такое, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{N}<\varepsilon$, которое равносильно неравенству $N>\frac{1}{\varepsilon}$. В качестве N можно взять, например, натуральное число $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, где $[a]$ — целая часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

Тогда, если $n\geqslant N$, то $|x_n-1|<\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{N}<\varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно указать номер N, такой, что для всех $n\geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n-1|<\varepsilon$. Заметим, что $N=N_\varepsilon$, т. е. N зависит, вообще говоря, от ε. В этом случае говорят, что число 1 является пределом последовательности $\{x_n\}$, где $x_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, или $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=1$.

Определение

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n\geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

Если a — предел последовательности $\{x_n\}$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, или $x_n\to a$ при $n\to\infty$.

Задача 2. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n=aq^n$, $|q|<1$, имеет предел, и найти его.

▷ 1) Если $q=0$, то $x_n=0$ для всех $n\in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

2) Пусть $q\neq 0$. Обозначим $\frac{1}{|q|}=r$. Так как $|q|<1$, то r больше 1 и его можно записать как $r=1+\alpha$, где $\alpha>0$. Отсюда $\left|\frac{1}{q}\right|^n=r^n=(1+\alpha)^n>\alpha n$ (это неравенство следует из формулы бинома Ньютона).

Следовательно, $|x_n|=|a||q^n|<\frac{|a|}{\alpha n}$. Для каждого $\varepsilon>0$ неравенство $\frac{|a|}{\alpha n}<\varepsilon$, равносильное неравенству $n>\frac{|a|}{\alpha\varepsilon}$, выполняется при $n\geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon=\left[\frac{|a|}{\alpha\varepsilon}\right]+1$ (запись $\left[\frac{|a|}{\alpha\varepsilon}\right]$ обозначает целую часть числа $\frac{|a|}{\alpha\varepsilon}$). Следовательно, при всех $n\geqslant N_\varepsilon$ справедливо неравенство $|x_n|<\varepsilon$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Так как $x_n=aq^n$, то можно записать $\lim\limits_{n\to\infty}(aq^n)=0$, где $|q|<1$. ◄

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3^n}$.

▷ Так как $\frac{2}{3^n}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$, то в соответствии с задачей 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3^n}=0$. ◄

Упражнения

1. (Устно.) Выяснить, какие из данных десятичных дробей являются иррациональными числами: 1) 16,9; 2) 7,25(4); 3) 99,1357911... (после запятой записаны подряд все нечетные числа).
2. Установить, какая из пар чисел 5,4 и 5,5 или 5,5 и 5,6 образует десятичные приближения числа $\sqrt{31}$ с недостатком и с избытком, т. е. одно из чисел этой пары меньше $\sqrt{31}$, а другое больше $\sqrt{31}$.
3. Выяснить, какое из равенств: $|x|=x$ или $|x|=-x$ — является верным, если:

   1) $x=11-2\sqrt{30}$; 2) $x=5-3\sqrt{3}$; 3) $x=10-3\sqrt{10}$.

   Выяснить, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение числового выражения (4—5).

4. 1) $(\sqrt{8}-3)(3+2\sqrt{2})$; 2) $(\sqrt{27}-2)(2-3\sqrt{3})$;
   3) $(\sqrt{50}+4\sqrt{2})\sqrt{2}$; 4) $(5\sqrt{3}+\sqrt{27}):\sqrt{3}$.
5. 1) $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2$; 2) $(\sqrt{5}-1)^2-(2\sqrt{5}+1)^2$.
6. Вычислить:

   1) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{28}$; 2) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{50}:\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{12}:\sqrt{27}$.

---

7. Сравнить значения выражений:

   1) $\sqrt{3{,}9}+\sqrt{8}$ и $\sqrt{1{,}1}+\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{11}-\sqrt{2{,}1}$ и $\sqrt{10}-\sqrt{3{,}1}$.

8. Вычислить:

1) $\sqrt{(\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{2})\cdot\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{7})\cdot 3}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}})\cdot 2+7}$.

9. Выписать из указанных ниже чисел те и только те, которые принадлежат интервалу $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$:

1,41; 1,4143; 1,42; 1,41421; 1,73; 1,7320; 1,74; 1,7321.

10. Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(0,2)^n$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{7^{n-1}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{7\cdot 5^n}$.

11. Доказать, что если a — рациональное число, а b — иррациональное, то и сумма, и разность чисел a и b являются числами иррациональными.

12. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, если:

1) $x_n=\frac{1}{n+1}$; 2) $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$; 3) $x_n=\frac{1}{n^3}$; 4) $x_n=\frac{n}{n^2+4}$.

§ 2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Известно, что *геометрической прогрессией* называется такая числовая последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, что для всех натуральных n выполняется равенство $b_{n+1}=b_nq$, где $b_1\ne 0$, $q\ne 0$.

Среди геометрических прогрессий особый интерес представляют так называемые бесконечно убывающие геометрические прогрессии.

Рассмотрим квадраты, изображенные на рисунке 52. Сторона первого квадрата равна 1, сторона второго равна $\frac{1}{2}$, сторона третьего равна $\frac{1}{2^2}$ и т. д.

Таким образом, стороны квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots\ (1)$$

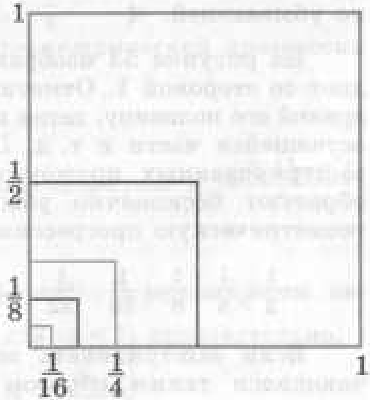


Рис. 52

Площади этих квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2},\ \frac{1}{4^3},\ \ldots,\ \frac{1}{4^{n-1}},\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Из рисунка 52 видно, что стороны квадратов и их площади с возрастанием номера n становятся все меньше, приближаясь к нулю. Поэтому каждая из прогрессий (1) и (2) называется бесконечно убывающей.

Рассмотрим теперь геометрическую прогрессию

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ -\frac{1}{3^3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}},\ \ldots\ .$$

Знаменатель этой прогрессии $q=-\frac{1}{3}$, а ее члены $b_1=1$, $b_2=-\frac{1}{3}$, $b_3=\frac{1}{9}$, $b_4=-\frac{1}{27}$ и т. д.

С возрастанием номера n члены этой прогрессии приближаются к нулю. Эту прогрессию также называют бесконечно убывающей. Отметим, что модуль ее знаменателя меньше единицы: $|q|<1$.

Определение

Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если модуль ее знаменателя меньше единицы.

Задача 1. Доказать, что геометрическая прогрессия $\{b_n\}$, заданная формулой n-го члена $b_n=\frac{3}{5^n}$, является бесконечно убывающей.

▷ По условию $b_1=\frac{3}{5}$, $b_2=\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}$, откуда $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{5}$. Так как $|q|<1$, то данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей. ◀

На рисунке 53 изображен квадрат со стороной 1. Отметим штриховкой его половину, затем половину оставшейся части и т. д. Площади заштрихованных прямоугольников образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots\ .$$

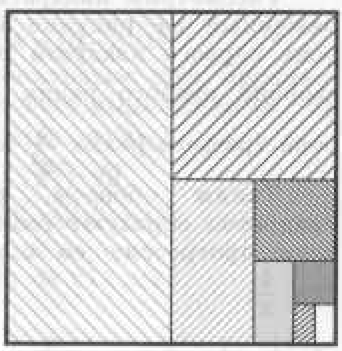


Рис. 53

Если заштриховать все получающиеся таким образом прямоугольники, то штриховкой покроется весь квадрат. Естественно считать, что сумма площадей всех заштрихованных прямоугольников равна 1, т. е.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=1.$$

Левая часть равенства представляет собой сумму бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим сумму первых n слагаемых

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Если n неограниченно возрастает, то $\frac{1}{2^n}$ как угодно близко приближается к нулю, т. е. $\frac{1}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$. Бесконечную сумму $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ считают равной 1.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии есть предел последовательности $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$.

Например, для прогрессии

$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots, \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots$, где $b_1=1$, $q=-\frac{1}{3}$, имеем

$$S_1=1,\quad S_2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\quad S_3=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{7}{9}, \ldots,$$

$$S_n=\frac{1\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ldots .$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}$.

Сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии **можно находить по формуле**

$$S=\frac{b_1}{1-q}. \tag{3}$$

Выведем эту формулу с помощью формулы $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, записав ее так: $S_n=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$.

○ Обозначим $\frac{b_1}{1-q}=a$, тогда $|S_n-a|=|aq^n|$. В предыдущем параграфе доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}(aq^n)=0$, где $|q|<1$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=a,\text{ или }\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{b_1}{1-q}.$$

Таким образом, сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Из формулы (3) при $b_1=1$ получаем $S=\frac{1}{1-q}$. Это равенство обычно записывают так: $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1-q}$.

Подчеркнем, что это равенство справедливо при $|q|<1$, в частности при $q=0$.

Задача 2. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \ldots$.

▷ Так как $b_1=\frac{1}{2}$, $b_2=-\frac{1}{6}$, то $q=\frac{b_2}{b_1}=-\frac{1}{3}$, и по формуле (3) получим $S=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{8}$. ◀

Задача 3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3=-1$, $q=\frac{1}{7}$.

▷ Применяя формулу $b_n=b_1q^{n-1}$ при $n=3$, получаем

$$-1=b_1\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3-1},\ -1=b_1\cdot\frac{1}{49},$$

откуда $b_1=-49$. По формуле (3) находим $S=\dfrac{-49}{1-\frac{1}{7}}=-57\frac{1}{6}$. ◀

Задача 4. С помощью формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии записать бесконечную периодическую десятичную дробь $a=0,(15)=0,151515\ldots$ в виде обыкновенной дроби.

▷ Составим следующую последовательность приближенных значений данной бесконечной десятичной дроби:

$$a_1=0,15=\frac{15}{100},\quad a_2=0,1515=\frac{15}{100}+\frac{15}{100^2},$$

$$a_3=0,151515=\frac{15}{100}+\frac{15}{100^2}+\frac{15}{100^3},\ \ldots .$$

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $a=\frac{15}{100}+\frac{15}{100^2}+\frac{15}{100^3}+\ldots$, где $b_1=\frac{15}{100}$, $q=\frac{1}{100}$.

По формуле (3) получаем $a=\dfrac{\frac{15}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}$. ◀

Задача 5. Найти первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если сумма этой прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192.

▷ Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\frac{b_1}{1-q}$, тогда сумма кубов ее членов S' будет вычисляться по формуле $S'=\frac{b_1^3}{1-q^3}$. Возведем S в куб и найдем отношение $\frac{S^3}{S'}$:

$$\frac{1-q^3}{(1-q)^3}=\frac{4^3}{192};\ \frac{1-q^3}{(1-q)^3}=\frac{1}{3}.$$

Чтобы найти q, решим уравнение $3(1-q^3)=(1-q)^3$.

Так как $q\neq 1$, то $3(1+q+q^2)=1-2q+q^2$ или $2q^2+5q+2=0$. Корни этого уравнения $q_1=-2$, $q_2=-\frac{1}{2}$. По условию $|q|<1$, значит, первый корень посторонний. Следовательно, $q=-\frac{1}{2}$, $b_1=4(1-q)$, $b_1=6$. ◀

Задача 6. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если ее второй член, удвоенное произведение первого члена на четвертый и третий член являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью, равной $\frac{1}{3}$.

▷ По условию b_2, $2b_1\cdot b_4$, b_3 — последовательные члены арифметической прогрессии с разностью $d=\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\begin{cases} 2b_1\cdot b_1q^3-b_1q=\frac{1}{3}, \\ b_1q^2-2b_1^2q^3=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получаем $b_1(q^2-q)=\frac{2}{3}$, откуда $b_1=\frac{2}{3q(q-1)}$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы, получаем уравнение

$$\frac{8q^3}{9q^2(q-1)^2}-\frac{2q}{3q(q-1)}=\frac{1}{3},$$

которое можно преобразовать к виду $3q^2-8q-3=0$, откуда $q_1=3$, $q_2=-\frac{1}{3}$. Так как $|q|<1$, то $q=-\frac{1}{3}$. Находим $b_1=\frac{3}{2}$ и $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{9}{8}$. ◀

Упражнения

13. Выяснить, является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой n-го члена:

1) $b_n = -5^{2n}$; 2) $b_n = 2^{3n}$.

14. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_4 = 88$, $q = 2$; 2) $b_1 = 11$, $b_4 = 88$.

15. Доказать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

1) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$; 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$;

3) $-27, -9, -3, \dots$; 4) $-64, -32, -16, \dots$.

16. Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если:

1) $b_1 = 40$, $b_2 = -20$; 2) $b_7 = 12$, $b_{11} = \frac{3}{4}$;

3) $b_7 = -30$, $b_8 = 15$; 4) $b_5 = 9$, $b_{10} = -\frac{1}{27}$.

17. Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^{n+1}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (0,7)^n$.

18. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = -\frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{8}$; 2) $q = \frac{1}{3}$, $b_5 = \frac{1}{81}$;

3) $q = -\frac{1}{3}$, $b_1 = 9$; 4) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = \frac{1}{8}$.

19. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $6, 1, \frac{1}{6}, \dots$; 2) $-25, -5, -1, \dots$.

20. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(5); 2) 0,(8); 3) 0,(32); 4) 0,2(5).

---

21. Выяснить, является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:

1) $b_n = 3\cdot(-2)^n$; 2) $b_n = -5\cdot 4^n$;

3) $b_n = 8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

22. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = \frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4 = \frac{9}{8}$.

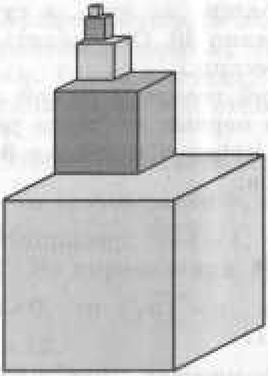


Рис. 54

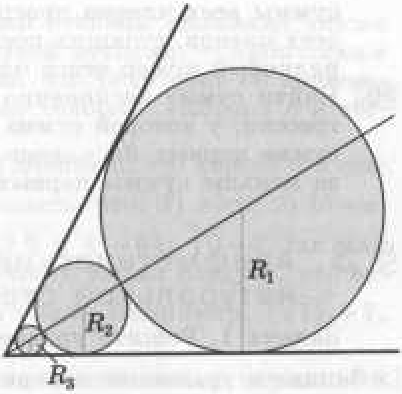


Рис. 55

23. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 30. Найти:

1) b_1, если $q=\frac{1}{5}$; 2) q, если $b_1=20$.

24. Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2^n}{2^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+2}{3^n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5^n+1)^2}{5^{2n}}$.

25. На куб со стороной a поставили куб со стороной $\frac{a}{2}$, на него — куб со стороной $\frac{a}{4}$, затем — куб со стороной $\frac{a}{8}$ и т. д. (рис. 54). Найти высоту получившейся фигуры.

26. В угол, равный 60°, последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 55). Радиус первой окружности равен R_1. Найти радиусы R_2, R_3, ..., R_n, ... остальных окружностей и показать, что они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Доказать, что сумма $R_1+2(R_2+R_3+...+R_n+...)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

27. Найти первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если второй ее член равен 6, а сумма этой прогрессии в 8 раз меньше суммы квадратов ее членов.

28. Найти первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой отношение суммы кубов всех членов к сумме квадратов всех членов равно 3, а отношение суммы всех членов к сумме квадратов всех членов равно $\frac{3}{7}$.

29. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой равна $\frac{16}{3}$, содержит член, равный $\frac{1}{6}$. Отношение суммы всех членов прогрессии, стоящих до него, к сумме всех членов, стоящих после него, равно 30. Определить порядковый номер этого члена прогрессии.

30. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма квадратов первых n членов равна сумме первых $2n$ членов, а сумма кубов n членов в 3 раза меньше суммы первых $3n$ членов.

§ 3. Арифметический корень натуральной степени

Задача 1. Решить уравнение $x^4=81$.

▷ Запишем уравнение в виде $x^4-81=0$, или $(x^2-9)(x^2+9)=0$. Так как $x^2+9\neq0$, то $x^2-9=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=-3$. ◀

Итак, уравнение $x^4=81$ имеет два действительных корня $x_1=3$, $x_2=-3$. Их называют корнями четвертой степени из числа 81, а положительный корень (число 3) называют арифметическим корнем четвертой степени из числа 81 и обозначают $\sqrt[4]{81}$. Таким образом, $\sqrt[4]{81}=3$.

Можно доказать, что уравнение $x^n=a$, где n — натуральное число, a — неотрицательное число, имеет (и притом единственный) неотрицательный корень. Этот корень называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Определение

Арифметическим корнем натуральной степени $n\geqslant2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Существование арифметического корня примем без доказательства, а единственность докажем методом от противного.

○ Пусть уравнение $x^n=a$, где $n\in N$, $a\geqslant0$, имеет два положительных корня x_1 и x_2, т. е. $x_1>0$, $x_2>0$, и если $x_1\neq x_2$, то либо $x_1<x_2$, либо $x_1>x_2$. Из определения корня следует, что $x_1^n=a$, $x_2^n=a$, т. е. $x_1^n=x_2^n$.

В курсе алгебры основной школы было доказано, что при умножении неравенств одинакового смысла, левые и правые части которых положительны, получается неравенство того же смысла. Отсюда следует, что если $0<x_1<x_2$ и $n\in N$, то $x_1^n<x_2^n$; если $0<x_2<x_1$, то $x_2^n<x_1^n$. И в том и в другом случае $x_1^n\neq x_2^n$. Получим противоречие с равенством $x_1^n=x_2^n$. Следовательно, наше предположение неверно и $x_1=x_2$. ●

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Число a называется *подкоренным выражением*. Если $n=2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Арифметический корень второй степени называют также *квадратным корнем*, корень третьей степени — *кубическим корнем*. В тех случаях, когда ясно, что речь идет об арифметическом корне n-й степени, кратко говорят: «Корень n-й степени».

Чтобы, используя определение, доказать, что корень n-й степени $\sqrt[n]{a}$ $(a \geqslant 0)$ равен b, нужно показать, что: 1) $b \geqslant 0$; 2) $b^n = a$.

Например, $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4 > 0$ и $4^3 = 64$; $\sqrt[n]{0} = 0$, так как $0^n = 0$. Из определения арифметического корня следует, что если $a \geqslant 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$, а также $\sqrt[n]{a^n} = a$. Например, $(\sqrt[5]{7})^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется *извлечением корня* n-й степени. Это действие является обратным действию возведения в n-ю степень.

<u>Задача 2.</u> Решить уравнение $x^3 = 8$.

▷ Запишем уравнение в виде $x^3 - 8 = 0$, или $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$, $(x-2)((x+1)^2+3) = 0$. Так как $(x+1)^2 + 3 \neq 0$, то $x - 2 = 0$, откуда $x = 2$. ◀

Итак, уравнение $x^3 = 8$ имеет один действительный корень $x = 2$. Так как $2 > 0$, то число 2 — это арифметический корень из 8, т. е. $\sqrt[3]{8} = 2$.

<u>Задача 3.</u> Решить уравнение $x^3 = -8$.

▷ Запишем уравнение в виде $x^3 + 8 = 0$, или $(x+2)(x^2-2x+4) = 0$, $(x+2)((x-1)^2+3) = 0$. Так как $(x-1)^2 + 3 \neq 0$, то $x + 2 = 0$, откуда $x = -2$. ◀

Итак, уравнение $x^3 = -8$ имеет один действительный корень $x = -2$. Так как $-2 < 0$, то число -2 является корнем из числа -8, но оно не является арифметическим корнем. Число -2 называют корнем кубическим из числа -8 и обозначают $\sqrt[3]{-8}$:

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ или } \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Вообще, для любого нечетного натурального числа $2k+1$ уравнение $x^{2k+1} = a$ при $a < 0$ имеет только один действительный корень, причем отрицательный. Этот корень обозначается, как и арифметический корень, символом $\sqrt[2k+1]{a}$. Его называют *корнем нечетной степени из отрицательного числа*.

Например, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Корень нечетной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a = |a|$ равенством $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$. Например, $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Докажем, что если $a < 0$ и $n = 2k+1$, где $k \in N$, то имеется единственное число $x < 0$, такое, что $x^n = a$.

○ Обозначим буквой b число, противоположное числу a, т. е. $b=-a$. Тогда $b>0$ и существует единственный арифметический корень c степени $2k+1$ из положительного числа b, т. е. $c^{2k+1}=b$, или $\sqrt[2k+1]{b}=c$. Таким образом, $\sqrt[2k+1]{b}=\sqrt[2k+1]{-a}=\sqrt[2k+1]{|a|}=c$, где $c>0$ и $-\sqrt[2k+1]{|a|}=-c$. Но $(-c)^{2k+1}=(-1)^{2k+1}c^{2k+1}=(-1)b=(-1)(-a)=a$. Значит, $-\sqrt[2k+1]{|a|}$ есть отрицательное число $-c$, такое, что $(-c)^{2k+1}=a$. ●

Задача 4. Вычислить $\sqrt[3]{-0,027}-\sqrt[4]{0,0016}-\sqrt[6]{729}-\sqrt[7]{-128}$.

▷ $\sqrt[3]{-0,027}-\sqrt[4]{0,0016}-\sqrt[6]{729}-\sqrt[7]{-128}=\sqrt[3]{-(0,3)^3}-\sqrt[4]{(0,2)^4}-\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[7]{-2^7}=-0,3-0,2-3+2=-1,5$. ◀

Арифметический корень n-й степени обладает следующими свойствами: если $a\geqslant 0$, $b>0$ и n, k, m — натуральные числа, причем $n\geqslant 2$, $m\geqslant 2$, то:

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. **2.** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. **3.** $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$. **5.** $\sqrt[kn]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Отметим, что в свойстве 1 число b может также быть равным 0; в свойстве 3 число m может быть любым целым, если $a>0$.

Докажем, например, что $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ (свойство 1).

○ Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\geqslant 0$, так как $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$;

2) $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=ab$, так как $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$. ●

Докажем, что $\sqrt[kn]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ (свойство 5).

○ 1) $\sqrt[n]{a^m}\geqslant 0$, так как $a\geqslant 0$; $\sqrt[kn]{a^{mk}}\geqslant 0$, так как $a\geqslant 0$;

2) $(\sqrt[n]{a^m})^{kn}=\sqrt[n]{((a^m)^k)^n}=a^{mk}$; $(\sqrt[kn]{a^{mk}})^{kn}=a^{mk}$.

Это свойство называют основным свойством корня. ●

Аналогично доказываются и остальные свойства. Приведем примеры применения свойств арифметического корня.

1) $\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{27\cdot 3}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$; 2) $\sqrt[7]{5^{21}}=\sqrt[7]{(5^3)^7}=5^3=125$;

3) $\sqrt[3]{\frac{256}{625}}:\sqrt[3]{\frac{4}{5}}=\sqrt[3]{\frac{256}{625}:\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{4}{5}$;

4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}=\sqrt[12]{4096}=\sqrt[12]{2^{12}}=2$; 5) $(\sqrt[4]{9})^{-2}=\sqrt[4]{9^{-2}}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\frac{1}{3}$;

6) $\sqrt[7]{(-3)^{21}}=-\sqrt[7]{3^{21}}=-3^3=-27$;

7) $\sqrt{(3-\sqrt{7})^6}=\sqrt{(\sqrt{7}-3)^6}=|\sqrt{7}-3|^3$.

Задача 5. Упростить выражение $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$, где $a>0$, $b>0$.

▷ Используя свойства арифметического корня, получаем $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}=\dfrac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}}=\dfrac{a^3b^2}{a^2b}=ab$. ◀

Отметим еще одно свойство арифметического корня четной степени: $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$, где k — натуральное число.

○ Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $|a|\geqslant 0$ по определению модуля;

2) $|a|^{2k}=a^{2k}$, так как $|a|^2=a^2$. ●

Задача 6. Упростить выражение $\sqrt[4]{(x-5)^4}+\sqrt[6]{(x-3)^6}$, если $3<x<5$.

▷ $\sqrt[4]{(x-5)^4}+\sqrt[6]{(x-3)^6}=|x-5|+|x-3|$. Так как $3<x<5$, то $|x-5|=-(x-5)=5-x$, $|x-3|=x-3$. Поэтому $\sqrt[4]{(x-5)^4}+\sqrt[6]{(x-3)^6}=5-x+x-3=2$. ◀

Задача 7. Упростить выражение

$$A=\sqrt{a+2-2\sqrt{a+1}}+\sqrt{a+5+4\sqrt{a+1}}.$$

▷ Очевидно, A имеет смысл при $a\geqslant -1$. Подкоренное выражение $a+2-2\sqrt{a+1}$ можно представить в виде $a+1-2\sqrt{a+1}+1=(\sqrt{a+1}-1)^2$. Подкоренное выражение $a+5+4\sqrt{a+1}=a+1+4\sqrt{a+1}+4=(\sqrt{a+1}+2)^2$, следовательно,

$$\sqrt{(\sqrt{a+1}-1)^2}=|\sqrt{a+1}-1|,\quad \sqrt{(\sqrt{a+1}+2)^2}=|\sqrt{a+1}+2|.$$

Если $\sqrt{a+1}\geqslant 1$, то $a\geqslant 0$ и $|\sqrt{a+1}-1|=\sqrt{a+1}-1$, и тогда $A=\sqrt{a+1}-1+\sqrt{a+1}+2=2\sqrt{a+1}+1$. Если $0\leqslant\sqrt{a+1}<1$, т. е. $-1\leqslant a<0$, то $A=1-\sqrt{a+1}+\sqrt{a+1}+2=3$.

Ответ. $A=\begin{cases}2\sqrt{a+1}+1, \text{ если } a\geqslant 0,\\ 3, \text{ если } -1\leqslant a<0.\end{cases}$ ◀

Задача 8. Доказать, что $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

▷ Пусть $20+14\sqrt{2}=a$, $20-14\sqrt{2}=b$, тогда $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=A$. Докажем, что $A=4$.

По формуле куба суммы запишем:

$$A^3=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3=a+b+3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=$$
$$=40+3\sqrt[3]{400-196\cdot 2}\cdot A=40+3\cdot 2\cdot A=40+6A.$$

Таким образом, левая часть A рассматриваемого равенства является корнем уравнения $x^3-6x-40=0$.

Это уравнение, имеющее корень $x=4$, запишем в виде $(x-4)\cdot(x^2+4x+10)=0$. Так как уравнение $x^2+4x+10=0$ не имеет действительных корней ($D<0$), то $x=4$ — единственный действительный корень уравнения. Левая часть равенства A — действительное число, значит, $A=4$. ◀

Задача 9. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $A=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$.

▷ Пусть $\sqrt[3]{2}=a$, тогда $a^3=2$ и выражение A примет вид: $A=\dfrac{1}{1+a+2a^2}=\dfrac{1}{a^2+(1+a+a^2)}$. Умножим числитель и знаменатель полученной дроби на $(a-1)\neq 0$. Применяя формулу разности кубов и учитывая, что $a^3=2$, запишем $A=\dfrac{a-1}{a^2(a-1)+(a^3-1)}=\dfrac{a-1}{3-a^2}$.

Умножив числитель и знаменатель на $9+3a^2+a^4$, получим в знаменателе разность кубов: $A=\dfrac{(a-1)(9+3a^2+a^4)}{27-a^6}$.

Так как $a^3=2$, то $A=\dfrac{7a-a^2-3}{23}=\dfrac{7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-3}{23}$. ◀

Упражнения

31. (Устно.) 1) Найти арифметический квадратный корень из числа:

$$1;\ 0;\ 16;\ 0{,}81;\ 169;\ \frac{1}{289}.$$

2) Найти арифметический кубический корень из числа:

$$1;\ 0;\ 125;\ \frac{1}{27};\ 0{,}027;\ 0{,}064.$$

3) Найти арифметический корень четвертой степени из числа:

$$0;\ 1;\ 16;\ \frac{16}{81};\ \frac{256}{625};\ 0{,}0016.$$

Вычислить (32—34).

32. 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$.

33. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$.

34. 1) $\sqrt[15]{-1}$; 2) $\sqrt[5]{-1024}$; 3) $\sqrt[7]{-8^7}$.

35. Решить уравнение:

1) $x^4=256$; 2) $x^5=-\frac{1}{32}$; 3) $5x^5=-160$; 4) $2x^6=128$.

Вычислить (36—40).

36. 1) $\sqrt[5]{32}-0{,}5\sqrt[3]{-216}$; 2) $\sqrt[3]{-1000}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

3) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0{,}001}-\sqrt[4]{0{,}0016}$.

37. 1) $\sqrt[3]{343\cdot 0{,}125}$; 2) $\sqrt[3]{512\cdot 216}$; 3) $\sqrt[5]{32\cdot 100\,000}$.

38. 1) $\sqrt[3]{5^3\cdot 7^3}$; 2) $\sqrt[4]{11^4\cdot 3^4}$; 3) $\sqrt[5]{(0{,}2)^5\cdot 8^5}$; 4) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot 21^7}$.

39. 1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[3]{0{,}2}\cdot\sqrt[3]{0{,}04}$; 3) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$; 4) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{16}$.

40. 1) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 2^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{2^3\cdot 5^6}$; 3) $\sqrt[4]{3^{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8}$; 4) $\sqrt[10]{4^{30}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$.

41[1]. Извлечь корень:

1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}$; 2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}$; 4) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}}$.

42. Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}$; 2) $\sqrt[4]{3a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{27a^2b}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}$.

Вычислить (43—44).

43. 1) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; 4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

44. 1) $\sqrt[4]{324}:\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{128}:\sqrt[3]{2000}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$;

5) $(\sqrt{25}-\sqrt{45}):\sqrt{5}$; 6) $(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}$.

45. Упростить выражение:

1) $\sqrt[5]{a^6b^7}:\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $\sqrt[3]{81x^4y}:\sqrt[3]{3xy}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}}:\sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}}:\sqrt[4]{\frac{a}{8b^3}}$.

Вычислить (46—47).

46. 1) $(\sqrt[6]{7^3})^2$; 2) $(\sqrt[6]{9})^{-3}$; 3) $(\sqrt[10]{32})^2$; 4) $(\sqrt[8]{16})^{-4}$.

[1] Здесь и далее буквами обозначены положительные числа, если нет дополнительных условий.

47. 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[9]{3^7}}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[6]{5^5}}$.

48. Упростить выражение:

1) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^6$; 2) $\left(\sqrt[3]{y^2}\right)^3$; 3) $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\right)^6$;

4) $\left(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3}\right)^{12}$; 5) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$; 6) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}\right)^4$.

49. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[3]{2x-3}$; 2) $\sqrt[6]{x+3}$; 3) $\sqrt[6]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\dfrac{2-3x}{2x-4}}$?

Вычислить (50—51).

50. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 2) $(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$;

3) $(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}})^2$.

51. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}$; 5) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$.

Упростить выражение (52—53).

52. 1) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{27b}$; 2) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}$.

53. 1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3$; 2) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-\left(\sqrt[5]{xy^2}\right)^5$; 4) $\left(\left(\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}}\right)^5-\sqrt[5]{a}\right):\sqrt[10]{a^2}$.

54. Вычислить:

1) $\dfrac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$; 2) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$.

55. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{5}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$; 2) $\dfrac{4}{\sqrt{\sqrt{5}+3}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$; 4) $\dfrac{11}{\sqrt{7-\sqrt{5}}}$.

56. Упростить:

1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при: а) $x\geqslant 2$; б) $x<2$;

2) $\sqrt{(3-x)^6}$ при: а) $x\leqslant 3$; б) $x>3$;

3) $\sqrt[4]{(x+6)^4}+\sqrt{(x-3)^2}$, если $-1<x<2$;

4) $\sqrt[6]{(2x+1)^6}-\sqrt[4]{(4+x)^4}$, если $-3<x<-1$.

57. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

3) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$.

58. Сравнить значения выражений:

1) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}$ и $\sqrt[3]{63}$; 2) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}$ и $\sqrt{10}+\sqrt[3]{28}$.

59. Доказать, что:

1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$;

2) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

60. Упростить выражение:

1) $\sqrt{43+30\sqrt{2}}+\sqrt{43-30\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt{109+12\sqrt{3}}-\sqrt{109-12\sqrt{3}}$.

61. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$; 4) $\dfrac{3}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$.

62. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{(x+3)^2-12x}}{\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}$;

3) $\left(\left(\dfrac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):\left(a+\sqrt[6]{a^3b^2}\right)-\sqrt[3]{b}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{x+\dfrac{2xy}{1+y^2}}+\sqrt{x-\dfrac{2xy}{1+y^2}}\right)\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{y^2}}$;

5) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^3+2ax^2+a^2x}{x-a}}-\sqrt[3]{\dfrac{x^3-2ax^2+a^2x}{x+a}}\right)^{-1}\cdot\sqrt[3]{a}+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{a^2}}$;

6) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bx}\right)^2+bx+3}{x\left(\sqrt{b}+\sqrt{3x^{-1}}\right)^2}$.

§ 4. Степень с рациональным и действительным показателями

1. Степень с рациональным показателем

Задача 1. Вычислить $\sqrt[4]{5^{12}}$.

▷ Так как $5^{12}=(5^3)^4$, то $\sqrt[4]{5^{12}}=\sqrt[4]{(5^3)^4}=5^3=125$. ◀

Таким образом, можно записать $\sqrt[4]{5^{12}}=125=5^3$, или $\sqrt[4]{5^{12}}=5^{\frac{12}{4}}$, так как $3=\frac{12}{4}$. Аналогично $\sqrt[3]{3^{-15}}=3^{-\frac{15}{3}}$.

Если $n\in N$, $m\in Z$ и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a>0$ справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

○ По условию $\frac{m}{n}=k$, где $k\in Z$, откуда $m=nk$. Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{kn}}=\sqrt[n]{(a^k)^n}=a^k=a^{\frac{m}{n}}. \bullet$$

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где $a>0$, определяют так, чтобы осталась верной формула (1), т. е. и в этом случае считают, что $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, формула (1) справедлива для любого целого числа m и любого натурального $n\geqslant 2$ и $a>0$. Например,

$$32^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{32^3}=\sqrt[5]{2^{15}}=2^3=8; \quad 3^{\frac{6}{5}}=\sqrt[5]{3^6}=\sqrt[5]{3^5\cdot 3}=3\sqrt[5]{3};$$

$$27^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^{-2}}=\sqrt[3]{3^{-6}}=\sqrt[3]{(3^{-2})^3}=3^{-2}=\frac{1}{9}.$$

Напомним, что рациональное число r — это число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число. Тогда по формуле (1) получаем $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, степень определена для любого рационального показателя r и любого положительного основания a.

Если $r=\frac{m}{n}>0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a>0$, но и при $a=0$, причем $\sqrt[n]{0^m}=0$. Поэтому считают, что при $r>0$ выполняется равенство $0^r=0$.

Пользуясь формулой (1), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Так как $\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}$, где n и k — натуральные числа, m — целое число, то при любом $a>0$ справедливо равенство

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mk}{nk}}. \qquad (2)$$

Например, $8^{\frac{5}{15}}=8^{\frac{1}{3}}=2$.

Можно показать, что все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

Для любых рациональных чисел p и q и любых $a>0$ и $b>0$ верны равенства:

1. $a^pa^q=a^{p+q}$. 2. $a^p:a^q=a^{p-q}$. 3. $(a^p)^q=a^{p\cdot q}$.
4. $(ab)^p=a^pb^p$. 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$.

В основе доказательства свойств лежат свойства корней.

○ Докажем свойство 1. Пусть $p=\frac{m}{n}$, $q=\frac{k}{l}$, где $n\in N$, $l\in N$, $m\in Z$, $k\in Z$. Нужно доказать, что $a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{k}{l}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}$.

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, запишем левую часть полученного равенства в виде $a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{k}{l}}=a^{\frac{ml}{nl}}a^{\frac{kn}{nl}}$.

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем $a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{k}{l}}=a^{\frac{ml}{nl}}a^{\frac{kn}{nl}}=\sqrt[nl]{a^{ml}}\cdot\sqrt[nl]{a^{kn}}=\sqrt[nl]{a^{ml}\cdot a^{kn}}=\sqrt[nl]{a^{ml+kn}}=a^{\frac{ml+kl}{nl}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}$. ●

Докажем свойство 3.

○ Пусть $p=\frac{m}{n}$, $q=\frac{k}{l}$, где $n\in N$, $l\in N$, $m\in Z$, $k\in Z$. Нужно доказать, что $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}}=a^{\frac{mk}{nl}}$.

По основному свойству дроби и определению степени с рациональным показателем $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}}=\left(a^{\frac{ml}{nl}}\right)^{\frac{k}{l}}=\left(\sqrt[nl]{a^{ml}}\right)^{\frac{k}{l}}$. По одному из свойств арифметического корня

$$\left(\sqrt[nl]{a^{ml}}\right)^{\frac{k}{l}}=\sqrt[nl]{a^{ml\cdot\frac{k}{l}}}=\sqrt[nl]{a^{mk}}=a^{\frac{mk}{nl}}. \text{ ●}$$

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Приведем примеры применения свойств степени:

1) $16^{\frac{2}{3}}:16^{\frac{1}{6}}=16^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4$;

2) $\left(81^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}=81^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}}=81^{\frac{3}{4}}=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^{4\cdot\frac{3}{4}}=3^3=27;$

3) $24^{\frac{2}{3}}=(2^3\cdot 3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\cdot\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}=4\sqrt[3]{3^2}=4\sqrt[3]{9}.$

Задача 2. Вычислить $36^{\frac{1}{5}}\cdot 216^{\frac{1}{5}}$.

▷ $36^{\frac{1}{5}}\cdot 216^{\frac{1}{5}}=(36\cdot 216)^{\frac{1}{5}}=(6^5)^{\frac{1}{5}}=6.$ ◀

Задача 3. Упростить выражение

$$\frac{a^{\frac{6}{5}}b+ab^{\frac{6}{5}}}{\sqrt[5]{a^6}+a\sqrt[5]{b}},\text{ если } a>0,\ b>0.$$

▷ $\dfrac{a^{\frac{6}{5}}b+ab^{\frac{6}{5}}}{\sqrt[5]{a^6}+a\sqrt[5]{b}}=\dfrac{ab\left(a^{\frac{1}{5}}+b^{\frac{1}{5}}\right)}{a\left(a^{\frac{1}{5}}+b^{\frac{1}{5}}\right)}=b.$ ◀

Задача 4. Упростить выражение

$$\frac{a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{17}{6}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}-\frac{a^{-\frac{2}{3}}-a^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{4}{3}}+a^{-1}},\text{ где } a>0.$$

▷ $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{17}{6}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}-a^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{4}{3}}+a^{-1}}=\dfrac{a^{\frac{5}{6}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{2}}(1-a)}-\dfrac{a^{-\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-1\right)}{a^{-\frac{4}{3}}\left(1+a^{\frac{1}{3}}\right)}=a^{\frac{1}{3}}(1+a)-$

$-\left(a^{\frac{1}{3}}-1\right)=a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1=a^{\frac{4}{3}}+1.$ ◀

Задача 5. Вкладчик поместил в банк 10 000 р. Банк ежегодно выплачивает 3% от суммы вклада. Какую сумму денег получит вкладчик через 3 года и 5 месяцев?

▷ Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов:

$$S=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t,$$

где a — первоначальная сумма денег, p — число процентов, начисляемых банком в год, t — число лет, в течение которых деньги находились в банке.

В данной задаче $a=10\,000$, $p=3$, $t=3\frac{5}{12}$. По формуле сложных процентов находим $S=10\,000\cdot 1{,}03^{3\frac{5}{12}}$. Вычисления можно провести на микрокалькуляторе.

Ответ. 11 062 р. 70 к. ◀

Задача 6. За какое время удваиваются цены на товары, если годовой показатель инфляции составляет: 1) 5%; 2) 8%; 3) 10%?

▷ 1) Необходимо решить уравнение $(1{,}05)^x=2$, где x — количество лет. Можно найти значение x на множестве натуральных чисел, применяя микрокалькулятор (умножая 1,05 на себя n раз до тех пор, пока результат не станет максимально близким к числу 2).

2), 3) Для ответа на эти вопросы решаются соответственно уравнения $(1{,}08)^x=2$ и $(1{,}1)^x=2$.

Ответ. Приблизительно через: 1) 14 лет; 2) 9 лет; 3) 6 лет. ◀

2. Степень с действительным показателем

Покажем, как можно определить степень с иррациональным показателем на примере $3^{\sqrt{2}}$.

Пусть r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ... — последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ (например, с недостатком):

$$r_1=1{,}4;\ r_2=1{,}41;\ r_3=1{,}414;\ \dots .$$

Эта последовательность стремится к числу $\sqrt{2}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\sqrt{2}$. Числа r_1, r_2, r_3, ... являются рациональными, и для них определены степени 3^{r_1}, 3^{r_2}, 3^{r_3}, ..., т. е. определена последовательность $3^{1,4}$; $3^{1,41}$; $3^{1,414}$; ... .

Можно показать, что эта последовательность стремится к некоторому действительному числу, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$, т. е. $3^{\sqrt{2}}=\lim\limits_{n\to\infty} 3^{r_n}$.

Вообще, пусть $a>0$ и x — произвольное иррациональное число. Рассмотрим последовательность x_1, x_2, ..., x_n, ... десятичных приближений числа x. Эта последовательность имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. Можно показать, что последовательность a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, ..., a^{x_n}, ... также имеет предел. Этот предел обозначают a^x и называют степенью числа a с показателем x. (Более подробно об этом будем говорить в 11 классе.) Таким образом, степень a^x определена для любого $a>0$ и любого действительного показателя x.

При любом $x\in \boldsymbol{R}$ и любом $a>0$ степень a^x является положительным действительным числом:

$$a^x>0 \text{ при } x\in \boldsymbol{R},\ a>0.$$

Если основание степени $a=0$, то степень 0^x определяют только при $x>0$ и считают, что $0^x=0$ при $x>0$. Например, $0^{\sqrt{2}}=0$, $0^{0,1}=0$. При $x\leqslant 0$ выражение 0^x не имеет смысла. Например, выражения 0^{-1}, $0^{-\sqrt{2}}$ смысла не имеют.

При таком определении степени с действительным показателем сохраняются все известные свойства степени с рациональным показателем. Доказательство этих свойств для степени с действительным показателем проводится в курсе высшей математики.

Задача 7. Упростить выражение $\dfrac{(a^{\sqrt{5}-1})^{\sqrt{5}+1}}{a^{\sqrt{7}-2}\cdot a^{3-\sqrt{7}}}$, где $a>0$.

▷ Применяя свойства степени с действительным показателем, получаем $\dfrac{(a^{\sqrt{5}-1})^{\sqrt{5}+1}}{a^{\sqrt{7}-2}\cdot a^{3-\sqrt{7}}}=\dfrac{a^{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}}{a^{\sqrt{7}-2+3-\sqrt{7}}}=\dfrac{a^4}{a}=a^3$. ◀

Приведем еще одно свойство степени (свойство 6), также доказываемое в курсе высшей математики с помощью теории пределов.

Для любого $a>1$ и любого $x>0$ число a^x больше 1, т. е. $a^x>1$ при $a>1$, $x>0$.

С помощью свойств степени с действительным показателем доказывается следующая теорема:

Теорема

Пусть $a>1$ и $x_1<x_2$. Тогда $a^{x_1}<a^{x_2}$.

○ По условию $x_2-x_1>0$. Поэтому по свойству 6 имеем $a^{x_2-x_1}>1$. Умножив обе части этого равенства на положительное число a^{x_1}, получим $a^{x_1}a^{x_2-x_1}>a^{x_1}$, отсюда по свойству умножения степеней $a^{x_2}>a^{x_1}$, т. е. $a^{x_1}<a^{x_2}$. ●

Следствие 1. Пусть $0<a<1$ и $x_1<x_2$. Тогда $a^{x_1}>a^{x_2}$.

○ Так как $0<a<1$, то $\dfrac{1}{a}>1$. Поэтому из теоремы следует, что при $x_1<x_2$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1}<\left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}.$$

По свойству деления степеней $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x=\dfrac{1}{a^x}$. Следовательно, $\dfrac{1}{a^{x_1}}<\dfrac{1}{a^{x_2}}$, откуда $a^{x_1}>a^{x_2}$. ●

Следствие 2. Пусть $a>0$, $a\neq1$, $a^{x_1}=a^{x_2}$. Тогда $x_1=x_2$.

○ Предположим, что равенство $x_1=x_2$ не выполняется. Пусть, например, $x_1<x_2$. Тогда при $a>1$ по теореме должно быть $a^{x_1}<a^{x_2}$, а при $0<a<1$ по следствию 1 должно быть $a^{x_1}>a^{x_2}$, что противоречит условию $a^{x_1}=a^{x_2}$. ●

Задача 8. Сравнить числа $3^{5\sqrt{3}}$ и $3^{3\sqrt{5}}$.

▷ Сравним показатели $5\sqrt{3}$ и $3\sqrt{5}$. Так как $5\sqrt{3}=\sqrt{75}$, $3\sqrt{5}=\sqrt{45}$ и $45<75$, то $3\sqrt{5}<5\sqrt{3}$. Поэтому по теореме $3^{3\sqrt{5}}<3^{5\sqrt{3}}$. ◀

Задача 9. Сравнить числа $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{15}}$ и $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$.

▷ Так как $1<\sqrt{3}<2$, то $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$. Сравним показатели данных степеней. Так как $15<16$, то $\sqrt{15}<\sqrt{16}$, т. е. $\sqrt{15}<4$. Применяя следствие 1, получаем $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{15}}>\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{4}$. ◀

<u>Задача 10.</u> Решить уравнение $8^x=2^{3\sqrt{5}}$.

▷ По свойствам степени $8^x=(2^3)^x=2^{3x}$. Поэтому уравнение можно записать так: $2^{3x}=2^{3\sqrt{5}}$. Применяя следствие 2, получаем $3x=3\sqrt{5}$, откуда $x=\sqrt{5}$. ◀

<u>Следствие 3.</u> Пусть $0<x_1<x_2$. Тогда если $p>0$, то $x_1^p<x_2^p$, а если $p<0$, то $x_1^p>x_2^p$.

○ По условию $\frac{x_2}{x_1}>1$.

1) Если $p>0$, то по свойству 6 получается $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^p>1$. По свойству деления степеней $\frac{x_2^p}{x_1^p}>1$, откуда $x_2^p>x_1^p$, т. е. $x_1^p<x_2^p$.

2) Если $p<0$, то $-p>0$ и по свойству 6 получаем $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-p}>1$, откуда $\frac{x_2^{-p}}{x_1^{-p}}>1$, $\frac{x_1^p}{x_2^p}>1$, $x_1^p>x_2^p$. ●

Сделаем <u>вывод</u>.

При возведении неравенства с положительной левой и положительной правой частями в положительную степень знак неравенства не меняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

<u>Задача 11.</u> Сравнить числа $\sqrt[5]{5}$ и $\sqrt[3]{3}$.

▷ По свойствам степени получаем $\left(\sqrt[5]{5}\right)^{15}=5^3=125$; $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{15}=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{15}=3^5=243$. Так как $0<125<243$ и $\frac{1}{15}>0$, то $125^{\frac{1}{15}}<243^{\frac{1}{15}}$, т. е. $\sqrt[5]{5}<\sqrt[3]{3}$. ◀

Упражнения

63. (Устно.) Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{a^5}$; 2) $\sqrt[5]{x^4}$; 3) $\sqrt{b^3}$; 4) $\sqrt[3]{a^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{6}$; 6) $\sqrt[7]{a^{-5}}$.

64. (Устно.) Представить в виде корня из степени с целым показателем:

1) $a^{\frac{1}{4}}$; 2) $b^{\frac{3}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2y)^{\frac{1}{3}}$; 6) $(5b)^{-\frac{3}{4}}$.

Вычислить (65—68).

65. 1) $16^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{2}{3}}$; 3) $8^{\frac{1}{3}}$; 4) $64^{\frac{2}{3}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

66. 1) $2^{\frac{2}{5}}\cdot 2^{\frac{8}{5}}$; 2) $5^{\frac{3}{8}}\cdot 5^{\frac{5}{8}}$; 3) $4^{\frac{5}{6}}:4^{\frac{1}{3}}$; 4) $9^{\frac{1}{3}}:9^{\frac{5}{6}}$; 5) $\left(8^{\frac{1}{15}}\right)^{-5}$.

67. 1) $9^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}}\cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}}:6^{\frac{3}{2}}$.

68. 1) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $10^{\frac{9}{7}}:10^{\frac{2}{7}}-5^{\frac{6}{5}}\cdot 5^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5}+\left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

69. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ при $a=0,16$; 2) $\sqrt{b}:\sqrt[6]{b}$ при $b=0,027$;

3) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$ при $x=1,33$; 4) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[12]{a^5}$ при $a=3,75$.

70. Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$; 4) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$.

71. Вынести общий множитель за скобки:

1) $x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$; 2) $(ab)^{\frac{1}{3}}+(ac)^{\frac{1}{3}}$; 3) $y^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{2}{3}}$; 4) $12xy^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}y$.

72. Пользуясь тождеством $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, разложить на множители:

1) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$; 2) $y^{\frac{2}{3}}-1$; 3) $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$;

4) $x-y$; 5) $4a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$; 6) $0,01m^{\frac{1}{6}}-n^{\frac{1}{6}}$.

73. Разложить на множители, используя тождество

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ или $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

1) $a-x$; 2) $x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$; 3) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$; 4) $27a+c^{\frac{1}{2}}$.

74. Сократить дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$; 2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{m+2\sqrt{mn}+n}$;

3) $\dfrac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}$; 4) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x-y}$.

75. Упростить выражение $\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{cb^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2c^2-4cb}{c-b}$.

Вычислить (76—79).

76. 1) $3^{\sqrt{5}}\cdot 3^{-\sqrt{5}}$; 2) $3^{2\sqrt{2}}:9^{\sqrt{2}}$; 3) $(6^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; 4) $((0,5)^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$.

77. 1) $2^{2-3\sqrt{5}}\cdot 8^{\sqrt{5}}$; 2) $5^{1+2\sqrt[3]{2}}:25^{\sqrt[3]{2}}$;

3) $(3^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$; 4) $(7^{1-\sqrt{5}})^{1+\sqrt{5}}-(\sqrt{7})^{0}$.

78. 1) $2^{2-3\sqrt{3}}\cdot 8^{\sqrt{3}}$; 2) $9^{3+\sqrt{2}}\cdot 3^{1-\sqrt{2}}\cdot 3^{-4-\sqrt{2}}$.

79. 1) $\dfrac{8^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 4^{1+\sqrt{5}}}$; 2) $(2^{2\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1})\cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

80. Выяснить, какое из чисел больше:

1) $5^{\sqrt{71}}$ или $5^{\sqrt{69}}$; 2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;

3) $3^{-\sqrt{3}}$ или $3^{-\sqrt{2}}$; 4) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$.

81. Сравнить число с единицей:

1) 2^{-2}; 2) $(0,013)^{-1}$; 3) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{5}$; 4) $27^{1,5}$;

5) $2^{-\sqrt{5}}$; 6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; 7) $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 8) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

82. Упростить выражение:

1) $x^{\sqrt{3}}\cdot x^{1-\sqrt{3}}$; 2) $a^{1-\sqrt{2}}\cdot a^{\sqrt{2}+1}$; 3) $(b^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}:b^{2}$.

83. Сравнить числа: 1) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt[6]{5}$ и $\sqrt[6]{7}$.

---

84. Вычислить:

1) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+810\,000^{0,25}-\left(7\dfrac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$;

2) $(0,001)^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}$; 3) $27^{\frac{2}{3}}-(-2)^{-2}+\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

4) $(-0,5)^{-4}-625^{0,25}-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.

Упростить выражение (85—86).

85. 1) $(a^{4})^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left(\left(\dfrac{a^{6}}{b^{-3}}\right)^{4}\right)^{\frac{1}{12}}$.

86. 1) $\dfrac{a^{\frac{5}{4}}\left(a^{-\frac{1}{4}}+a^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)}$; 2) $\dfrac{m^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{m^{4}}-\sqrt[5]{m^{-1}}\right)}{m^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{m^{-2}}\right)}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{3}}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

87. Вычислить:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}-5^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)\sqrt[3]{10}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}}\right)\sqrt[4]{1000}$.

Упростить выражение (88—89).

88. 1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)$.

89. 1) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\right)$;

2) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-\sqrt{a^{-1}b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

90. Так называемые полупрозрачные материалы обладают тем свойством, что они пропускают свет, но уменьшают его интенсивность. Некоторый полупрозрачный пластик толщиной 1 мм уменьшает интенсивность света на 10%. Сколько листов этого пластика нужно сложить, чтобы интенсивность света: 1) уменьшилась на 50%; 2) составила 80% от первоначальной?

91. Для успешного лечения пациента медикам приходится оценивать площадь поверхности тела больного. Ни рост, ни вес в отдельности не являются полноценной характеристикой площади поверхности кожного покрова человека. На основе многочисленных экспериментов в 1916 г. два медика Д. Ф. Дьюбос и Е. Ф. Дьюбос предложили формулу для вычисления в квадратных метрах площади поверхности человеческого тела: $S=aH^bW^c$, где H — рост человека (см), W — вес человека (кг), коэффициенты a, b и c — числа, которые на 401-м испытуемом были определены учеными Е. Гелханом и С. Джорджем так: $a\approx0{,}02350$, $b\approx0{,}42246$, $c\approx0{,}51456$. Найти площадь поверхности S тела человека, имеющего рост 170 см и вес 70 кг. Найти S того же человека, округлив значения коэффициентов a, b и c до одной значащей цифры; до двух значащих цифр.

92. Упростить выражение:

1) $\left(2a^{-0,5}-\frac{1}{3}b^{-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{3}b^{-\sqrt{2}}+2a^{-0,5}\right)$;

2) $\left(m^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3}\cdot m^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$; 3) $\left(a^{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; 4) $\left(a^{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}\right)^{1-\sqrt[3]{3}}$.

Решить уравнение (93—94).

93. 1) $6^{3x}=6^4$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 3) $9^x=3^{2\sqrt{2}}$; 4) $32^x=2^{10}$.

94. 1) $7^{x\sqrt{3}}=\sqrt{7}$; 2) $25^{x\sqrt{2}}=5\sqrt{5}$; 3) $(\sqrt{2})^x=2\sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{3})^{3x}=3\sqrt{3}$.

95. Сравнить числа:

1) $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt[5]{20}$; 2) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[4]{7}$; 3) $\sqrt{17}$ и $\sqrt[3]{28}$; 4) $\sqrt[4]{13}$ и $\sqrt[5]{23}$.

Упростить выражение (96—97).

96. 1) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}}-\dfrac{2a^2}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$;

2) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

97. 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

98. Найти значение выражения x^3+12x, если

$$x=\sqrt[3]{4\sqrt{5}+4}-\sqrt[3]{4\sqrt{5}-4}.$$

99. Упростить выражение:

1) $\left(x+a^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}\left(1-\sqrt{\dfrac{a}{x}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[10]{(x-a)^3}$;

2) $\left(x\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}-(x+1)\sqrt[3]{\dfrac{1}{(x^2-1)^2}}\right)^{\frac{3}{7}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^2-1}}$.

100. Найти значение выражения x^3+ax+b, если

$$x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}.$$

101. Найти значение выражения

$$\left(\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2},\text{ если } x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ и } n>m>0.$$

102. Найти значение выражения

$$\frac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}},\text{ если } x=\frac{2mn}{n^2+1} \text{ и } m>0,\ 0<n<1.$$

103. Вкладчик вложил в банк 5000 р. под 2% годовых. Сколько денег получит вкладчик через 3 года?

104. Банк выплачивает ежегодно 3% от суммы вклада. Сколько денег получит вкладчик через 2 года 7 месяцев, если первоначальная сумма вклада составляла 2000 р.?

Упражнения к главе IV

105. Вычислить:

1) $\left(0{,}645:0{,}3-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(4:6{,}25-1:5+\frac{1}{7}\cdot1{,}96\right)$;

2) $\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-0{,}108)$.

106. Представить в виде обыкновенной дроби:

1) $2{,}5(1)$; 2) $1{,}3(2)$; 3) $0{,}(248)$; 4) $0{,}(35)$.

Вычислить (107—109).

107. 1) 68^0, 10^{-2}, $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$, $(0{,}5)^{-3}$, $(-1{,}3)^{-2}$, $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2}$;

2) $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[6]{8^2}$, $\sqrt[8]{16^2}$, $\sqrt[3]{27^2}$;

3) $8^{\frac{1}{3}}$, $27^{\frac{2}{3}}$, $10000^{\frac{1}{4}}$, $32^{\frac{2}{5}}$, $32^{-\frac{3}{5}}$, $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$.

108. 1) $\sqrt[3]{6^3\cdot5^3}$, $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

2) $65^0:8^{-2}$, $16^{\frac{1}{4}}\cdot32^{\frac{1}{5}}$, $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}:9^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4:16^{-1}$;

3) $\frac{6^{\frac{1}{4}}\cdot6^{-\frac{1}{4}}}{6^2}$, $\frac{9^{\frac{7}{3}}\cdot9^{-\frac{4}{3}}}{9^2}$, $\frac{(0{,}5)^{0{,}3}\cdot(0{,}5)^{-1}}{(0{,}5)^{1{,}3}}$.

109. 1) $\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{1}{27}\cdot125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3) $27^{\frac{2}{3}}+7^{-2}$;

4) $(0{,}01)^{-2}:100^{-\frac{1}{2}}$; 5) $\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$; 6) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

110. 1) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{3}{4}}$; 2) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$; 3) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{16}}\right)^3$.

111. Расположить числа в порядке возрастания:

1) $1^{3{,}75}$, 2^{-1}, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 2) 98^0, $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$, $32^{\frac{1}{5}}$;

3) $\sqrt[3]{5{,}7}$, $\left(\frac{1}{10}\right)^{-4}$, $(3{,}7)^0$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\sqrt{1{,}6}$, $(0{,}3)^{-3}$.

112. Сравнить числа:

1) $(0{,}88)^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ и $(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$;

3) $(4{,}09)^{\sqrt[3]{2}}$ и $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

113. Упростить выражение, представив его в виде степени с основанием a:

1) $\dfrac{a^{1\frac{1}{2}}a^{-0,5}}{a^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\dfrac{a^{-3}a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(a^{2,5})^2\sqrt[5]{a}$; 4) $\sqrt[7]{a^2}\left(a^{\frac{3}{14}}\right)^2$.

114. Упростить выражение:

1) $x^{-2\sqrt{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$; 2) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}$.

115. Сравнить числа:

1) $\sqrt[7]{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)^2}$ и $\sqrt[7]{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)^2}$;

2) $\sqrt[5]{\left(1\dfrac{1}{4}-1\dfrac{1}{5}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(1\dfrac{1}{6}-1\dfrac{1}{7}\right)^3}$.

116. Решить уравнение:

1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^x=27$; 3) $7^{3x}=7^{10}$;

4) $2^{2x+1}=32$; 5) $4^{2+x}=1$.

117. Сократить дробь:

1) $\dfrac{y-16y^{\frac{1}{2}}}{5y^{\frac{1}{4}}+20}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}$.

118. Упростить:

1) $\dfrac{ab^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-1}$; 2) $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$.

119. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[4]{x^2-2x}$; 2) $\sqrt[3]{x^3-x^2-x-1}$;

3) $(x^2-3x-4)^{\frac{1}{6}}$; 4) $(x^3-x^2+x)^{\frac{1}{3}}$?

120. Показать, что геометрическая прогрессия, заданная формулой n-го члена $b_n=3\cdot 2^{-n}$ — бесконечно убывающая.

121. Найти третий член и сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1=108$, $q=\dfrac{1}{3}$.

---

122. Показать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, если:

1) $b_2=-81$, $S_2=162$; 2) $b_2=33$, $S_2=67$;

3) $b_1+b_2=130$, $b_1-b_3=120$; 4) $b_2+b_4=68$, $b_2-b_4=60$.

123. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

1) 1,10(209); 2) 0,108(32).

124. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, если сумма первых трех ее членов равна 39, а сумма обратных им величин равна $\frac{13}{27}$.

125. Найти сумму, все слагаемые которой, начиная с первого, являются членами одной и той же геометрической прогрессии:

1) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; 1; $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; ...; 2) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; -1; $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; ... .

126. Найти b_1 и q бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если известны ее сумма (S) и сумма n первых ее членов (S_n):

1) $S=\frac{2}{3}$, $S_5=\frac{31}{48}$; 2) $S=0{,}9$, $S_8=\frac{8}{9}$.

127. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3,5, а сумма квадратов ее членов равна $\frac{147}{16}$. Найти сумму кубов членов этой прогрессии.

128. Упростить выражение $\sqrt{65+6\sqrt{14}}+\sqrt{65-6\sqrt{14}}$.

129. Упростить выражение $a=(4-3\sqrt{2})^2+8\sqrt{34-24\sqrt{2}}-\sqrt{5}$. Сравнить полученное число с нулем.

130. Сравнить числа a и b, если:

1) $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $b=\sqrt{10}$; 2) $a=\sqrt{13}-\sqrt{12}$, $b=\sqrt{12}-\sqrt{11}$.

131. Найти значения x, при которых выражение имеет смысл:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{x-1}+2}$; 2) $\sqrt[4]{(1-x)^2-2}$;

3) $((1+x)^{-1}-3)^{\frac{1}{3}}$; 4) $(x+4(x-1)^{-2})^{-\frac{2}{5}}$.

132. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{5+\sqrt{10}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$; 5) $\frac{3}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$;

6) $\frac{11}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$; 7) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

133. Вычислить:

1) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})$;

2) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})$.

Упростить выражение (134—136).

134. 1) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$; 2) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{y}$; 4) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}-1$.

135. 1) $\dfrac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}$;

2) $\left(\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}}{x+1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}\right):\left(4x^{\frac{1}{3}}+4+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$.

136. 1) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}-\sqrt{a}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{a}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{a^4}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^5}{a^{\frac{2}{3}}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^{-1}}$;

3) $\left(\dfrac{a}{a+8}-\dfrac{4a}{\left(\sqrt[3]{a}+2\right)^3}\right)\left(\dfrac{1+2\sqrt[3]{a^{-1}}}{1-2a^{-\frac{1}{3}}}\right)^2-\dfrac{24}{a+8}$.

137. Доказать справедливость равенства:

1) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, если $a>0,\ a^2\geqslant b>0$;

2) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, если $a>0,\ a^2\geqslant b>0$.

138. Верно ли равенство:

1) $\sqrt{10+\sqrt{7}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}}=1+\sqrt{3-\sqrt{6}+\sqrt{7+2\sqrt{6}}}$;

2) $\sqrt{2-\sqrt{5+\sqrt{3}-\sqrt{27+8\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}}=1$?

139. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{(x^2+9)^{-0,5}+(x^2-9)^{-0,5}}{(x^2+9)^{-0,5}-(x^2-9)^{-0,5}}$ при $x=3\left(\dfrac{a^2+b^2}{2ab}\right)^{0,5}$;

2) $\dfrac{2a\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ при $x=0,5\sqrt{\dfrac{9}{7}+\sqrt{\dfrac{7}{a}}}$.

140. Доказать, что $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$.

Вопросы к главе IV

1. В каком виде можно записать любое действительное число?
2. Сохраняются ли законы и правила действий над рациональными числами и для действительных чисел?
3. Что называется пределом числовой последовательности?
4. Привести пример последовательности, предел которой равен 0.
5. Какая последовательность называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией?
6. Привести пример бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
7. Чему равна сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии?
8. Показать на примере, как с помощью формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно обратить бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную.
9. Что называется арифметическим корнем натуральной степени при $n \geqslant 2$?
10. Каким методом доказывается единственность арифметического корня из неотрицательного числа? Доказать это утверждение.
11. Какое равенство связывает корень нечетной степени из отрицательного числа и арифметический корень из противоположного ему числа?
12. Перечислить свойства арифметического корня натуральной степени.
13. Почему равенство $0^r = 0$ справедливо только для $r > 0$?
14. Доказать одно из свойств степени с рациональным показателем.
15. Доказать теорему о том, что $a^{x_1} < a^{x_2}$ при $a > 1$ и $x_1 < x_2$. Сформулировать следствия из этой теоремы.

Проверь себя!

1. Вычислить:

1) $\dfrac{12^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{7}{3}}}{4^{-\frac{1}{3}}}$; 2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 589^0$;

3) $\left(\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right) : \sqrt[3]{2}$.

2. Упростить выражение при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{c}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{a^5 b}{c^2}}$; 2) $\dfrac{a^{-3} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$.

3. **Сократить дробь:**

$$\frac{a-9a^{\frac{1}{2}}}{7a^{\frac{1}{4}}+21};\quad \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}.$$

4. **Сравнить числа** $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{4}\right)^3}$ **и** $\sqrt[5]{\left(\frac{11}{12}\right)^3}$.

5. **Упростить выражение** $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{ab}}\cdot\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

6. **Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии** $\frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \ldots$.

---

1. **Вычислить:**

1) $\dfrac{81^{-\frac{3}{4}}+27^{-\frac{4}{3}}}{3\cdot 9^{-1,5}-27^{-1}}$; 2) $\left(5^{\frac{1-\sqrt{3}}{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{25}$.

2. **Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь: 0,2(18); 3,15(12).**

3. **Упростить выражение:**

1) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}-a^{\frac{4}{3}}}{ab^{\frac{1}{3}}-b\sqrt[3]{a}}+1\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$;

2) $\left(a^{\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} : a^{\frac{\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}}}$.

4. **Сравнить с единицей число:** $(0{,}011)^{-2}$; $3{,}1^{0,5}$.

5. **Сумма членов некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна сумме квадратов ее членов и равна S. Может ли в этом случае S равняться 1?**

Историческая справка

В древности операции извлечения квадратных и кубических корней решались как геометрические задачи: найти сторону квадрата по его площади или сторону куба по его объему. Но подобные задачи не имели решения на множестве натуральных или рациональных чисел.

В школе Пифагора еще в V в. до н. э. было доказано, что рациональных чисел не хватает для точного измерения длины любого отрезка. Одной из первых задач, выводящих на понятие несоизмеримости отрезков, была задача нахождения стороны квадрата, площадь которого равна 2. Идею доказательства (методом от противного) несоизмеримости диагонали квадрата

и его стороны можно найти в знаменитой книге Евклида *«Начала»* (IV в. до н. э.).

После введения понятия радикала (корня) появился большой круг задач, связанных с поиском способов преобразования выражений с радикалами, а также способов нахождения приближенных значений корней с различными показателями. В решение первой задачи большой вклад внес древнегреческий философ и математик Тэтет (410—368 гг. до н. э.). Он также доказал иррациональность квадратных корней всех натуральных чисел, не являющихся квадратами целых чисел. Если отвлечься от геометрической фабулы задач, которые решал Тэтет, и записать их в современой символике, то окажется, что он нашел способы преобразования выражений вида $a\pm\sqrt{b}$, $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$. В частности, им была выведена формула

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

которая позволяет упростить выражение $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, если a^2-b является квадратом целого числа.

Например:

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-15}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-15}}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6}).$$

Нахождением приближенных значений корней занимались еще древние вавилоняне. Они нашли достаточно простой метод приближенного вычисления квадратных корней из натуральных чисел, основанный на соотношениях между средним арифметическим чисел a и b $\left(\frac{a+b}{2}\right)$, средним геометрическим $(\sqrt{ab})$ и средним гармоническим $\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$ этих чисел:

$$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}. \qquad (1)$$

Любое число x они представляли в виде произведения двух других чисел $(x=a\cdot b)$, а затем с нужной точностью искали $\sqrt{x}=\sqrt{ab}$, применяя неоднократно соотношения (1).

Вплоть до XII в. математики Индии и Востока использовали иррациональные числа в астрономических и других научных расчетах, однако не признавали их за числа. Лишь в начале XII в. персидский ученый и поэт Омар Хайям (ок. 1048 — 1131) теоретически расширил понятие числа до положительного действительного числа. В XV в. самаркандский ученый аль-Каши стал применять десятичные дроби для увеличения точности извлечения корней. В 1594 г. нидерландский математик и инженер Симон Стевин (1548—1620) в книге «Приближения к алгебре» показал, что десятичные дроби можно использовать для бесконечно близкого приближения к точному значению иррационального числа. Позже французский математик Рене Декарт (1596—1650) показал, что иррациональные числа, как и рациональные, можно изображать точками на числовой прямой и что они вместе «заполняют» всю прямую и образуют множество всех действительных чисел.

Известен путь развития символики при обозначении степеней с различными показателями. Так, равенством $a^0=1$ (где $a \neq 0$) пользовался в начале XV в. самаркандский ученый аль-Каши. В том же веке французский математик Н. Шюке ввел понятие отрицательного показателя степени. Идея введения дробных показателей встречается уже в XIV в. в работах французского ученого Н. Орема, который в словесной формулировке описал правила действий со степенями.

Современную символику степеней с нулевым, отрицательным и дробным показателями начал использовать английский математик Д. Валлис (1616—1703), а общепринятой эта символика стала после употребления ее И. Ньютоном (1643—1727) в своих работах.

Глава V

Степенная функция

Холодные числа, внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и жара сконцентрированной в них мысли.

А. Д. Александров

§ 1. Степенная функция, ее свойства и график

Вы знакомы с функциями $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$. Все эти функции являются частными случаями степенной функции, т. е. функции $y=x^p$, где p — заданное действительное число.

Свойства степенной функции существенно зависят от свойств степени с действительным показателем и, в частности, от того, при каких значениях x и p имеет смысл степень x^p. Познакомимся с некоторыми свойствами функций, которыми обладают, в частности, и отдельные степенные функции.

Определение

Функция $y=f(x)$, определенная на множестве X, называется *ограниченной снизу на множестве* X, если существует число C_1, такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant C_1$.

Это означает, что все точки графика ограниченной снизу функции $y=f(x)$, $x \in X$ расположены выше прямой $y=C_1$ или на этой прямой (рис. 56).

Определение

Функция $y=f(x)$, определенная на множестве X, называется *ограниченной сверху на множестве* X, если существует число C_2, такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant C_2$.

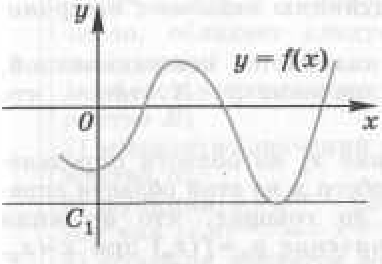


Рис. 56

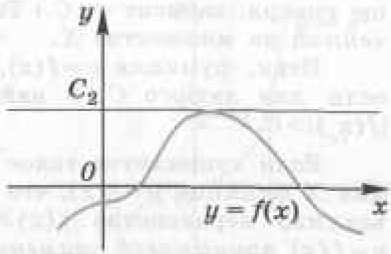


Рис. 57

В этом случае все точки графика функции $y=f(x)$, $x \in X$ лежат ниже прямой $y=C_2$ или на этой прямой (рис. 57).

Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве X, называют ограниченной на этом множестве.

Например: 1) функция $y=x^2-2x$ является ограниченной снизу, так как $x^2-2x=(x-1)^2-1 \geqslant -1$ (рис. 58); 2) функция $y=-x^2-2x+3$ ограничена сверху, так как $-x^2-2x+3=4-(x+1)^2 \leqslant 4$ (рис. 59).

Функция $y=f(x)$ является ограниченной на множестве X тогда и только тогда, когда существует число $C>0$, такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant C$.

Это означает, что все точки графика функции $y=f(x)$, $x \in X$ лежат в горизонтальной полосе, ограниченной прямыми $y=C$ и $y=-C$. Пусть это условие не выполняется, т. е. не существует такое число $C>0$, чтобы неравенство $|f(x)| \leqslant C$ выполнялось для всех $x \in X$. Тогда для любого $C>0$ указанное неравенство не может выполняться для всех $x \in X$. Это означает, что оно *не выполняется хотя бы для одного значения* $x_c \in X$, т. е. выполняется противоположное неравенство $|f(x_c)|>C$. (Запись $x_c \in X$ отражает тот факт, что точка x_c из множества X, вооб-

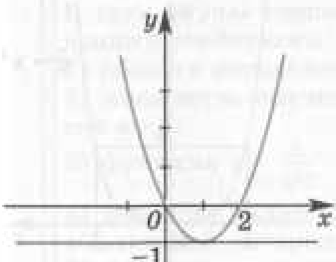


Рис. 58

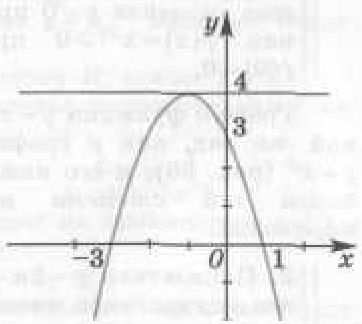


Рис. 59

ще говоря, зависит от C.) Такую функцию называют *неограниченной* на множестве X.

Итак, функция $y=f(x)$, $x\in X$ называется неограниченной, если для любого $C>0$ найдется значение $x_c\in X$, такое, что $|f(x_c)|>C$.

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y=f(x)$, что для любого x из этой области справедливо неравенство $f(x)\geqslant f(x_0)$, то говорят, что функция $y=f(x)$ *принимает наименьшее значение* $y_0=f(x_0)$ при $x=x_0$. Например, функция $y=x^2-2x$ принимает при $x=1$ наименьшее значение, равное -1 (см. рис. 58).

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y=f(x)$, что для любого $x\in X$ справедливо неравенство $f(x)\leqslant f(x_0)$, то говорят, что функция $y=f(x)$ *принимает наибольшее значение* $y_0=f(x_0)$ при $x=x_0$. Например, функция $y=-x^2-2x+3$ принимает при $x=-1$ наибольшее значение, равное 4 (см. рис. 59).

Перейдем к подробному рассмотрению свойств степенной функции в зависимости от показателя степени p.

Свойства степенной функции $y=x^p$ при различных значениях p

1. Показатель $p=2n$ — четное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y=x^{2n}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

1) область определения — все действительные числа, т. е. множество $\boldsymbol{R}$;

2) множество значений — все неотрицательные числа, т. е. $y\geqslant 0$;

3) функция $y=x^{2n}$ четная, так как $(-x)^{2n}=x^{2n}$;

4) функция является убывающей на промежутке $x\leqslant 0$ и возрастающей на промежутке $x\geqslant 0$;

5) функция ограничена снизу (так как $x^{2n}\geqslant 0$ для любого $x\in\boldsymbol{R}$);

6) функция принимает наименьшее значение $y=0$ при $x=0$, так как $f(x)=x^{2n}\geqslant 0$ при $x\in\boldsymbol{R}$ и $f(0)=0$.

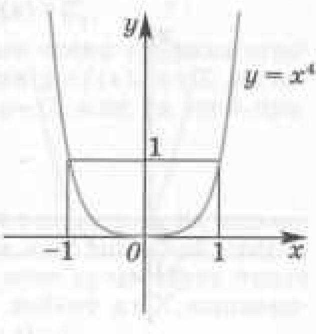


Рис. 60

График функции $y=x^{2n}$ имеет такой же вид, как и график функции $y=x^4$ (рис. 60), и его называют *параболой n-й степени* или просто *параболой*.

2. Показатель $p=2n-1$ — нечетное натуральное число.

В этом случае степенная функция

$y=x^{2n-1}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:
1) область определения — множество $\boldsymbol{R}$;
2) множество значений — множество $\boldsymbol{R}$;
3) функция $y=x^{2n-1}$ нечетная, так как $(-x)^{2n-1}=-x^{2n-1}$;
4) функция является возрастающей на всей действительной оси;
5) функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу;
6) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

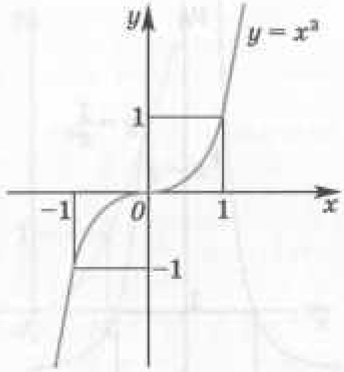


Рис. 61

Докажем свойство 4 для функции $y=x^3$.

○ Если $0\leqslant x_1<x_2$, то $x_1^3<x_2^3$; если $x_1<x_2\leqslant 0$, то $0\leqslant -x_2<-x_1$, откуда $(-x_2)^3<(-x_1)^3$ или $-x_2^3<-x_1^3$, значит, $x_1^3<x_2^3$. Наконец, если $x_1<0$, $x_2>0$, то $x_1^3<x_2^3$. Таким образом, неравенство $x_1^3<x_2^3$ справедливо для любых x_1, x_2, таких, что $x_1<x_2$, т. е. $y=x^3$ — возрастающая функция. ●

Докажем свойство 5.

○ Например, докажем, что функция $y=x^3$ не ограничена, т. е. что для любого $C>0$ найдется значение x_c, такое, что $|f(x_c)|>C$. Пусть $x_c=\sqrt[3]{2C}$, где C — любое положительное число, тогда $f(x_c)=(\sqrt[3]{2C})^3=2C>C$. ●

График функции $y=x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^3$ (рис. 61), его называют *кубической параболой*.

3. Показатель $p=-2n$, где n — натуральное число.
В этом случае степенная функция $y=x^{-2n}$ обладает следующими свойствами:
1) область определения — множество $\boldsymbol{R}$, кроме $x=0$;
2) множество значений — множество положительных чисел $y>0$;
3) функция $y=\frac{1}{x^{2n}}$ четная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n}}=\frac{1}{x^{2n}}$;
4) функция является возрастающей на промежутке $x<0$ и убывающей на промежутке $x>0$;
5) функция ограничена снизу: $y>0$;
6) функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений.

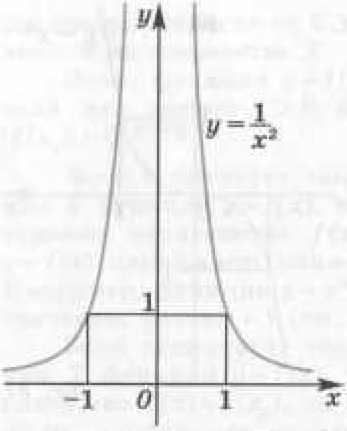


Рис. 62

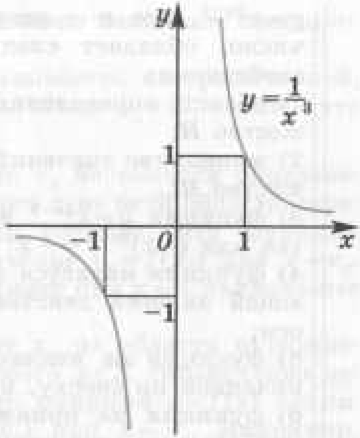


Рис. 63

График функции $y=\frac{1}{x^{2n}}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=\frac{1}{x^2}$ (рис. 62).

Прямую $y=0$ (ось абсцисс) называют *горизонтальной асимптотой графика* функции $y=x^{-2n}$, $n\in N$, а прямую $x=0$ (ось ординат) называют *вертикальной асимптотой* графика этой функции, так как при значениях x, близких к нулю, расстояния от точек этого графика до оси Oy (прямой $x=0$) становятся сколь угодно малыми (подробнее об этом будем говорить в 11 классе).

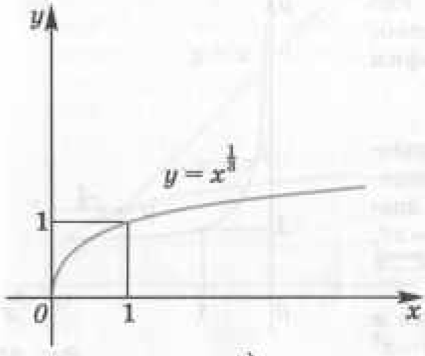
4. Показатель $p=-(2n-1)$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y=x^{-(2n-1)}$ обладает следующими свойствами:

1) область определения — множество R, кроме $x=0$;
2) множество значений — множество R, кроме $y=0$;
3) функция $y=\frac{1}{x^{2n-1}}$ нечетная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}}=-\frac{1}{x^{2n-1}}$;
4) функция является убывающей на промежутках $x<0$ и $x>0$;
5) функция не является ограниченной.

График функции $y=\frac{1}{x^{2n-1}}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=\frac{1}{x^3}$ (рис. 63).

Ось абсцисс является горизонтальной, а ось ординат — вертикальной асимптотами графика функции.



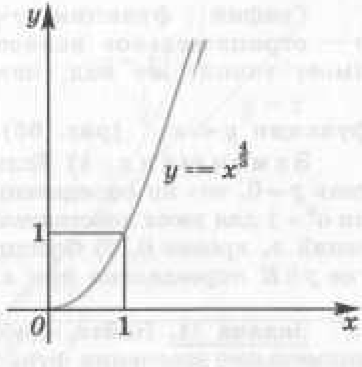


Рис. 64

5. Показатель p — положительное действительное нецелое число. В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

1) область определения — множество неотрицательных чисел $x \geqslant 0$;
2) множество значений — множество неотрицательных чисел $y \geqslant 0$;
3) функция является возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;
4) функция не является ни четной, ни нечетной;
5) функция ограничена снизу: $y \geqslant 0$;
6) функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

График функции $y = x^p$, где p — положительное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ (при $0 < p < 1$) или как, например, график функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ (при $p > 1$) (рис. 64).

6. Показатель p — отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

1) область определения — множество положительных чисел $x > 0$;
2) множество значений — множество положительных чисел $y > 0$;
3) функция является убывающей на промежутке $x > 0$;
4) функция не является ни четной, ни нечетной;
5) функция ограничена снизу: $y > 0$.

График функции $y=x^p$, где p — отрицательное нецелое число, имеет такой же вид, как график функции $y=x^{-\frac{1}{3}}$ (рис. 65).

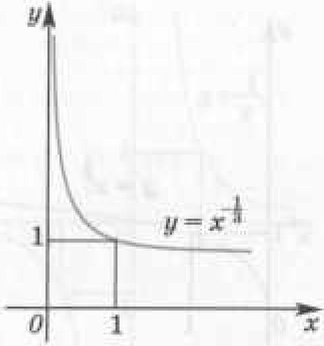


Рис. 65

Замечания. 1) Если показатель $p=0$, то по определению степени $a^0=1$ для всех действительных значений a, кроме 0. 2) Функция $y=x^p$, где $p\in\boldsymbol{R}$ определена при $x>0$.

Задача 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^6$ на отрезке $\left[-2;\ \frac{1}{2}\right]$.

▷ Функция $y=x^6$ на отрезке $\left[-2;\ \frac{1}{2}\right]$ убывает при $x\in[-2;\ 0]$, возрастает при $x\in\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$, следовательно, она принимает наименьшее значение, равное нулю, при $x=0$. Наибольшее значение этой функции — наибольшее из чисел $y(-2)$ и $y\left(\frac{1}{2}\right)$. Так как $y(-2)=(-2)^6=64$, а $y\left(\frac{1}{2}\right)=$ $=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$, то $y(-2)>y\left(\frac{1}{2}\right)$ и наибольшее значение равно 64. ◀

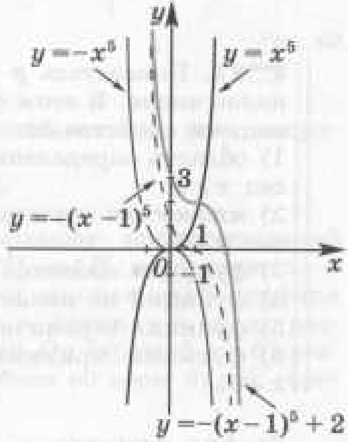


Рис. 66

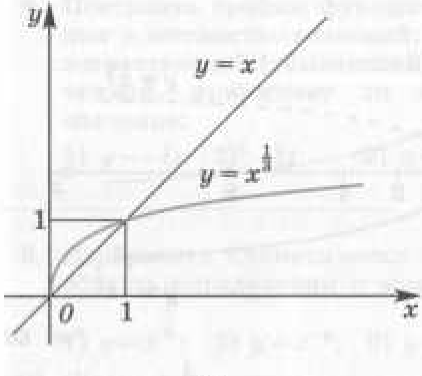
Задача 2. Построить график функции $y=-(x-1)^5+2$.

▷ Областью определения функции является множество действительных чисел. Строим график функции $y=-x^5$, осуществляем сдвиг вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо и вдоль оси ординат на 2 единицы вверх. График изображен на рисунке 66. ◀

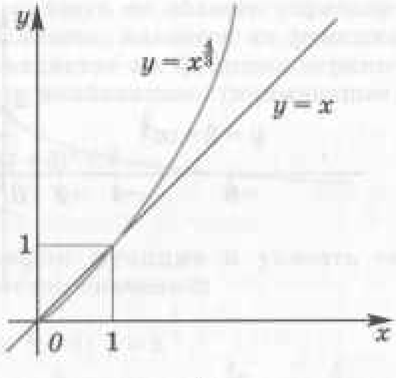
Задача 3. Решить неравенство: 1) $x^{\frac{1}{3}}>x$; 2) $x^{\frac{4}{3}}>x$.

▷ 1) Неравенство $x^{\frac{1}{3}}>x$ имеет смысл при $x\geqslant 0$. При $x=0$ неравенство не выполняется. При $x>0$, возводя неравенство в куб, получаем $x>x^3$, т. е. $x(1-x^2)>0$. Так как $x>0$, то $1-x^2>0$, откуда $x^2<1$; $|x|<1$. Следовательно, $0<x<1$.

2) Возводя неравенство $x^{\frac{4}{3}}>x$ при $x>0$ в куб, получаем $x^4>x^3$, т. е. $x^3(x-1)>0$. Так как $x>0$, то $x-1>0$, т. е. $x>1$. ◀



а)



б)

Рис. 67

Решение этой задачи показывает, что график функции $y=x^{\frac{1}{3}}$ лежит выше графика функции $y=x$ при $0<x<1$ и ниже при $x>1$ (рис. 67, *а*); график функции $y=x^{\frac{4}{3}}$ лежит выше графика функции $y=x$ при $x>1$ и ниже при $0<x<1$ (рис. 67, *б*).

Задача 4. Сравнить числа $(3{,}2)^{3-\pi}$ и $(3{,}5)^{3-\pi}$.

▷ Так как $3<\pi<4$, то $3-\pi<0$. Функция $y=x^{3-\pi}$ убывает на промежутке $x>0$. Поэтому $(3{,}2)^{3-\pi}>(3{,}5)^{3-\pi}$. ◀

Задача 5. Найти точки пересечения графиков функций $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=x^{\frac{4}{3}}$.

▷ Для нахождения точек пересечения этих графиков решим уравнение $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{4}{3}}$. Левая часть этого уравнения имеет смысл при всех x, а правая — только при $x\geqslant 0$.

При $x\geqslant 0$ функция $y=\sqrt[3]{x}$ совпадает с функцией $y=x^{\frac{1}{3}}$, поэтому уравнение можно записать так: $x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{3}}$. Возводя это уравнение (при $x\geqslant 0$) в куб, получаем $x=x^4$, откуда $x(x^3-1)=0$, $x_1=0$, $x_2=1$.

Ответ. (0; 0), (1; 1). ◀

Задача 6. Построить график функции $y=2-|x|^{\frac{1}{3}}$.

▷ Функция является четной, так как $|-x|=|x|$. Поэтому достаточно построить график для $x\geqslant 0$, а затем симметрично отразить его относительно оси ординат. При $x\geqslant 0$ имеем $y=2-$

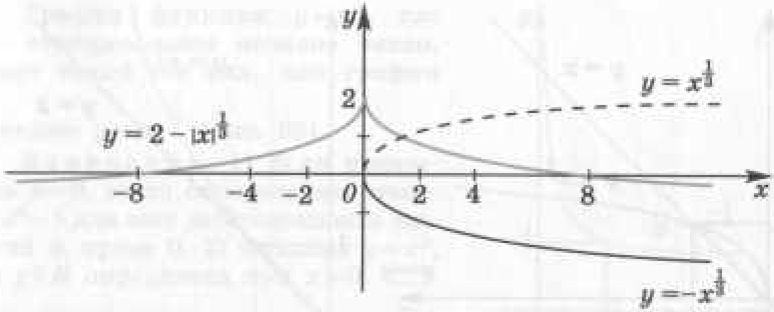


Рис. 68

$-|x|^{\frac{1}{3}}=2-x^{\frac{1}{3}}$. Строим график функции $y=-x^{\frac{1}{3}}$ (при $x>0$), сдвигаем его на 2 единицы вверх и отражаем полученный график относительно оси ординат (рис. 68). ◄

Упражнения

1. Изобразить схематически график функции, указать ее область определения и множество значений:

1) $y=x^6$; 2) $y=x^5$; 3) $y=x^{11}$; 4) $y=x^{-1}$; 5) $y=x^{-4}$.

2. Выяснить, является ли функция возрастающей при $x>0$:

1) $y=-x^4$; 2) $y=x^{15}$; 3) $y=x^{-3}$.

3. Выяснить, является ли функция ограниченной сверху (снизу):

1) $y=x^8$; 2) $y=-x^{16}$; 3) $y=x^{-2}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

1) $y=x^4$, $x\in[-1;\ 2]$; 2) $y=x^7$, $x\in[-2;\ 3]$;

3) $y=x^{-1}$, $x\in[-3;\ -1]$; 4) $y=x^{-2}$, $x\in[1;\ 4]$.

5. С помощью свойств степенной функции сравнить с единицей число:

1) $(0{,}7)^8$; 2) $(1{,}02)^4$; 3) $(1{,}03)^7$;

4) $(0{,}75)^5$; 5) $(1{,}3)^{-2}$; 6) $(0{,}8)^{-1}$.

6. Сравнить значения выражений:

1) $(0{,}35)^8$ и $(-5{,}4)^8$; 2) $\left(-\frac{11}{17}\right)^5$ и $\left(-\frac{6}{13}\right)^5$;

3) $(1-\sqrt{5})^7$ и $(\sqrt{3}-1)^7$; 4) $(\sqrt{3}+1)^{10}$ и $(\sqrt{2}+2)^{10}$.

7. В одной системе координат построить графики двух функций, предварительно находя их области определения и множества значений:

1) $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$; 2) $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

8. Построить график функции, указать ее область определения и множество значений; выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей), является ли функция ограниченной, принимает ли она наибольшее (наименьшее) значение:

1) $y=-(x-2)^3-1$; 2) $y=(x+3)^4+2$.

9. Изобразить схематически график функции и указать ее область определения и множество значений:

1) $y=x^{\frac{1}{2}}$; 2) $y=x^{-4}$; 3) $y=x^{-3}$; 4) $y=x^{\frac{1}{5}}$.

10. (Устно.) Выяснить, является ли функция $y=x^p$ возрастающей (убывающей) при $x>0$, если:

1) $p=\frac{2}{\pi}$; 2) $p=-\frac{2}{\pi}$; 3) $p=0,(6)$.

11. Изобразить схематически график функции:

1) $y=x^{\frac{2}{3}}$; 2) $y=x^{\frac{3}{2}}$; 3) $y=x^{-5}$; 4) $y=x^{\sqrt{5}}$.

12. Пользуясь свойствами степенной функции, сравнить с единицей число:

1) $4,1^{2,7}$; 2) $0,2^{0,3}$; 3) $0,7^{9,1}$; 4) $(\sqrt{3})^{0,2}$.

13. По рисунку найти промежутки, на которых график данной функции лежит выше (ниже) графика функции $y=x$:

1) $y=x^{\sqrt{2}}$; 2) $y=x^{\pi}$.

14. По рисунку найти промежутки, на которых график данной функции лежит выше (ниже) графика функции $y=x$:

1) $y=x^{\frac{1}{\pi}}$; 2) $y=x^{\sin 45^\circ}$.

15. Сравнить значения выражений:

1) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$; 2) $2,5^{-8,1}$ и $2,6^{-8,1}$;

3) $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$; 4) $\left(2\sqrt[3]{5}\right)^{-0,2}$ и $\left(5\sqrt[3]{2}\right)^{-0,2}$.

16. В одной системе координат построить графики двух функций, выяснив предварительно их области определения и множества значений:

1) $y=x^4$ и $y=x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y=x^5$ и $y=x^{-5}$; 3) $y=x^{\frac{1}{5}}$ и $y=\sqrt[5]{x}$.

17. По рисунку найти промежутки, на которых график данной функции лежит выше (ниже) графика функции $y=x$:

1) $y=x^{1-\pi}$; 2) $y=x^{1-\sqrt{3}}$.

18. Изобразить схематически график функции и найти ее область определения и множество значений; выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей); является ли функция ограниченной:

1) $y=x^{\frac{1}{\pi}}-1$; 2) $y=(x+1)^{-\sqrt{2}}$; 3) $y=(x-2)^{-2}$.

19. Построить график функции и найти ее область определения, множество значений; промежутки возрастания и убывания; выяснить, является ли функция ограниченной; имеет ли она наибольшее или наименьшее значение:

1) $y=|x|^{\frac{1}{3}}+1$; 2) $y=1-|x|^5$; 3) $y=|x|^3+1$;

4) $y=-|x|^{\frac{1}{5}}-2$; 5) $y=|x+1|^{\frac{1}{3}}$; 6) $y=|2x|^{-2}+2$.

20. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y=\sqrt[5]{x}$ и $y=x^{\frac{3}{5}}$; 2) $y=\sqrt[7]{x}$ и $y=x^{\frac{5}{7}}$.

21. Начальная масса тела (m_0) при движении этого тела со скоростью v меняется и достигает значения m, вычисляемого по формуле $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, где c — скорость света, $c\approx 3\cdot 10^5$ км/с. Как изменится начальная масса тела при движении со скоростью, равной половине величины скорости света?

22. Вес тела изменяется прямо пропорционально его расстоянию от центра Земли, если тело находится внутри Земли, и обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли, если оно находится над поверхностью Земли. 1) Схематически изобразить график изменения веса тела как функции его расстояния от центра Земли, предполагая, что на поверхности Земли вес тела равен 100 кг. 2) На каком расстоянии от центра Земли (но над ее поверхностью) тело будет иметь тот же вес, что и на расстоянии 1600 км от центра Земли? (Принять диаметр Земли равным 12 800 км.)

23. Вес тела на высоте h от поверхности Земли можно найти по формуле $p_h=\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2\cdot p_0$, где p_h — вес на расстоянии h км над поверхностью Земли, R — радиус Земли (принять равным 6400 км), p_0 — вес тела на уровне моря, h — расстояние от поверхности Земли. 1) Изобразить схематически график изменения веса тела человека при подъеме на расстояние, равное 0, R, $2R$, $3R$, ..., если его вес на уровне моря равна 50 кг. 2) На какой высоте над поверхностью Земли вес тела уменьшится вдвое?

§ 2. Взаимно обратные функции. Сложная функция

1. Взаимно обратные функции

Если задана функция $y=f(x)$, то для каждого значения x из области определения функции можно найти соответствующее значение y. Нередко приходится решать обратную задачу: по данному значению функции y находить соответствующее значение аргумента x.

Примером может служить формула $v=v_0-gt$, которая выражает зависимость скорости v движения тела, брошенного вверх с начальной скоростью v_0, от времени движения t. Из этой формулы можно найти обратную зависимость — времени t от скорости v, записав $t=\frac{v_0-v}{g}$.

В рассмотренном примере каждому значению функции соответствует одно значение аргумента. В этом случае можно выразить обратную зависимость значений аргумента от значений функции.

Такие функции называют обратимыми.

Определение

Если функция $y=f(x)$ принимает каждое свое значение только при одном значении x, то эту функцию называют *обратимой*.

Например, функция $y=3x-3$ обратима, так как каждое значение y принимается при единственном значении аргумента x. Это значение можно найти, решая уравнение $y=3x-3$ относительно x.

Функция $y=x^2$ не является обратимой, так как, например, значение $y=1$ она принимает при $x=1$ и при $x=-1$.

Пусть $y=f(x)$ — обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определенное число x из области ее определения такое, что $f(x)=y$. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x=g(y)$. В этой записи в соответствии с принятыми обозначениями поменяем местами x и y. Получим $y=g(x)$.

Функцию $y=g(x)$ называют *обратной* к функции $y=f(x)$.

Задача 1. Найти функцию, обратную к функции

$$y=5x+3. \qquad (1)$$

▷ Решая это уравнение относительно x, получаем $x=\frac{1}{5}(y-3)$. В этой формуле поменяем местами x и y:

$$y=\frac{1}{5}(x-3). \qquad (2)$$

Функция (2) — обратная к функции (1). ◀

Вообще, если обратимая функция $y=f(x)$ задана формулой, то для нахождения обратной функции нужно решить уравнение $f(x)=y$ относительно x и поменять местами x и y.

Заметим, что рассмотренная в задаче 1 функция (1) является обратной к найденной для нее обратной функции (2). Поэтому эти функции называют *взаимно обратными*.

Из определения обратной функции следует, что область определения обратной функции совпадает со множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции.

Задача 2. Найти функцию, обратную к функции $y=\frac{2}{x-3}$.

▷ Решая это уравнение относительно x, получаем $x=3+\frac{2}{y}$. Заменив x на y и y на x, находим $y=3+\frac{2}{x}$. ◀

В этой задаче область определения функции $y=\frac{2}{x-3}$ есть множество действительных чисел, не равных 3, а множество ее значений — все действительные числа, не равные 0. График этой функции изображен на рисунке 69.

Для обратной функции $y=3+\frac{2}{x}$ область определения — множество действительных чисел, не равных 0, а множество значений — все действительные числа, не равные 3. График этой функции изображен на рисунке 70.

Возрастающие и убывающие функции называют *монотонными*.

Теорема 1

Монотонная функция является обратимой.

○ Пусть функция $y=f(x)$ возрастает и пусть y_0 — ее значение в некоторой точке x_0, т. е. $y_0=f(x_0)$. Тогда если x принадле-

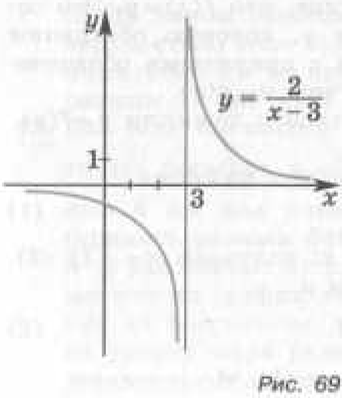


Рис. 69

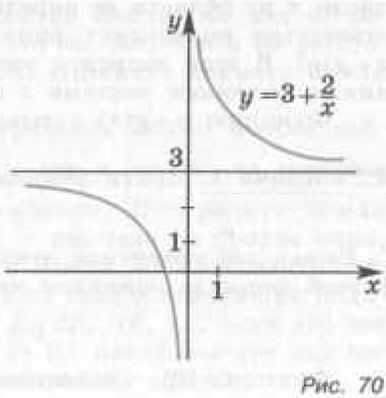


Рис. 70

жит области определения функции, то при $x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0) = y_0$, а при $x < x_0$ — неравенство $f(x) < f(x_0) = y_0$.

Следовательно, значение y_0 функция $f(x)$ принимает только в одной точке x_0 и поэтому является обратимой. Для убывающей функции доказательство проводится аналогично. ●

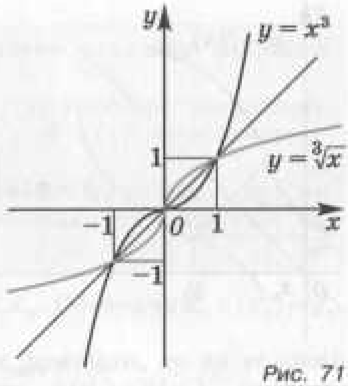


Рис. 71

Например, функция $y = x^3$ возрастает и поэтому является обратимой; обратной к ней является функция $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 71).

Если функция $y = f(x)$ возрастает, то с увеличением x значения y увеличиваются и, наоборот, с увеличением y увеличиваются x. Это означает, что обратная функция также возрастает. Аналогично если функция $y = f(x)$ убывает, то обратная к ней функция также убывает. Например, функция $f(x) = 1 - 2x$ убывает и обратная к ней функция $g(x) = \frac{1-x}{2}$ также убывает.

Функция, не являющаяся монотонной, обратной может не иметь. Например, функция $y = x^2$, рассматриваемая на всей числовой оси, не имеет обратной.

Однако если функцию $y = x^2$ рассматривать только при $x \geqslant 0$, то на этом промежутке она возрастает и, следовательно, имеет обратную $y = \sqrt{x}$ (рис. 72, *а*).

Функция $y = x^2$, рассматриваемая при $x \leqslant 0$, убывает и также имеет обратную $y = -\sqrt{x}$ (рис. 72, *б*).

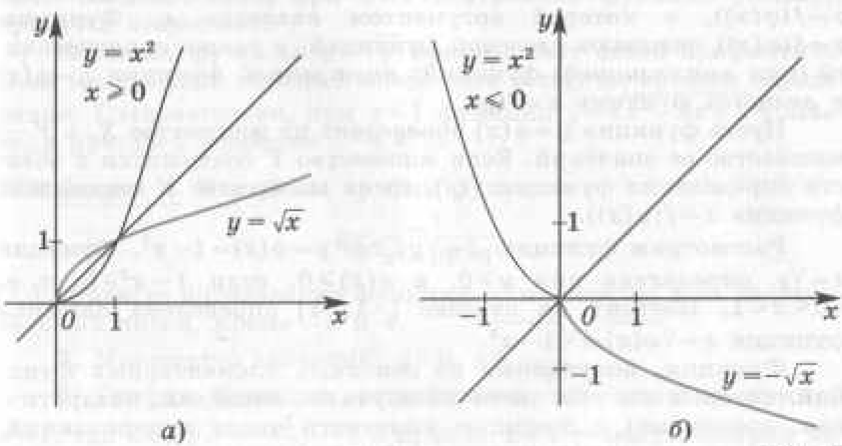


Рис. 72

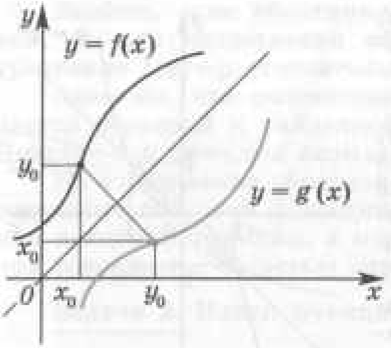


Рис. 73

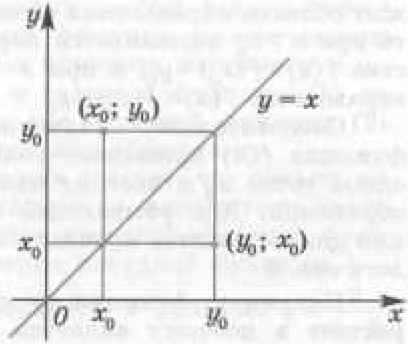


Рис. 74

Теорема 2

Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y=x$.

○ Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, то точка $(y_0; x_0)$ принадлежит графику обратной функции $y=g(x)$ (рис. 73), а точки $(x_0; y_0)$ и $(y_0; x_0)$ симметричны относительно прямой $y=x$ (рис. 73). ●

Рисунок 74 иллюстрирует эту теорему.

Отметим, что степенная функция $y=x^p$ с областью определения $x>0$ и $p\neq 0$ обратима, так как она монотонна. Обратной к ней является функция $y=x^{\frac{1}{p}}$.

2. Сложная функция

Рассмотрим функцию $z=f(y)$. Подставим вместо аргумента y некоторую функцию $y=\varphi(x)$. Получим новую функцию $z=f(\varphi(x))$, в которой аргументом является x. Функцию $z=f(\varphi(x))$ называют *сложной* функцией, а также *суперпозицией* (или *композицией*) функций: *внутренней* функции $y=\varphi(x)$ и *внешней* функции $z=f(y)$.

Пусть функция $y=\varphi(x)$ определена на множестве X, а Y — множество ее значений. Если множество Y содержится в области определения функции $f(y)$, то на множестве X определена функция $z=f(\varphi(x))$.

Рассмотрим функцию $z=\sqrt{y}$, где $y=\varphi(x)=1-x^2$. Функция $z=\sqrt{y}$ определена при $y\geqslant 0$, а $\varphi(x)\geqslant 0$, если $1-x^2\geqslant 0$, т. е. $-1\leqslant x\leqslant 1$. Поэтому на отрезке $[-1; 1]$ определена сложная функция $z=\sqrt{\varphi(x)}=\sqrt{1-x^2}$.

Функции, полученные из основных элементарных функций (которые мы уже частично изучили: линейная, квадратичная, степенные) с помощью конечного числа суперпозиций, считают также *элементарными функциями*.

Теорема 3

Пусть на множестве X определена сложная функция $z=f(\varphi(x))$. Тогда:
1) если функции $y=\varphi(x)$ и $z=f(y)$ либо обе возрастающие, либо обе убывающие, то $z=f(\varphi(x))$ — возрастающая функция на множестве X;
2) если одна из этих функций возрастающая, а другая убывающая, то $z=f(\varphi(x))$ — убывающая функция на множестве X.

○ 1) Пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_1<x_2$. Обозначим $\varphi(x_1)=y_1$, $\varphi(x_2)=y_2$.

Если $\varphi(x)$ и $f(y)$ — возрастающие функции, то из условия $x_1<x_2$ следует, что $y_1<y_2$, и тогда $z(y_1)<z(y_2)$, поэтому $f(\varphi(x_1))<f(\varphi(x_2))$, т. е. $f(\varphi(x))$ — возрастающая функция.

Если обе эти функции убывающие, то из условия $x_1<x_2$ следует, что $y_1>y_2$, и тогда $z(y_1)<z(y_2)$. Следовательно, $z=$ $=f(\varphi(x))$ — возрастающая функция.

2) Пусть одна из функций, например $y=\varphi(x)$,— возрастающая, а $z=f(y)$ — убывающая. Тогда из условия $x_1<x_2$ следует, что $y_1<y_2$ и $f(y_1)>f(y_2)$, т. е. $z(x_1)>z(x_2)$. Следовательно, $z=f(\varphi(x))$ — убывающая функция. ●

Задача 3. Найти промежутки монотонности функции

$$y=\sqrt{x^2-3x+2}.$$

▷ Решая неравенство $x^2-3x+2 \geqslant 0$, найдем область определения функции: $x \leqslant 1$, $x \geqslant 2$. Выясним характер монотонности внутренней функции на каждом из этих промежутков: функция $g=x^2-3x+2$ квадратичная и убывает при $x \leqslant 1{,}5$, возрастает при $x \geqslant 1{,}5$ (при $x_0=1{,}5$ функция принимает наименьшее значение). Следовательно, при $x \leqslant 1$ внутренняя функция убывает, при $x \geqslant 2$ возрастает.

Внешняя функция $y=\sqrt{\varphi}$ представляет собой арифметический квадратный корень и возрастает всюду на области определения. Следовательно, при $x \leqslant 1$ функция $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ убывает, а при $x \geqslant 2$ возрастает. ◀

Задача 4. Построить график функции

$$y=\frac{1}{x^2-2x-8}.$$

▷ 1. Область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме -2 и 4.

2. Множество значений: $y>0$, $y \leqslant -\frac{1}{9}$.

3. График функции симметричен относительно прямой $x=1$, так как $y=\frac{1}{(x-1)^2-9}$, а прямая $x=1$ — ось симметрии па-

работы $z=\varphi(x)=(x-1)^2-9$. График функции проходит через симметричные относительно прямой $x=1$ точки $\left(0; -\frac{1}{8}\right)$, $\left(2; -\frac{1}{8}\right)$.

4. Функция возрастает при $x<-2$ и при $-2<x\leqslant 1$ по теореме 3(1), так как $z=\varphi(x)$ убывает при $x\leqslant 1$, а функция $y=\frac{1}{z}$ убывает при $z<0$. По теореме 3(2) функция убывает при $1\leqslant x<4$ и при $x>4$.

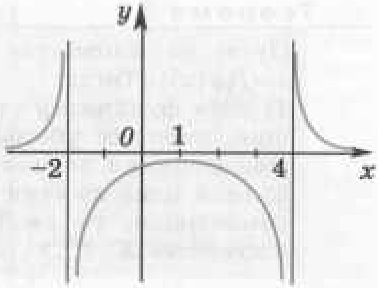


Рис. 75

5. Прямые $x=-2$ и $x=4$ являются вертикальными асимптотами графика функции, а прямая $y=0$ — горизонтальной асимптотой. График функции изображен на рисунке 75. ◄

Упражнения

24. (Устно.) Выяснить, является ли обратимой функция:

1) $y=3x-1$; 2) $y=x^2+7$; 3) $y=\frac{1}{x}$;

4) $y=\sqrt{x}$; 5) $y=x^4$; 6) $y=x^4$, $x<0$.

25. Найти функцию, обратную к данной:

1) $y=-5x+4$; 2) $y=\frac{3x-1}{2}$; 3) $y=x^3-3$.

26. Найти область определения и множество значений функции, обратной к данной:

1) $y=\frac{1}{4}x-7$; 2) $y=(x-1)^3$; 3) $y=\frac{3}{x-4}$.

27. Функция $y=f(x)$ задана графиком (рис. 76). Построить график функции, обратной к данной.

28. Записать аналитическое задание сложной функции $z=f(y(x))$, если:

1) $y(x)=1-x$; $f(y)=y^{\frac{3}{2}}$; 2) $y(x)=x^3+1$; $f(y)=\frac{1}{y}$;

3) $y(x)=x^2-2x+7$; $f(y)=\sqrt{y}$; 4) $y(x)=\sqrt{x}$; $f(y)=(y+1)^2$.

29. Записать внутреннюю $\varphi(x)$ и внешнюю $f(\varphi)$ функции, задающие сложную функцию $y=f(\varphi(x))$, если:

1) $y=\sqrt[3]{x^2-x}$; 2) $y=\frac{1}{x^3+3}$; 3) $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$; 4) $y=\sqrt{x^5+3}$.

---

30. Выяснить, являются ли взаимно обратными функции:

1) $y=-x^3$ и $y=-\sqrt[3]{x}$; 2) $y=-x^5$ и $y=\sqrt[5]{x}$;

3) $y=x^{-3}$ и $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $y=\sqrt[5]{x^3}$; $y=\sqrt[3]{x^5}$.

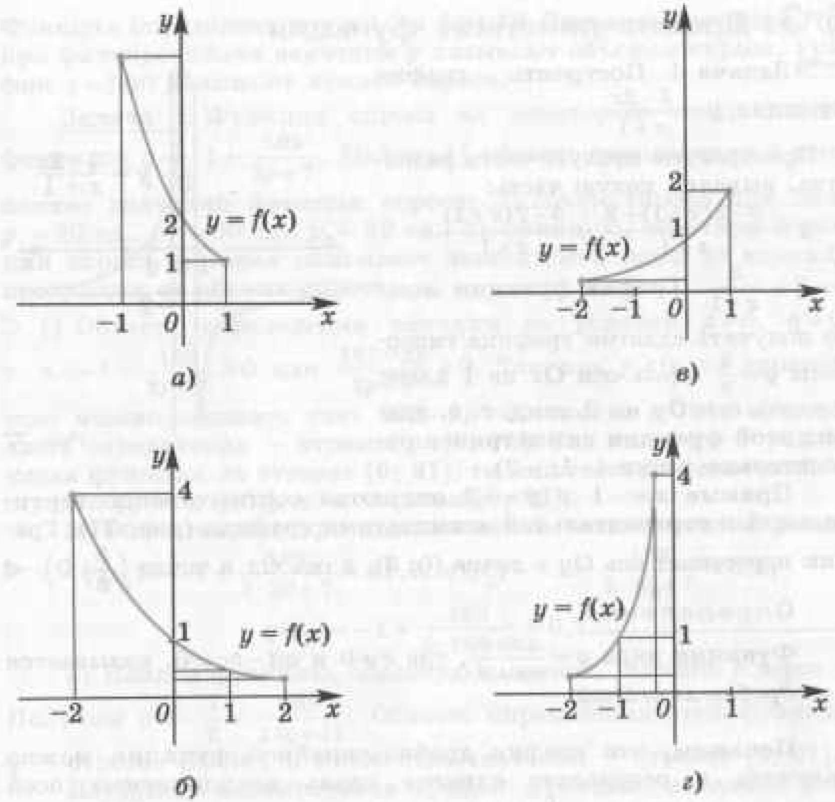


Рис. 76

31. Найти функцию, обратную к данной:

1) $y=-x^{\frac{1}{2}}$;   2) $y=-x^{\frac{3}{5}}$;

3) $y=x^{\frac{3}{2}}$;   4) $y=-x^{\frac{1}{3}}$.

32. На одном рисунке построить график данной функции и функции, обратной к данной; найти область определения и множество значений каждой из них:

1) $y=\frac{2x-1}{3}$;   2) $y=(x-1)^2$ при $x\geqslant 1$;

3) $y=(x-1)^3$;   4) $y=\sqrt{x}+1$.

33. Построить график функции:

1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$;   2) $y=\sqrt{x^2+5x-6}$;

3) $y=\frac{1}{x^2+7x-8}$;   4) $y=\frac{2}{2x^2+7x-4}$.

§ 3. Дробно-линейная функция

Задача 1. Построить график функции $y=\frac{3-2x}{x+1}$.

▷ Преобразуем правую часть равенства, выделив целую часть:

$$y=\frac{3-2(x+1)+2}{x+1}=\frac{5-2(x+1)}{x+1}=$$

$=-2+\frac{5}{x+1}$. График функции можно получить сдвигом графика гиперболы $y=\frac{5}{x}$ вдоль оси Ox на 1 влево и вдоль оси Oy на 2 вниз, т. е. график этой функции симметричен относительно точки $(-1; -2)$.

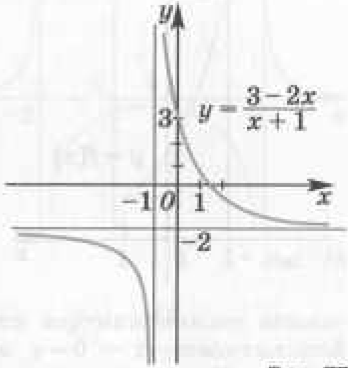


Рис. 77

Прямые $x=-1$ и $y=-2$ являются соответственно вертикальной и горизонтальной асимптотами графика (рис. 77). График пересекает ось Oy в точке $(0; 3)$, а ось Ox в точке $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. ◀

Определение

Функция вида $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где $c\neq 0$ и $ad-bc\neq 0$, называется *дробно-линейной*.

Покажем, что график дробно-линейной функции можно получить в результате сдвигов вдоль координатных осей графика функции $y=\frac{k}{x}$.

○ В самом деле, $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}$,

откуда следует, что график функции $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ можно получить сдвигом графика $y=\frac{k}{x}$, где $k=\frac{bc-ad}{c^2}$, вдоль оси Ox на $-\frac{d}{c}$ и вдоль оси Oy на $\frac{a}{c}$. ●

Замечание. Выделить целую часть можно и делением уголком выражения, стоящего в числителе, на знаменатель.

Покажем применение дробно-линейной функции при решении прикладной задачи.

Замечание. Если каждому значению цены p денежных единиц за единицу товара поставлено в соответствие число q — количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция, называемая функцией спроса: $q=f(p)$.

Функция определена при $p \geqslant 0$ и $f(p) \geqslant 0$. Значение функции $f(p)$ при фиксированном значении p называют объемом спроса. График $q=f(p)$ называют кривой спроса.

Задача 2. Функция спроса на некоторый товар задана формулой $q=-1+\frac{189}{2p+7}$. Найти: 1) область определения и множество значений функции спроса; 2) объем спроса при цене $p_1=20$ ед., $p_2=50$ ед., $p_3=80$ ед.; 3) функцию, обратную функции спроса, которая описывает зависимость цены за единицу продукции от объема спроса.

▷ 1) Область определения находим из условий $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, т. е. $-1+\frac{189}{2p+7} \geqslant 0$ или $\frac{182-2p}{2p+7} \geqslant 0$. Так как $p \geqslant 0$, то неравенство можно записать так: $182-2p \geqslant 0$, откуда $p \leqslant 91$, т. е. область определения — отрезок $p \in [0; 91]$. Так как $q(p)$ — убывающая функция на отрезке $[0; 91]$, то множество ее значений — отрезок $[q(91); q(0)]$, т. е. отрезок $[0; 26]$.

2) Объем спроса при данных ценах соответственно равен:

$$q(p_1)=-1+\frac{189}{2\cdot 20+7} \approx 31{,}0, \quad q(p_2)=-1+\frac{189}{2\cdot 50+7} \approx 0{,}2,$$

$$q(p_3)=-1+\frac{189}{2\cdot 80+7} \approx 0{,}1.$$

3) Найдем функцию, обратную к данной, выразив p через q. Получим $p=-\frac{7}{2}+\frac{189}{2(q+1)}$. Область определения этой функции q — отрезок $[0; 26]$, а множество значений — отрезок $[0; 91]$.

Изобразив схематически график функции, наглядно увидим, как изменяется цена с увеличением или уменьшением объема спроса. ◀

Упражнения

34. Построить график функции, указать ее область определения, множество значений, промежутки монотонности:

1) $y=-\frac{2}{x}$; 2) $y=\frac{3}{x+2}$; 3) $y=1-\frac{3}{x}$.

35. Преобразовать дробно-линейную функцию, выделив целую часть:

1) $y=\frac{x+5}{x+3}$; 2) $y=\frac{x-7}{x-1}$; 3) $y=\frac{3x+1}{x+4}$; 4) $y=\frac{5x-27}{x-6}$.

36. Не выполняя построения графика функции, найти его горизонтальную и вертикальную асимптоты:

1) $y=\frac{2x+2}{x-1}$; 2) $y=\frac{1-2x}{5-x}$.

37. Построить график функции:

1) $y=\frac{2x+3}{x-1}$; 2) $y=\frac{1-2x}{4-x}$; 3) $y=\frac{4x+1}{x-2}$; 4) $y=\frac{2+4x}{x+2}$.

§ 4. Равносильные уравнения и неравенства

1. Равносильные уравнения

Задача 1. Найти точки пересечения графиков функций $y=3\sqrt{x}$ и $y=x+2$.

▷ Для нахождения абсцисс точек пересечения нужно решить уравнение $3\sqrt{x}=x+2$. Возводя обе части этого уравнения в квадрат, получаем $9x=x^2+4x+4$, откуда $x^2-5x+4=0$. Это уравнение имеет корни $x_1=1$, $x_2=4$. Проверка показывает, что оба корня являются также и корнями исходного уравнения. Теперь находим ординаты точек пересечения данных графиков: $y_1=3\sqrt{x_1}=3$, $y_2=3\sqrt{x_2}=6$. Итак, данные графики пересекаются в двух точках (1; 3) и (4; 6) (рис. 78). ◀

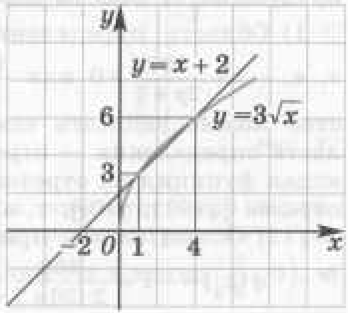


Рис. 78

При решении задачи 1 исходное уравнение $3\sqrt{x}=x+2$ заменялось уравнениями $9x=x^2+4x+4$, $x^2-5x+4=0$. Все эти три уравнения имеют одни и те же корни $x_1=1$, $x_2=4$. Такие уравнения называют равносильными.

Определение

Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются *равносильными*.

Например, уравнения $9x-5=5x+3$ и $4x=8$ равносильны, так как каждое из них имеет только один корень $x=2$. Уравнения $(x-3)(x+7)=0$ и $x^2+4x-21=0$ также равносильны, так как они имеют одни и те же корни $x_1=3$, $x_2=-7$. Но уравнения $2x=4$ и $3x^2=12$ не равносильны, так как первое имеет корень $x=2$, а второе — корни $x_1=2$ и $x_2=-2$.

Из определения равносильности уравнений следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, если каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

Из курса 7 класса известно, что можно сделать следующие преобразования уравнений:
любой член уравнения можно переносить из одной части в другую, изменив его знак на противоположный;
обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

При этих преобразованиях исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение.

Заметим, что если некоторое выражение в левой или правой части уравнения заменить тождественно равным ему выражением, то получится уравнение, равносильное исходному. Однако не при любом преобразовании уравнение заменяется на равносильное.

Например, при возведении в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x}=x-2$ получается уравнение $x=(x-2)^2$, не равносильное исходному: первое уравнение имеет только один корень $x=4$, а второе — два корня $x_1=4$ и $x_2=1$. В этом случае второе уравнение называют следствием первого уравнения.

Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют следствием первого уравнения.

Определение

Если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует:

1) если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;

2) если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

При решении уравнений главное — не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее было следствием предыдущего.

Задача 2. Решить уравнение

$$\frac{2x}{x-3}-\frac{x-5}{x+1}=\frac{24}{(x+1)(3-x)}. \qquad (1)$$

▷ Умножая обе части уравнения на общий знаменатель всех трех дробей, т. е. на $(x+1)(x-3)$, получаем

$$2x(x+1)-(x-5)(x-3)=-24, \qquad (2)$$

откуда $x^2+10x+9=0$, $x_1=-9$, $x_2=-1$.

Проверка. 1) При $x=-1$ знаменатели двух дробей уравнения равны нулю. Поэтому $x=-1$ не является корнем данного уравнения. 2) При $x=-9$ левая часть уравнения равна $\frac{2\cdot(-9)}{-9-3}-\frac{-9-5}{-9+1}=-\frac{1}{4}$, правая часть равна $\frac{24}{(-9+1)(3-(-9))}=-\frac{1}{4}$.

Ответ. $x=-9$. ◀

Заметим, что для проверки корня $x=-9$ достаточно увидеть, что знаменатели дробей уравнения при $x=-9$ не равны нулю (если, конечно, при решении уравнения не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

При решении задачи 2 из уравнения (1) получено уравнение (2), которое является следствием уравнения (1). Корень $x_2=-1$ уравнения (2) не является корнем уравнения (1). Его называют *посторонним корнем*.

Посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Задача 3. Решить уравнение $x^2-4=7x-14$.

▷ Преобразовав данное уравнение, получим $(x+2)(x-2)=$ $=7(x-2)$, откуда $(x+2-7)(x-2)=0$, т. е. $(x-5)(x-2)=0$, следовательно, $x_1=5$, $x_2=2$. ◀

Если обе части уравнения из задачи 3 разделить на $x-2$, то получится уравнение $x+2=7$, которое имеет только один корень $x=5$, т. е. произойдет потеря корня $x=2$, и решение задачи будет неверным.

Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Итак, при решении уравнения можно делать только такие его преобразования, при которых не происходит потери корней. Если при этом получаются уравнения-следствия данного, то необходима проверка найденных корней.

Потеря или приобретение корней произойдет из-за изменений области определения уравнения в результате преобразований исходного уравнения.

Множество всех значений неизвестного x, при котором определены (имеют смысл) и левая и правая части уравнения $f(x)=g(x)$, называют *областью определения* этого *уравнения*.

В рассмотренном выше примере областью определения уравнения $\sqrt{x}=x-2$ является множество неотрицательных чисел, а в преобразованном уравнении $x=(x-2)^2$ область определения — множество R. С этим и связано появление постороннего корня. Для обозначения того, что уравнение $x=(x-2)^2$ является следствием уравнения $\sqrt{x}=x-2$, используется знак $\Rightarrow$:

$$(\sqrt{x}=x-2)\Rightarrow(x=(x-2)^2).$$

Слово «равносильно» часто заменяют знаком $\Leftrightarrow$. В предыдущих примерах может использоваться также запись:

$$((x-3)(x+7)=0)\Leftrightarrow(x^2+4x-21=0).$$

Сформулируем еще некоторые предложения, которые используются при решении различных уравнений. Обозначим через X область определения уравнения $f(x)=g(x)$.

1. Если $f(x)=g(x)$ и функция $\varphi(x)$ определена для всех $x \in X$, то $(f(x)=g(x)) \Leftrightarrow (f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x))$.

2. Если $f(x)=g(x)$ и функция $\varphi(x)$ определена для всех $x \in X$, причем $\varphi(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, то

$$(f(x)=g(x)) \Leftrightarrow (f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)).$$

3. Если $\varphi(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, то

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)\right) \Leftrightarrow (f(x)=g(x)\varphi(x)).$$

4. Если функция $f(x)$ определена для всех x, при которых $g(x)=0$, а функция $g(x)$ определена для всех x, при которых $f(x)=0$, то для нахождения множества корней уравнения $f(x)\cdot g(x)=0$ нужно решить уравнения $f(x)=0$ и $g(x)=0$ и объединить их корни.

В этом случае говорят, что уравнение $f(x)g(x)=0$ равносильно совокупности уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$.

5. Если X — область определения уравнения $f(x)=g(x)$, то $(f(x)=g(x)) \Leftrightarrow (f^{2n+1}(x)=g^{2n+1}(x))$ при любом $n \in N$, т. е. при возведении обеих частей уравнения в нечетную натуральную степень получается уравнение, равносильное исходному.

Для доказательства утверждения 5 можно использовать равенство

$$a^{2n+1}-b^{2n+1}=(a-b)(a^{2n}+a^{2n-1}b+\ldots+ab^{2n-1}+b^{2n}).$$

2. Равносильные неравенства

Равносильность неравенств с неизвестным определяется аналогично.

Определение

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными*.

Неравенства, не имеющие решений, считают равносильными.

Например, неравенства $\frac{x+5}{x^2+1}<0$ и $x+5<0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $x<-5$; неравенства $x^2-4x<x-6$ и $x^2-5x+6<0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $2<x<3$; неравенства $\frac{2x}{x-2}>1$ и $2x>x-2$ не равносильны, так как решениями первого являются числа $x<-2$ и $x>2$, а решениями второго — числа $x>-2$. При решении неравенств обычно данное неравенство преобразуется в ему равносильное.

Задача 4. Решить неравенство $\frac{5x-3}{x^2+1}>1$.

▷ Так как $x^2+1>0$ при всех действительных значениях x, то, умножая неравенство на x^2+1, получаем неравенство

Рис. 79

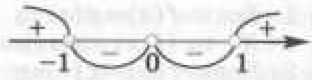


Рис. 80

$5x-3>x^2+1$, равносильное данному. Решая это неравенство, получаем $x^2-5x+4<0$, $(x-1)(x-4)<0$, откуда $1<x<4$. ◀

<u>Задача 5.</u> Решить неравенство $\frac{3}{x-1}>\frac{2}{x+1}$.

▷ Неравенство равносильно каждому из неравенств:

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}>0,\quad \frac{3x+3-2x+2}{(x-1)(x+1)}>0,\quad \frac{x+5}{(x-1)(x+1)}>0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов (рис. 79), получаем $-5<x<-1$, $x>1$. ◀

<u>Задача 6.</u> Решить неравенство $x^6<x^2$.

▷ Неравенство равносильно каждому из неравенств:

$$x^6-x^2<0,\ x^2(x^4-1)<0,\ x^2(x-1)(x+1)(x^2+1)<0,$$
$$x^2(x+1)(x-1)<0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов (рис. 80), получаем $-1<x<0$, $0<x<1$. ◀

Знак равносильности $\Leftrightarrow$ используется и при записи решений неравенств. Например, в задаче 6 можно записать: $(x^6-x^2<0)\Leftrightarrow(x^2(x^4-1)<0)\Leftrightarrow(x^2(x-1)(x+1)(x^2+1)<0)$. Все эти неравенства равносильны, так как второе и третье получены в результате тождественных преобразований.

Множество значений x, при которых определены левая и правая части неравенства $f(x)>g(x)$, называют *областью определения неравенства*.

Если функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ определены на множестве X, то на этом множестве

$$(f(x)>g(x))\Leftrightarrow(f(x)+\varphi(x)>g(x)+\varphi(x))\ \text{или}$$
$$(f(x)>g(x)+\varphi(x))\Leftrightarrow(f(x)-\varphi(x)>g(x)).$$

Если функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ определены на множестве X и $\varphi(x)>0$ при $x\in X$, то $(f(x)>g(x))\Leftrightarrow(f(x)\varphi(x)>g(x)\varphi(x))$, а если $\varphi(x)<0$ при $x\in X$, то $(f(x)>g(x))\Leftrightarrow(f(x)\varphi(x)<g(x)\varphi(x))$.

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X и принимают на этом множестве только положительные значения, то $(f(x)>g(x))\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{g(x)}\right)$.

3. Равносильность систем

Определение

Системы уравнений (неравенств), имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными*.

Например, системы уравнений $\begin{cases} x-y=5, \\ 2x+y=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y=5, \\ 3x=12 \end{cases}$ равносильны, так как имеют одно и то же решение $x=4$, $y=-1$.

Система $\begin{cases} x-y=5, \\ 2x+y=7 \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} x=5+y, \\ 10+3y=7, \end{cases}$ так как их решением является та же пара чисел $(4; -1)$, что и в предыдущем примере.

В этих примерах использовались преобразования, полученные в результате применения знакомых вам способов решения систем: подстановки и сложения.

Способ подстановки основан на следующих утверждениях, которые позволяют свести решение данной системы к решению системы меньшего числа уравнений с меньшим числом неизвестных:

1. Если в системе заменить одно из уравнений на равносильное ему, а остальные оставить без изменения, то полученная система будет равносильна исходной.
2. Если система содержит уравнение $x=\varphi(y)$, то система, полученная подстановкой во все уравнения системы (кроме $x=\varphi(y)$) вместо x выражения $\varphi(y)$, будет равносильна исходной.

Способ сложения обосновывается следующим утверждением:

3. Если $f(x)=g(x)$ и $u(x)=v(x)$ — два уравнения одной системы, то, заменяя уравнение $f(x)=g(x)$ на уравнение $f(x)+u(x)=g(x)+v(x)$ и остальные уравнения оставляя без изменения, получим систему, равносильную исходной.

Отметим еще, что система уравнений $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ u(x)=v(x) \end{cases}$ равносильна каждой из систем

$$\begin{cases} f(x)+u(x)=g(x)+v(x), \\ f(x)-u(x)=g(x)-v(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)+u(x)=g(x)+v(x). \end{cases}$$

Упражнения

38. Решить уравнение:

1) $(x+9)\cdot 3=2x+17$; 2) $x^2+\frac{1}{x^2-4}=4+\frac{1}{x^2-4}$;

3) $\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{1-2x}{x^2-1}$; 4) $\frac{5x-15}{(x-3)(x+2)}=\frac{2}{x+2}$.

39. Выяснить, равносильны ли следующие уравнения:

1) $5x-8=3x+5$ и $2x+13=0$; 2) $\frac{1}{7}(2x-3)=1$ и $\frac{3x-1}{14}=1$;

3) $(x-5)^2=3(x-5)$ и $x-5=3$; 4) $|x-2|=-3$ и $3^x=(-1)^3$.

40. Выяснить, равносильны ли неравенства:

1) $2x-1\geqslant 2$ и $2(x-1)\geqslant 1$;

2) $(x-1)(x+2)<0$ и $x^2+x<2$;

3) $(x-3)(x+2)<3x+6$ и $x-3<3$;

4) $x(x+3)\geqslant 2x$ и $x^2(x+3)\geqslant 2x^2$.

41. Выяснить, равносильны ли системы уравнений:

1) $\begin{cases}2x+3y=5,\\ x-y=2\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+3y=5,\\ x=2+y;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-3y=8,\\ x^2-9y^2=72\end{cases}$ и $\begin{cases}x-3y=8,\\ x+3y=9;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=9,\\ x-y=3\end{cases}$ и $\begin{cases}(x-y)^2=9,\\ x-y=-3;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x+2y=5,\\ 2x+y=4\end{cases}$ и $\begin{cases}-2x+2y=-10,\\ 2x+y=4.\end{cases}$

42. Установить, какое из двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x-2=0$ и $x^2-5x+6=0$; 2) $\frac{x^2-5x+4}{x-1}=0$ и $x^2-5x+4=0$.

43. Решить уравнение:

1) $\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{x-1}=\frac{6x}{x^2-1}$; 2) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x-2}$;

3) $(x-3)(x-5)=3(x-5)$; 4) $(x-2)(x^2+1)=2(x^2+1)$.

44. Решить неравенство:

1) $\frac{x+6}{2+x^2}<3$; 2) $\frac{x-2}{5-x}>1$.

Выяснить, равносильны ли уравнения (45—46).

45. 1) $|3x-1|=5$ и $3x-1=5$;

2) $\frac{3x-2}{3}-\frac{4-x}{2}-\frac{3x-5}{6}=2x-2$ и $2x+3=\frac{10}{3}$.

46. 1) $x(x-1)=2x+5$ и $x^2-3x-5=0$; 2) $\sqrt{x+8}=2$ и $x+8=4$.

<u>47.</u> Установить, какое из двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $|x|=\sqrt{6}$ и $\sqrt{x^2}=6$;

2) $\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-3}{x+2}$ и $(x-2)(x+2)=(x-3)(x+3)$.

<u>48.</u> Решить уравнение $\frac{1}{5x+1}-\frac{2}{5x-1}-\frac{9x}{25x^2-1}=\frac{5x^2}{1-25x^2}$.

<u>49.</u> Найти корни уравнения:

1) $\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x+1}=\frac{x^2+5}{x^2-1}-5$;

2) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x(x-4)}{x^2-4}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{4(3+x)}{4-x^2}$.

50. Решить неравенство:

1) $x^3-3x^2+2x-6>2x^3-x^2+4x-2$;

2) $x^3-3x^2-4x+12>-3x^3+x^2+12x-4$.

51. Доказать, что если функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ определены на множестве X и $\varphi(x)\neq 0$ для всех $x\in X$, то уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$ равносильны.

52. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X и $f(x)>0$, $g(x)>0$ при всех $x\in X$, то

$$(f(x)>g(x))\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{g(x)}\right).$$

§ 5. Иррациональные уравнения

В уравнениях $\sqrt{x+1}=x-1$, $\sqrt{5x-4}=2+\sqrt{x}$ неизвестное x находится под знаком корня. Такие уравнения называют *иррациональными*. Приведем еще примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt[4]{x+15}=x+1,\ \sqrt[3]{x+6}=\sqrt{6-x}.$$

Иррациональные уравнения часто получаются при решении различных задач. Решение иррациональных уравнений основано на следующем свойстве:

> при возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение-следствие данного.

○ Пусть x_0 — корень уравнения $f(x)=g(x)$, т. е. $f(x_0)=g(x_0)$ — верное числовое равенство. Тогда по свойствам верных числовых равенств $f^n(x_0)=g^n(x_0)$, где n — натуральное число, также верное числовое равенство, т. е. x_0 — корень уравнения $f^n(x)=$ $=g^n(x)$. ●

При возведении обеих частей уравнения в четную натуральную степень может получиться уравнение, не равносильное данному. Например, уравнение $\sqrt{6-x}=x$ имеет один корень $x=2$, а уравнение $6-x=x^2$ имеет два корня $x_1=2$, $x_2=-3$.

При возведении уравнения в натуральную степень могут появиться посторонние корни, поэтому проверка необходима.

Например, при возведении обеих частей уравнения $\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{x}$ в квадрат получается уравнение $x^2+x-1=x$, т. е. $x^2=1$.

Это уравнение имеет два корня $x_1=1$, $x_2=-1$. Второй корень является посторонним для исходного уравнения, так как подкоренные выражения при $x=-1$ отрицательны.

> Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ неотрицательны на множестве X, то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно уравнению $(f(x))^n=(g(x))^n$ при $n\in N$.

Задача 1. Решить уравнение $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$.

▷ Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$x+6-2\sqrt{(x+6)(x+1)}+x+1=2x-5,$$

откуда $\sqrt{(x+6)(x+1)}=6$.

Возведем последнее уравнение в квадрат:

$$x^2+7x+6=36,\ x^2+7x-30=0.$$

Корни этого уравнения $x_1=3$, $x_2=-10$. Проверка показывает, что $x_2=-10$ — посторонний корень.

Ответ. $x=3$. ◀

Задача 2. Решить уравнение $\sqrt[4]{x^2+12}=x$.

▷ Возводя обе части уравнения в четвертую степень, получим уравнение-следствие $x^2+12=x^4$, откуда $x^4-x^2-12=0$. Решим это биквадратное уравнение:

$$x^2=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2},\text{ т. е. } x^2=4 \text{ или } x^2=-3.$$

Уравнение $x^2=4$ имеет два корня $x=\pm 2$. Уравнение $x^2=-3$ не имеет действительных корней. Так как при возведении обеих частей исходного уравнения в четвертую степень могли появиться посторонние корни, то нужно сделать проверку. При $x=2$ обе части данного уравнения равны 2, т. е. $x=2$ — корень уравнения. При $x=-2$ левая часть уравнения равна 2, а правая равна -2, т. е. -2 не является корнем уравнения.

Ответ. $x=2$. ◀

Задача 3. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3-19}=x-1$.

▷ Возводя обе части уравнения в куб, получаем

$$x^3-19=(x-1)^3,$$

откуда $x^3-19=x^3-3x^2+3x-1$, $3x^2-3x-18=0$, $x^2-x-6=0$.

Корни этого уравнения $x_1=3$, $x_2=-2$. Проверка показывает, что x_1 и x_2 являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1=3$, $x_2=-2$. ◀

Замечание. Так как при возведении в куб обеих частей уравнения получается равносильное уравнение (с. 189, предложение 5), то в задаче 3 можно не делать проверку.

Если уравнение содержит два или более выражений, стоящих под знаком корня, то обычно применяют прием, называемый «уединение радикала» (как в задаче 1), позволяющий представить (если это возможно) левую и правую части в виде выражений, принимающих только неотрицательные значения.

Задача 4. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}=2.$$

▷ Уединив первый радикал, получим уравнение $\sqrt{3x^2-6x+1}=$ $=2+\sqrt{x^2-2x-1}$, равносильное данному. Обе части этого уравнения неотрицательны. Возведение в квадрат обеих частей уравнения приведет вновь к равносильному уравнению, но достаточно громоздкому.

Заметим, что подкоренные выражения в обеих частях уравнения таковы, что можно выполнить замену неизвестного $t=x^2-2x$. Уравнение примет вид $\sqrt{3t+1}=2+\sqrt{t-1}$.

При $t \geqslant 1$ (область определения уравнения) это уравнение равносильно каждому из следующих:

$$3t+1=4+4\sqrt{t-1}+t-1,\ 4\sqrt{t-1}=2t-2,\ 2\sqrt{t-1}=t-1,$$
$$4(t-1)=t^2-2t+1,\ t^2-6t+5=0.$$

Корни последнего уравнения $t_1=1$, $t_2=5$ удовлетворяют условию $t \geqslant 1$ и поэтому являются корнями уравнения $\sqrt{3t+1}=$ $=2+\sqrt{t-1}$. Если $t=1$, то $x^2-2x=1$, откуда $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$. Если $t=5$, то $x^2-2x=5$, откуда $x_{3,4}=1\pm\sqrt{6}$.

Ответ. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{6}$. ◀

Решим еще одно уравнение, в котором введение нового неизвестного значительно упрощает решение.

Задача 5. Решить уравнение $\sqrt[5]{\dfrac{2+x}{3-x}}+\sqrt[5]{\dfrac{3-x}{2+x}}=2.$

▷ Если $x\neq 3$, $x\neq -2$, то, полагая $\sqrt[5]{\dfrac{2+x}{3-x}}=u$, преобразуем уравнение к виду $u+\dfrac{1}{u}=2$, так как $u\neq 0$, то $u^2-2u+1=0$, $(u-1)^2=0$. Уравнение $(u-1)^2=0$ имеет один корень $u=1$. Следовательно, $\sqrt[5]{\dfrac{2+x}{3-x}}=1$, откуда $\dfrac{2+x}{3-x}=1$, $2+x=3-x$, $x=\dfrac{1}{2}$. ◀

Число $x=\dfrac{1}{2}$ является корнем исходного уравнения, так как в процессе решения было использовано (наряду с заменой неизвестного) только равносильное преобразование:

$$(f(x)=g(x))\Leftrightarrow((f(x))^5=(g(x))^5).$$

Задача 6. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

▷ Положим $\sqrt{2x-5}=t$, тогда $x=\dfrac{t^2+5}{2}$ и исходное уравнение примет вид $\sqrt{\dfrac{t^2+1}{2}+t}+\sqrt{\dfrac{t^2+9}{2}+3t}=7\sqrt{2}$.

Это уравнение равносильно каждому из уравнений:
$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14$, $\sqrt{(t+1)^2}+\sqrt{(t+3)^2}=14$.

Используя тождество $\sqrt{a^2}=|a|$, запишем последнее уравнение в виде $|t+1|+|t+3|=14$. Так как $t\geqslant 0$, то $t+1+t+3=14$, откуда $t=5$, т. е. $\sqrt{2x-5}=5$, $x=15$. ◄

Задача 7. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6,\\ x-y=12.\end{cases}$

▷ Первое уравнение системы имеет область определения $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. При таких значениях x и y имеем $x-y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, поэтому система примет вид $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6,\\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=12,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2.\end{cases}$ Решив систему способом сложения, получим $\sqrt{x}=4$, $x=16$, $\sqrt{y}=2$, $y=4$.

Ответ. (16; 4). ◄

Задача 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{4}{3}\sqrt{2x+1}-2\sqrt{3-y}=0,\\ 3\sqrt{2x+1}-3\sqrt{3-y}=\sqrt{3}x.\end{cases}$$

▷ Умножим первое уравнение на (-3), второе на 2 и сложим полученные уравнения:

$$+\begin{array}{r}-4\sqrt{2x+1}+6\sqrt{3-y}=0,\\ 6\sqrt{2x+1}-6\sqrt{3-y}=2\sqrt{3}x,\\ \hline 2\sqrt{2x+1}=2\sqrt{3}x.\end{array}$$

Решаем последнее уравнение:

$4(2x+1)=12x^2$, $12x^2-8x-4=0$, $3x^2-2x-1=0$, $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{3}$.

Оба корня удовлетворяют условию $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

Подставляя $x_1=1$ в первое уравнение системы, получим: $\frac{4}{3}\sqrt{3}-2\sqrt{3-y}=0$, $2\sqrt{3-y}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{3-y}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $3-y=\frac{4}{3}$, $y_1=1\frac{2}{3}$.

Подставляя $x_2=-\frac{1}{3}$ в первое уравнение, получим $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}-2\sqrt{3-y}=0$, $\frac{4}{3\sqrt{3}}=2\sqrt{3-y}$, $\sqrt{3-y}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $3-y=\frac{4}{27}$, $y_2=2\frac{23}{27}$.

Оба корня удовлетворяют условию $y\leqslant 3$.

Ответ. $\left(1;\ 1\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};\ 2\frac{23}{27}\right)$. ◄

Задача 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{17}{4}, \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52. \end{cases}$$

▷ Освобождаясь в первом уравнении от иррациональности в знаменателях, получаем

$$\frac{4x^2-2y^2}{y^2}=\frac{17}{4}, \text{ откуда } x=\frac{5}{4}y \text{ и } x=-\frac{5}{4}y.$$

Во втором уравнении положим $t=\sqrt{x^2+xy+4}$; тогда получим $t^2+t-56=0$, откуда $t_1=7$, $t_2=-8$. Отбросив корень $t_2<0$, получим $x^2+xy=45$.

Решив две системы уравнений

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{4}y, \\ x^2+xy=45; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{5}{4}y, \\ x^2+xy=45, \end{cases}$$

найдем четыре решения, которые, как показывает проверка, удовлетворяют и исходной системе.

Ответ. (5; 4), (−5; −4), (15; −12), (−15; 12). ◀

Иногда при решении иррационального уравнения полезно использовать графики функций.

Задача 10. Выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x}=1-x^2$. Найти приближенные значения этих корней.

▷ Построим на одном рисунке графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=1-x^2$ (рис. 81). Графики пересекаются в одной точке при $x\approx0{,}5$. ◀

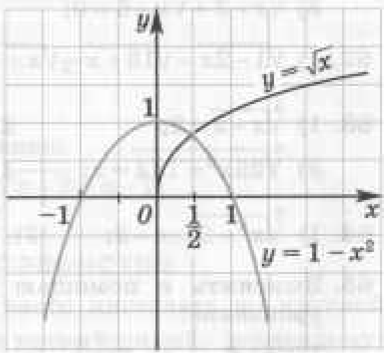


Рис. 81

Упражнения

53. (Устно.) Решить уравнение:

1) $\sqrt{x}=2$; 2) $\sqrt{x}=7$; 3) $\sqrt[3]{x}=2$; 4) $\sqrt[3]{x}=-3$;
5) $\sqrt[3]{1-3x}=0$; 6) $\sqrt[4]{x}=1$; 7) $\sqrt[4]{2-x}=0$.

Решить уравнение (54—56).

54. 1) $\sqrt{x+1}=3$; 2) $\sqrt{x-2}=5$; 3) $\sqrt{4+x}=\sqrt{2x-1}$.

55. 1) $\sqrt[3]{2x+3}=1$; 2) $\sqrt[3]{1-x}=2$; 3) $\sqrt[3]{3x^2-3}=\sqrt[3]{8x}$.

56. 1) $x+1=\sqrt{1-x}$; 2) $x=1+\sqrt{x+11}$;
3) $\sqrt{x+3}=\sqrt{5-x}$; 4) $\sqrt{x^2-x-3}=3$.

57. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ x-y=10;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\\ x-y=24;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y-1}=1,\\ x-y=3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=2,\\ \sqrt{x+2}+\sqrt{3-y}=3.\end{cases}$

Решить уравнение (58—64).

58. 1) $\sqrt{x}-x=-12$; 2) $x+\sqrt{x}=2(x-1)$;
3) $\sqrt{x-1}=x-3$; 4) $\sqrt{6+x-x^2}=1-x$.

59. 1) $\sqrt{2x-34}=1+\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{5x}+\sqrt{14-x}=8$;
3) $\sqrt{15+x}+\sqrt{3+x}=6$; 4) $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$.

60. 1) $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^3+x^2}=0$; 2) $\sqrt[3]{1+x^4}=\sqrt[3]{1+x^2}$.

61. 1) $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2$; 2) $\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x}=1$;
3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=0$; 4) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$.

62. 1) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$; 2) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{15+2x}$.

63. 1) $\sqrt[3]{x-2}=2$; 2) $\sqrt[3]{2x+7}=\sqrt[3]{3(x-1)}$;
3) $\sqrt[4]{25x^2-144}=x$; 4) $x^2=\sqrt{19x^2-34}$.

64. 1) $\sqrt[3]{x^3-2}=x-2$; 2) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$.

65. Выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение:

1) $\sqrt{x}-6=-x^2$; 2) $\sqrt[3]{x}=(x-1)^2$; 3) $\sqrt{x+1}=x^2-7$; 4) $1-x^4=\sqrt{x-1}$.

Решить уравнение (66—67).

66. 1) $\sqrt{4x+2\sqrt{3x^2+4}}=x+2$; 2) $3-x=\sqrt{9-\sqrt{36x^2-5x^4}}$;
3) $\sqrt{x^2+3x+12}-\sqrt{x^2+3x}=2$;
4) $\sqrt{x^2+5x+10}-\sqrt{x^2+5x+3}=1$.

67. 1) $\sqrt{\frac{9}{x}+1}+3\sqrt{\frac{x}{x+9}}=4$;

2) $\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}+\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}}=\frac{5}{2}$; 3) $\sqrt{\frac{3x^2+x}{x^2-1}}-\sqrt{\frac{x^2-1}{3x^2+x}}=\frac{3}{2}$.

68. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2, \\ x+y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

Решить уравнение (69—70).

69. 1) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$;

2) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

70. $\dfrac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}=2$.

Решить систему уравнений (71—72).

71. 1) $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}=1, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y+11}=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2}, \\ x+y+xy=9. \end{cases}$

72. 1) $\begin{cases} \sqrt{7(x-y)}-\sqrt{x+y}=\dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{y}{x}}, \\ \sqrt{7(x-y)}+\sqrt{x+y}=9\sqrt{\dfrac{x}{y}}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185, \\ (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65. \end{cases}$

73. Решить относительно x уравнение:

1) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-2}=a$; 2) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+2}=a-1$.

§ 6. Иррациональные неравенства

Задача 1. Стрельба из спортивного пистолета по круглой мишени диаметром 1 м ведется из точки прямой, перпендикулярной плоскости мишени и проходящей через ее центр. На каком расстоянии от мишени должна быть точка выстрела, чтобы разность расстояний от нее до края мишени и до центра была не больше 2 см?

▷ Пусть A — точка выстрела, O — центр мишени, B — точка на окружности мишени (рис. 82). По условию $BO=50$ см. Обозначим $AO=x$, тогда $AB=\sqrt{x^2+2500}$. По условию задачи $AB-AO\leqslant 2$, т. е. $\sqrt{x^2+2500}-x\leqslant 2$ или

$$\sqrt{x^2+2500}\leqslant x+2.$$

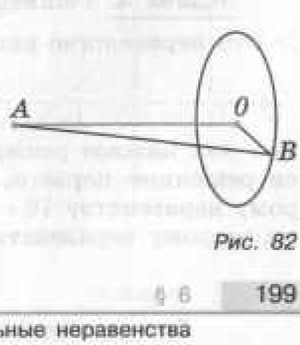


Рис. 82

По смыслу задачи $x>0$. Если $x>0$, то левая и правая части полученного неравенства положительны. Возводя обе части этого неравенства в квадрат, получаем равносильное неравенство $x^2+2500\leqslant x^2+4x+4$ при условии $x>0$. Откуда $4x\geqslant 2496$, $x\geqslant 624$, т. е. не меньше 624 см. ◀

В этой задаче пришлось решать неравенство, содержащее неизвестное под знаком корня. Такие неравенства называются *иррациональными*.

<u>Задача 2.</u> Решить неравенство $\sqrt{5-x}<4$.

▷ Найдем область определения этого неравенства. Правая часть неравенства определена при всех значениях x, а левая — при $5-x\geqslant 0$, т. е. при $x\leqslant 5$. Следовательно, область определения неравенства — луч $x\leqslant 5$.

При $x\leqslant 5$ обе части данного неравенства неотрицательны, и поэтому при возведении в квадрат обеих частей получается равносильное (на множестве $x\leqslant 5$) неравенство $5-x<16$.

Таким образом, данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x\leqslant 5, \\ 5-x<16. \end{cases}$

Решая эту систему, получаем $-11<x\leqslant 5$. ◀

Рассуждения, приведенные при решении задачи 2, можно провести устно и сразу записать, что данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 5-x\geqslant 0, \\ 5-x<16. \end{cases}$

<u>Задача 3.</u> Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x}<2$.

▷ Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-3x\geqslant 0, \\ x^2-3x<4. \end{cases}$$

Рис. 83

Решая первое неравенство системы, получаем $x\leqslant 0$, $x\geqslant 3$. Решая второе неравенство системы, получаем $-1<x<4$. Оба неравенства системы выполняются при $-1<x\leqslant 0$, а также при $3\leqslant x<4$ (рис. 83). ◀

<u>Задача 4.</u> Решить неравенство $\sqrt{10+x-x^2}\geqslant 2$.

▷ Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 10+x-x^2\geqslant 0, \\ 10+x-x^2\geqslant 4. \end{cases}$$

Так как каждое решение второго неравенства системы является решением первого, то эта система равносильна одному второму неравенству $10+x-x^2\geqslant 4$. Значит, неравенство равносильно второму неравенству, решая которое получаем $-2\leqslant x\leqslant 3$. ◀

Задача 5. Решить неравенство:

1) $\sqrt{3x-4}<-5$; 2) $\sqrt{2x^2+5x-3}\leqslant 0$.

▷ 1) При всех допустимых значениях x, т. е. при $x\geqslant\frac{4}{3}$, значения $\sqrt{3x-4}$ неотрицательны. Поэтому неравенство $\sqrt{3x-4}<-5$ решений не имеет.

2) Неравенство $\sqrt{2x^2+5x-3}\leqslant 0$ выполняется только в том случае, когда $\sqrt{2x^2+5x-3}=0$, т. е. если $2x^2+5x-3=0$, откуда $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$. ◀

Задача 6. Решить неравенство $\sqrt{3x+1}\leqslant x+1$.

▷ Область определения этого неравенства — луч $x\geqslant-\frac{1}{3}$. При этих значениях x обе части неравенства неотрицательны. Следовательно, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}3x+1\geqslant 0,\\ 3x+1\leqslant(x+1)^2.\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 0$, $x\geqslant 1$. ◀

Задача 7. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3}>x+1.$$

▷ Область определения этого неравенства — луч $x\geqslant-3$. При всех $x\geqslant-3$ левая часть этого неравенства неотрицательна. Правая часть этого неравенства отрицательна при $x<-1$. Поэтому все значения x из промежутка $-3\leqslant x<-1$ являются решениями неравенства.

Рассмотрим случай, когда $x\geqslant-1$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и поэтому их можно возводить в квадрат: $x+3>(x+1)^2$. Решением этого неравенства являются значения x из промежутка $-2<x<1$. Отсюда, учитывая, что $x\geqslant-1$, получаем $-1\leqslant x<1$.

Решениями неравенства являются все значения x из промежутка $-3\leqslant x<-1$, а также из промежутка $-1\leqslant x<1$, т. е. из промежутка $-3\leqslant x<1$. ◀

Неравенство $\sqrt{x+3}>x+1$ проще решать с помощью графиков. На рисунке 84 построены графики двух функций $y=\sqrt{x+3}$ и $y=x+1$. Из рисунка видно, что решениями данного неравенства являются значения x из промежутка $-3\leqslant x<1$.

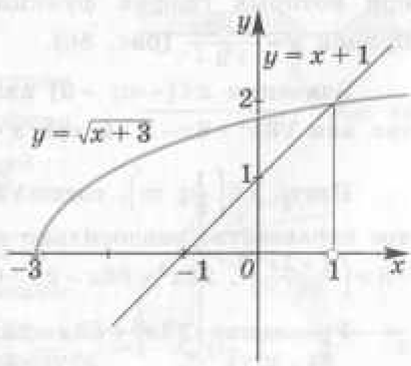


Рис. 84

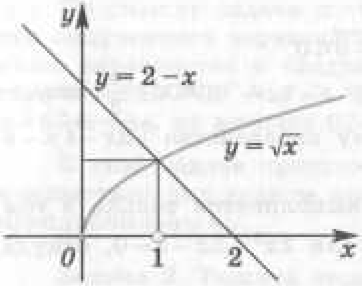


Рис. 85

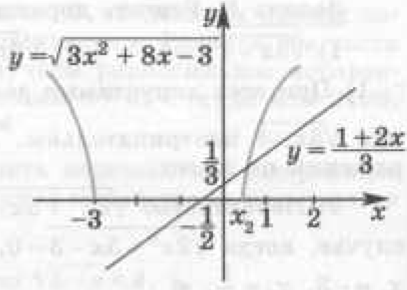


Рис. 86

<u>Задача 8.</u> **Решить графически неравенство**

$$\sqrt{x}<2-x.$$

▷ На одном рисунке построим графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=2-x$ (рис. 85) и выясним, при каких значениях x точки графика функции $y=\sqrt{x}$ лежат ниже точек графика функции $y=2-x$. Из рисунка видно, что эти графики пересекаются в одной точке, абсцисса которой является корнем уравнения $\sqrt{x}=2-x$. Это корень $x=1$. График функции $y=\sqrt{x}$ лежит ниже графика функции $y=2-x$ при $0\leqslant x<1$. ◀

<u>Задача 9.</u> **Решить неравенство**

$$\sqrt{3x^2+8x-3}>\frac{1+2x}{3}.$$

▷ Так как уравнение $3x^2+8x-3=0$ имеет корни $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{3}$, то область определения неравенства есть совокупность полуинтервалов $\left(-\infty;\,-3\right]$, $\left[\frac{1}{3};\,+\infty\right)$. Решить данное неравенство — значит найти все значения x из области определения, при которых график функции $y=\sqrt{3x^2+8x-3}$ лежит выше прямой $y=\frac{1+2x}{3}$ (рис. 86).

Значения $x\in(-\infty;\,-3]$ являются решениями неравенства, так как $\sqrt{3x^2+8x-3}\geqslant 0$ при $x\leqslant -3$, а $\frac{1+2x}{3}<0$ при $x\leqslant -3$.

Пусть $x\in\left[\frac{1}{3};\,\infty\right)$, тогда $\sqrt{3x^2+8x-3}\geqslant 0$, $\frac{1+2x}{3}>0$ и исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $3x^2+8x-3>\left(\frac{1+2x}{3}\right)^2$, $23x^2+68x-28>0$.

Уравнение $23x^2+68x-28=0$ имеет корни x_1 и x_2, где $x_1=-\frac{34+30\sqrt{2}}{23}<0$, $x_2=\frac{30\sqrt{2}-34}{23}$. Поэтому решениями исходного неравенства на множестве $\left[\frac{1}{3};\ \infty\right)$ являются все точки $x>\frac{30\sqrt{2}-34}{23}$ (рис. 87).

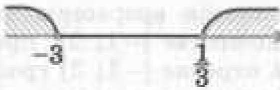


Рис. 87

Ответ. $x\leqslant-3,\ x>\frac{30\sqrt{2}-34}{23}$. ◀

<u>**Задача 10.**</u> Решить неравенство $\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{\sqrt{5}}$.

▷ I способ. Данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2-x}>\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}$, область определения которого — отрезок $[-1;\ 2]$. Так как обе части последнего неравенства неотрицательны, то на отрезке $[-1;\ 2]$ оно равносильно неравенству $2-x>x+\frac{6}{5}+2\sqrt{\frac{x+1}{5}}$. Полученное неравенство, в свою очередь, равносильно системе $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2,\\ \frac{2}{5}-x>\sqrt{\frac{x+1}{5}}.\end{cases}$

Если $\frac{2}{5}-x<0$, т. е. $x>\frac{2}{5}$, то второе неравенство не имеет решений. Если $\frac{2}{5}-x\geqslant 0$ и $-1\leqslant x\leqslant 2$, т. е. $-1\leqslant x\leqslant\frac{2}{5}$, то система равносильна каждому из неравенств:

$$\left(\frac{2}{5}-x\right)^2>\frac{x+1}{5},\ x^2-x-\frac{1}{25}>0.$$

Уравнение $25x^2-25x-1=0$ имеет корни $x_1=\frac{5+\sqrt{29}}{10}$, $x_2=\frac{5-\sqrt{29}}{10}$.

Решениями неравенства $(x-x_1)(x-x_2)>0$ являются значения $x<x_1$, $x>x_2$. Так как $x_1>\frac{2}{5}$, $-1<x_2<\frac{2}{5}$ (рис. 88), то множество решений неравенства — промежуток $\left[-1;\ \frac{5-\sqrt{29}}{10}\right)$. ◀

Рис. 88

II способ. Рассмотрим функции $f(x)=\sqrt{2-x}$ и $g(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}$, общая область определения этих функций — отрезок $[-1;\ 2]$, а эскизы графиков представлены на рисунке 89.

Решить неравенство $\sqrt{2-x}>\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}$ — это значит найти все значения $x\in[-1;\ 2]$, при которых график функции $y=f(x)$ лежит выше графика функции $y=g(x)$. Функция $y=g(x)$

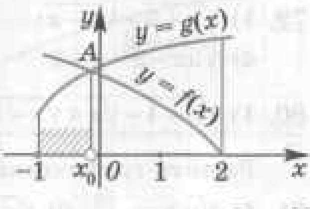


Рис. 89

является возрастающей, а функция $y=f(x)$ — убывающей на множестве $[-1; 2]$, причем $f(-1)>g(-1)$, а $f(2)<g(2)$. Поэтому на отрезке $[-1; 2]$ графики этих функций имеют единственную общую точку $A(x_0; y_0)$, где x_0 — корень уравнения $f(x)=g(x)$, т. е. уравнения $x^2-x-\frac{1}{25}=0$. Заметим, что $x_0<0$, так как $f(0)=\sqrt{2}$, $g(0)=1+\frac{1}{\sqrt{5}}$, откуда $f(0)<g(0)$. Следовательно, $x_0=x_2=$ $=\frac{5-\sqrt{29}}{10}$, а искомое множество решений неравенства — промежуток $\left[-1; \frac{5-\sqrt{29}}{10}\right)$. ◄

В заключение сформулируем следующие утверждения:

1) неравенство $\sqrt{f(x)}<g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g^2(x); \end{cases}$

2) неравенство $\sqrt{f(x)}>g(x)$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g(x)\geqslant 0 \\ f(x)>g^2(x). \end{cases}$$

Упражнения

74. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3-x\leqslant 2, \\ 2x+1\leqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ x>2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9-x^2\leqslant 0, \\ x+5<0. \end{cases}$

Решить неравенство (75—80).

75. 1) $\sqrt{x}>2$; 2) $\sqrt{x}<3$; 3) $\sqrt[3]{x}\geqslant 1$; 4) $\sqrt[3]{2x}<3$.

<u>76.</u> 1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}<1$; 3) $\sqrt{3-x}<5$;
4) $\sqrt{4-x}>3$; 5) $\sqrt{2x-3}>4$; 6) $\sqrt{4x+5}\leqslant\frac{1}{2}$.

<u>77.</u> 1) $\sqrt{x^2-1}>1$; 2) $\sqrt{1-x^2}<1$; 3) $\sqrt{25-x^2}>4$; 4) $\sqrt{25-x^2}<4$.

<u>78.</u> 1) $\sqrt{2x^2+3x-2}>0$; 2) $\sqrt{2+x-x^2}>-1$;
3) $\sqrt{x^2+2x}>-3-x^2$; 4) $\sqrt{4x-x^2}>-2-3x^2$.

<u>79.</u> 1) $\sqrt{x+2}>\sqrt{4-x}$; 2) $\sqrt{3+2x}\geqslant\sqrt{x+1}$; 3) $\sqrt{2x-5}<\sqrt{5x+4}$;
4) $\sqrt{3x-2}>x-2$; 5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{3-x}<\sqrt{3x-5}$.

<u>80.</u> 1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt{x+3}<\sqrt{7-x}+\sqrt{10-x}$.

Решить графически неравенство (81—82).

<u>81.</u> 1) $\sqrt{x}\geqslant x$; 2) $\sqrt{x}<x$; 3) $\sqrt{x}>x-2$; 4) $\sqrt{x}\leqslant x-2$.

82. 1) $\sqrt{x} \leqslant 2x$; 2) $\sqrt{x} > 0{,}5x$; 3) $\sqrt{x} \geqslant 2x-1$; 4) $\sqrt{x} \geqslant x^2$.

Решить неравенство (83—84).

83. 1) $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$; 2) $\sqrt{2x^2-7x-4} > -x-\frac{1}{4}$.

84. 1) $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \leqslant x$; 2) $\frac{4x^2-9}{\sqrt{3x^2-3}} \leqslant \frac{2}{3}x+1$.

85. Решить относительно x неравенство:

1) $\sqrt{x-1} < a$; 2) $\sqrt{2ax-x^2} \geqslant a-x$, если $a \leqslant 0$.

Упражнения к главе V

86. Изобразить схематически график функции, указать ее область определения и множество значений:

1) $y=x^9$; 2) $y=7x^4$; 3) $y=\sqrt{x}$;

4) $y=\sqrt[3]{x}$; 5) $y=x^{-2}$; 6) $y=x^{-3}$.

87. На одном рисунке построить графики функций $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$. Сравнить значения этих функций при $x=0$; $0{,}5$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; 3; 4; 5.

88. Решить графически уравнение:

1) $\sqrt[3]{x}=x^2+x-1$; 2) $x^{-2}=2x^2-1$.

89. Найти область определения функции:

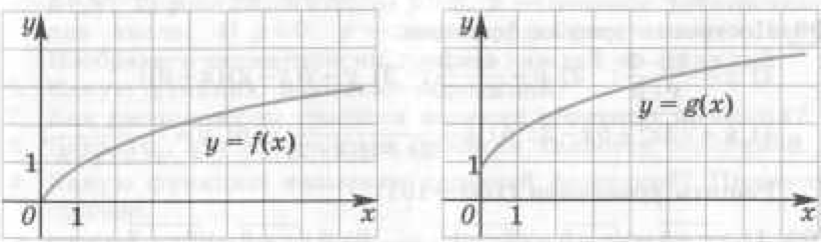
1) $y=\sqrt[3]{1-x}$; 2) $y=\sqrt[6]{2-x^2}$;

3) $y=(3x^2+1)^{-2}$; 4) $y=\sqrt{x^2-x-2}$.

90. Найти функцию, обратную к функции:

1) $y=0{,}5x+3$; 2) $y=\frac{2}{x-3}$; 3) $y=(x+2)^3$; 4) $y=x^3-1$.

91. Изобразить график функции, обратной к функции, график которой изображен на рисунке 90.



а) б)

Рис. 90

92. Выяснить, являются ли равносильными уравнения:

1) $2^{x^2+3x}=2^2$ и $x^2+3x=2$; 2) $\sqrt{x^2+3x}=\sqrt{2}$ и $x^2+3x=2$;

3) $\sqrt[3]{x+18}=\sqrt[3]{2-x}$ и $x+18=2-x$.

93. Решить уравнение:

1) $\sqrt{3-x}=2$; 2) $\sqrt{3x+1}=8$; 3) $\sqrt{3-4x}=2x$;

4) $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x$; 5) $\sqrt[3]{x^2-17}=2$; 6) $\sqrt[4]{x^2+17}=3$.

---

94. Изобразить схематически на одном рисунке графики функций:

1) $y=\sqrt{x^5}$, $y=x\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[5]{x}$, $y=x^{0,7}$.

95. Расположить числа в порядке возрастания:

1) $0,3^{\pi}$; $0,3^{0,5}$; $0,3^{\frac{2}{3}}$; $0,3^{3,1415}$; 2) $\sqrt{2^{\pi}}$; $1,9^{\pi}$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$; π^{π};

3) 5^{-2}, $5^{-0,7}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$; 4) $0,5^{-\frac{2}{3}}$; $1,3^{-\frac{2}{3}}$; $\pi^{-\frac{2}{3}}$; $\sqrt{2}^{-\frac{2}{3}}$.

96. Выяснить, являются ли взаимно обратными функции:

1) $y=\frac{10-3x}{x-4}$ и $y=\frac{4x+10}{x+3}$; 2) $y=\frac{3x-6}{3x-1}$ и $y=\frac{6-x}{3-3x}$;

3) $y=5(1-x)^{-1}$ и $y=(5-x)\cdot x^{-1}$; 4) $y=\frac{2-x}{2+x}$ и $y=\frac{2(x-1)}{1+x}$.

97. Найти функцию, обратную к данной, ее область определения и множество значений:

1) $y=2+\sqrt{x+2}$; 2) $y=2-\sqrt{x+4}$;

3) $y=\sqrt{3-x}-1$; 4) $y=\sqrt{1-x}+3$.

98. Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{x^3-3x^2+2x}$; 2) $y=\sqrt{3x+2x^2-x^3}$; 3) $y=(x^3-x^2)^{\frac{3}{5}}$;

4) $y=(x^4+x^3)^{-\frac{3}{4}}$; 5) $y=\frac{3}{\sqrt[6]{3x^2+14x+8}}$; 6) $y=\frac{1}{3\sqrt{x-\sqrt{x+2}}}$.

99. Построить график функции:

1) $y=\frac{3x-1}{x+3}$; 2) $y=\frac{4x-3}{2x-1}$; 3) $y=\sqrt{(x-2)(x+3)}$;

4) $y=\sqrt{2x^2+5x-3}$; 5) $y=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$; 6) $y=\frac{1}{x^2-7x-8}$.

Решить уравнение (100—101).

100. 1) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-1}$; 2) $2\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+7}=\sqrt{x}$;

3) $\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}$; 4) $\sqrt{9-2x}=2\sqrt{4-x}-\sqrt{1-x}$.

101. 1) $\sqrt{x+4}-3\sqrt[4]{x+4}+2=0$; 2) $\sqrt{x-3}=3\sqrt[4]{x-3}+4$;

3) $\sqrt[6]{1-x}-5\sqrt[3]{1-x}=-6$; 4) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=2$;

5) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$.

Решить неравенство (102—103).

102. 1) $\sqrt{x+1}<x-1$; 2) $\sqrt{1-x}>x+1$;

3) $\sqrt{3x-2}>x-2$; 4) $\sqrt{2x+1}\leqslant x+1$.

103. 1) $\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4}<\dfrac{1}{2}$;

3) $\sqrt{3+x}>|x-3|$; 4) $\sqrt{3-x}<\sqrt{7+x}+\sqrt{10+x}$.

Решить систему уравнений (104—105).

104. 1) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=84, \\ x+y+\sqrt{xy}=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{2x-1}+\sqrt{3-y}=3, \\ 6x+y-2xy=7. \end{cases}$

105. $\begin{cases} \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=\sqrt{8}, \\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=\sqrt{16+(x+y)^2}. \end{cases}$

106. При различных значениях a решить неравенство:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}<a$; 2) $2x+\sqrt{a^2-x^2}>0$.

Вопросы к главе V

1. Какая функция называется ограниченной сверху (снизу) на множестве? Привести пример.
2. В каком случае функция принимает наименьшее (наибольшее) значение на некотором множестве?
3. Перечислить свойства функции $y=x^p$, где $p=2n$, $n\in N$. Изобразить схематически график функции.
4. Перечислить свойства функции $y=x^p$, где $p=2n-1$, $n\in N$. Изобразить схематически график функции.
5. Перечислить свойства функции $y=x^p$, где: 1) $p=-(2n-1)$, $n\in N$; 2) $p=-2n$, $n\in N$; 3) $p>0$, p — нецелое действительное число; 4) $p<0$, p — нецелое действительное число. Изобразить схематически график каждой из функций.
6. Какую функцию называют обратимой?
7. Как расположены графики взаимно обратных функций?
8. Доказать, что монотонная функция является обратимой.
9. Какую функцию называют сложной функцией? Привести пример.
10. Какую функцию называют дробно-линейной? Привести пример.

11. Какие уравнения называют равносильными?

12. Какое уравнение называется уравнением-следствием? Привести пример.

13. Привести пример преобразования уравнения, в результате которого получится уравнение, равносильное данному.

14. Верно ли утверждение: «Если функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ определены на множестве X, то для всех $x \in X$

$$(f(x)=g(x)) \Leftrightarrow (f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x))\text{»?}$$

15. Какие неравенства называются равносильными? Привести пример.

16. На каком утверждении основан способ подстановки при решении систем уравнений?

17. Верно ли утверждение: $(f(x)=g(x)) \Leftrightarrow ((f(x))^n=(g(x))^n)$?

Проверь себя!

1. Найти область определения функции:

1) $y=3(x-1)^{-2}$; 2) $y=\sqrt[4]{x^2-3x-4}$.

2. Построить график функции:

1) $y=\sqrt[3]{x+1}$; 2) $y=2x^{-2}$; 3) $y=\dfrac{x^4}{2}$.

Для каждой функции указать область определения и те значения x, при которых $y>0$.

3. Решить уравнение:

1) $\sqrt[4]{x-3}=5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2}=x$.

---

1. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{x+1}+\sqrt[6]{x^2+2x-3}.$$

2. Построить график функции:

1) $y=(x+2)^4-1$; 2) $y=(|x|+1)^{\frac{1}{3}}$.

3. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+4}$;

2) $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{x-1}=30$.

4. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2-5x-3}>x-1.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}-2\sqrt{2-y}=0, \\ \sqrt{x+1}+3\sqrt{2-y}=2{,}5. \end{cases}$$

Историческая справка

Учение о степенных функциях, т. е. функциях вида $y=x^r$, развивалось параллельно с расширением понятия степени (начиная со степеней с натуральными показателями и заканчивая понятием степени с любым действительным показателем).

Благодаря методу координат, разработанному Рене Декартом, между алгеброй и геометрией линий в математике была установлена тесная связь. Алгебраические уравнения Декарт рассматривал как зависимость z от x, определяющую положение точек на плоскости (zOx). Известно, что при введении неизвестных Декарт первой использовал букву z, затем y или x, поэтому уравнение параболы он записывал так: $z^2=x$ (z — абсцисса). С помощью параболы он описывал решения определенных уравнений. Так, например, при решении уравнения 4-й степени

$$z^4-pz^2+qz-r=0$$

с помощью подстановки $z^2=x$ Декарт получал квадратное уравнение с двумя неизвестными:

$$x^2+z^2-(p+1)x+qz-r=0,$$

иллюстрируемое окружностью, расположенной в одной плоскости с параболой $z^2=x$. Фактически, введя вторую неизвестную, Декарт «разбивал» уравнение на два уравнения, описывающих геометрическое место точек на координатной плоскости.

Декарт и Ферма часто пользовались в своих научных поисках параболой (и окружностью) для нахождения на плоскости корней уравнений высоких степеней, упрощая поиск введением вспомогательных кривых более низкого порядка.

График функции $y=x^3$, как известно, называется кубической параболой. Эту кривую французский математик, родоначальник начертательной геометрии Г. Монж (1746—1818) использовал для нахождения действительных корней кубических уравнений.

Ньютон называл все кривые, задаваемые уравнениями вида

$$y=ax+bx^2+cx^3+\ldots+px^n,$$

параболическими кривыми, хотя традиционно этим термином называют графики функций

$$y=cx^m,$$

где c — положительное действительное число; m — положительное рациональное число. Если $m<0$, то графики функций $y=cx^m$ называют гиперболическими кривыми.

Параболы широко используются в технике. Существуют специальные параболические антенны и зеркала. Кубическая парабола применяется, например, при конструировании железных дорог — как «вставка», смягчающая крутой поворот рельс от прямого участка к круговому участку пути.

Глава VI

Показательная функция

Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.

Л. Эйлер

§ 1. Показательная функция, ее свойства и график

Вспомним основные свойства степени с действительным показателем. Пусть $a>0$, $b>0$, x, x_1 и x_2 — любые действительные числа. Тогда

1. $a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$, 2. $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}$,
3. $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$, 4. $(ab)^x=a^xb^x$,
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$, 6. $a^x>0$,
7. $a^x>1$, если $a>1$ и $x>0$,
8. $a^{x_1}<a^{x_2}$, если $a>1$ и $x_1<x_2$,
9. $a^{x_1}>a^{x_2}$, если $0<a<1$ и $x_1<x_2$.

В практике часто используются функции вида $y=a^x$, где a — заданное положительное число, не равное 1, x — переменная. Аргументом такой функции является показатель степени.

Определение

Показательной функцией называется функция вида $y=a^x$, где a — заданное число, такое, что $a>0$, $a\neq 1$.

Показательная функция обладает следующими свойствами:

1) Область определения показательной функции — множество R всех действительных чисел.

○ Это свойство следует из того, что степень a^x, где $a>0$, определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$. ●

2) Множество значений показательной функции — множество всех положительных чисел.

○ Чтобы убедиться в этом, нужно показать, что уравнение $a^x=b$, где $a>0$, $a \neq 1$, не имеет корней, если $b \leqslant 0$, и имеет корень при любом $b>0$. По свойству 6 степени это уравнение не имеет корней, если $b \leqslant 0$. Утверждение, что уравнение $a^x=b$ имеет корень при любом $b>0$, доказывается в курсе высшей математики. Это означает, что любая прямая $y=b$, где $b>0$, пересекается с графиком показательной функции. ●

3) Показательная функция $y=a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если $a>1$, и убывающей, если $0<a<1$.

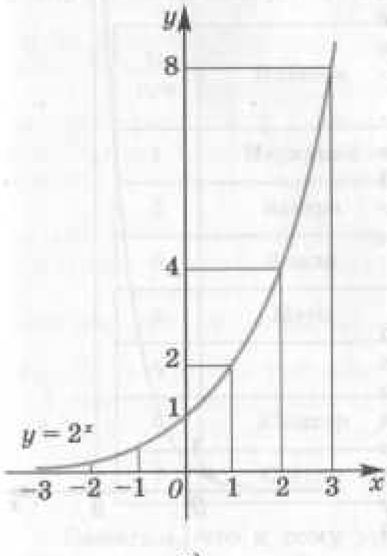
○ Это следует из свойств 8 и 9 степени. ●

4) Показательная функция является ограниченной снизу.

○ Это следует из свойства 6 степени. ●

Построим графики функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, использовав рассмотренные свойства показательной функции и построив несколько точек, принадлежащих графику (рис. 91).

Отметим, что график функции $y=2^x$ проходит через точку (0; 1) и расположен выше оси Ox. Если $x<0$ и $|x|$ увеличивается, то график приближается к оси Ox (но не пересекает ее).



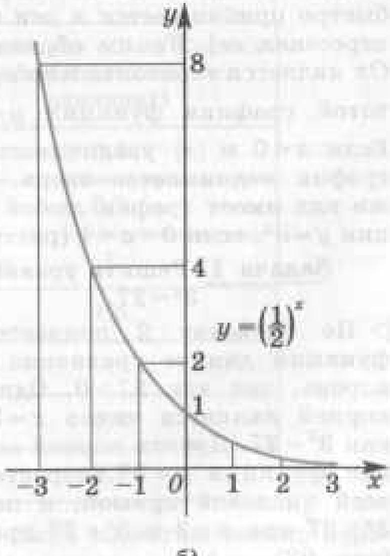


Рис. 91

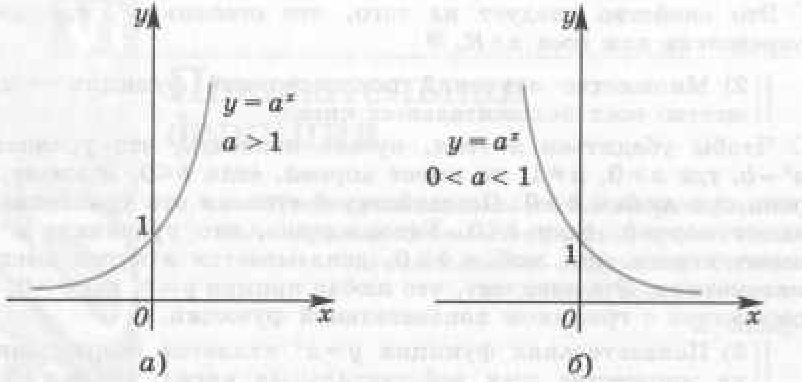


Рис. 92

Таким образом, ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции $y=2^x$. Если $x>0$ и увеличивается, то график быстро поднимается вверх. Такой же вид имеет график любой функции $y=a^x$, если $a>1$ (рис. 92, *а*).

График функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ также проходит через точку (0; 1) и расположен выше оси Ox. Если $x>0$ и увеличивается, то график быстро приближается к оси Ox (не пересекая ее). Таким образом, ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Если $x<0$ и $|x|$ увеличивается, то график поднимается вверх. Такой же вид имеет график любой функции $y=a^x$, если $0<a<1$ (рис. 92, *б*).

<u>Задача 1.</u> Решить уравнение

$$3^x=27.$$

▷ По свойству 2 показательной функции данное уравнение имеет корень, так как $27>0$. Одним из корней является число $x=3$, так как $3^3=27$. Других корней нет, так как функция $y=3^x$ возрастает на всей числовой прямой, и поэтому $3^x>27$ при $x>3$ и $3^x<27$ при $x<3$ (рис. 93).

Ответ. $x=3$. ◀

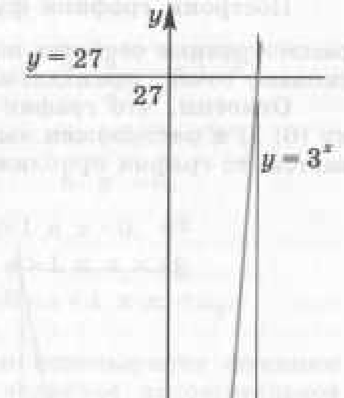


Рис. 93

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов. Так, радиоактивный распад вещества задается формулой $m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где $m(t)$ и m_0 — масса радиоактивного вещества соответственно в момент времени t и в начальный момент времени $t=0$; T — период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшается вдвое).

С помощью показательной функции выражается зависимость давления воздуха от высоты подъема, ток самоиндукции в катушке после включения постоянного напряжения и т. д.

Задача 2. Период полураспада плутония $T=140$ суткам. Какой станет масса m плутония через 10 лет, если его начальная масса $m_0=8$ г?

▷ В данной задаче $t=10\cdot 365$ (считаем, что в году 365 дней), $\frac{t}{T}=\frac{365}{14}$. Вычисления на микрокалькуляторе (по формуле радиоактивного распада) показывают, что $m=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{365}{14}}\approx 1{,}1345\cdot 10^{-7}$.

Ответ. Через 10 лет плутония останется примерно $1{,}13\cdot 10^{-7}$ г. ◀

Задача 3. В 1772 г. немецкий астроном И. Э. Боде (1747—1826) составил следующую таблицу:

№ п/п	Планета	Расстояние (L) до Солнца (в астрономических единицах)
1	Меркурий	0,4
2	Венера	0,7
3	Земля	1
4	Марс	1,5
5		
6	Юпитер	5,2
7	Сатурн	9,5

Заметим, что к тому времени были известны только перечисленные в таблице 6 планет. Боде оставил в таблице под номером 5 пустое место, так как полагал, что n-я по порядку планета находится на расстоянии $L=\frac{3\cdot 2^{n-2}+4}{10}$ астрономических единиц (а. е.) от Солнца и что 5-я планета еще не обнаружена.

1) Насколько точна формула Боде для перечисленных в таблице планет? 2) Существует ли планета между Марсом и Юпитером?

▷ 1) Для Меркурия $L=\frac{3\cdot 2^{1-2}+4}{10}=0{,}55$ (а. е.);

для Венеры $L=\frac{3\cdot 2^{2-2}+4}{10}=0{,}7$ (а. е.);

для Земли $L=\frac{3\cdot 2^{3-2}+4}{10}=1$ (а. е.);

для Марса $L=\frac{3\cdot 2^{4-2}+4}{10}=1{,}6$ (а. е.);

для неизвестной планеты $L=\frac{3\cdot 2^{5-2}+4}{10}=2{,}8$ (а. е.);

для Юпитера $L=\frac{3\cdot 2^{6-2}+4}{10}=5{,}2$ (а. е.);

для Сатурна $L=\frac{3\cdot 2^{7-2}+4}{10}=10$ (а. е.).

Вывод: формула достаточно точна, особенно для Венеры, Земли и Юпитера.

2) Между Марсом и Юпитером, как известно, планеты не существует, однако на предполагаемом Боде месте неизвестной планеты впоследствии был обнаружен пояс астероидов. ◀

Приведем еще примеры явлений, протекающих по законам показательной функции (*экспоненты*).

1) Количество бактерий N в определенной среде за время t вычисляется по формуле $N=N_0a^{kt}$, где N_0 — начальное количество бактерий, a и k — некоторые постоянные.

2) Изменение атмосферного давления p в зависимости от высоты h над уровнем моря описывается формулой $p=p_0a^h$, где p_0 — атмосферное давление над уровнем моря, a — некоторая постоянная.

3) При создании вакуума конечное давление p в определенной емкости связано с начальным давлением p_0 формулой $p=\left(\frac{V}{V+q}\right)^{\frac{nt}{3}}\cdot p_0$, где V — объем газа, подлежащий откачиванию; q — объем газа, откачиваемый за один шаг насоса; n — количество шагов поршня насоса за единицу вакуумирования; t — время вакуумирования.

Упражнения

1. Построить график функции:

1) $y=3^x$; 2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2. С помощью графика функции $y=3^x$, найти приближенное значение:

1) $\sqrt{3}$; 2) $3^{\frac{2}{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3^{-1,5}$.

3. Изобразить схематически график функции:

1) $y=0,4^x$; 2) $y=(\sqrt{2})^x$; 3) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; 4) $y=(\sqrt{3})^x$.

4. (Устно.) Используя свойство возрастания (или убывания) показательной функции, сравнить числа:

1) $1,7^3$ и 1; 2) $0,3^2$ и 1; 3) $3,2^{1,5}$ и $3,2^{1,6}$;

4) $0,2^{-3}$ и $0,2^{-2}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$; 6) 3^{π} и $3^{3,14}$.

5. Сравнить с единицей число:

1) $(0,1)^{\sqrt{2}}$; 2) $(3,5)^{0,1}$; 3) $\pi^{-2,7}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}$.

6. Найти абсциссу точки пересечения графиков функций:

1) $y=2^x$ и $y=8$; 2) $y=3^x$ и $y=\frac{1}{3}$;

3) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y=\frac{1}{16}$; 4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=9$.

7. (Устно.) Решить уравнение:

1) $5^x=\frac{1}{5}$; 2) $7^x=49$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt{3}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x=\sqrt[3]{7}$.

8. (Устно.) Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y=0,3^{-x}$; 2) $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{-x}$; 3) $y=1,3^{-2x}$; 4) $y=0,7^{-3x}$.

9. Решить графически неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x>1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$; 3) $5^x>5$; 4) $5^x>\frac{1}{5}$; 5) $3^x\geqslant-1$;
6) $6^x<-2$.

---

10. Построить график функции:

1) $y=3^x-2$; 2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$; 3) $y=2^{x+1}$; 4) $y=3^{x-2}$.

11. Найти область определения функции:

1) $y=5^{\frac{1}{x}}$; 2) $y=7^{\sqrt{x-1}}$; 3) $y=0,4^{\frac{1}{x-9}}$; 4) $y=0,8^{\frac{1}{|x|-2}}$.

12. Доказать, что графики функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2^x$ на отрезке $[-1; 2]$.

<u>14.</u> Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y=2^{|x|}$ на отрезке $[-1; 1]$;

2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ на отрезке $[-2; 1]$.

15. Построить график функции:

1) $y=2^{|x|}$; 2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$; 3) $y=|3^x-2|$; 4) $y=2-3^x$.

16. Световой фильтр толщиной 1 см пропускает 75% света. Какая часть света пройдет через фильтр, сделанный из того же стекла, имеющего толщину m см?

17. При радиоактивном распаде количество некоторого вещества уменьшается вдвое за сутки. Сколько вещества останется от 250 г через 1,5 суток? через 3,5 суток? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

18. На некотором лесном участке можно заготовить $4\cdot10^5$ м^3 древесины. Ежегодный прирост деревьев равен 4%. Сколько можно заготовить древесины на этом участке через 5 лет? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

19. Население Земли в 2000 году составляло 6 млрд человек. Можно считать, что оно удваивается каждые 35 лет. Записать формулу для подсчета населения нашей планеты P (в млрд человек) в условном x-м году. Вычислить население Земли к 2020 г.

20. Проверить, насколько точна формула Боде для Урана, Нептуна и Плутона, находящихся от Солнца на расстояниях 19,2; 30,0; 39,5 астрономических единиц соответственно.

§ 2. Показательные уравнения

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, т. е. уравнений, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x=a^b$, где $a>0$, $a\neq1$, x — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени, состоящего в том, что степени с одинаковым основанием $a>0$, $a\neq1$ равны тогда и только тогда, когда равны их показатели (см. гл. IV).

Задача 1. Решить уравнение $4\cdot2^x=1$.

▷ Запишем уравнение в виде $2^{x+2}=2^0$, откуда $x+2=0$.

Ответ. $x=-2$. ◁

Задача 2. Решить уравнение $2^{3x}\cdot3^x=576$.

▷ Так как $2^{3x}=(2^3)^x=8^x$, $576=24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x\cdot3^x=24^2$, откуда $24^x=24^2$, $x=2$. ◁

Задача 3. Решить уравнение $3^{x+1}-2\cdot3^{x-2}=25$.

▷ Вынося в левой части за скобки общий множитель 3^{x-2}, получаем $3^{x-2}\cdot(3^3-2)=25$, $3^{x-2}\cdot25=25$, откуда $3^{x-2}=1$, $x-2=0$, $x=2$. ◁

Задача 4. Решить уравнение $3^x=7^x$.

▷ Так как $7^x\neq0$, то уравнение можно записать в виде $\frac{3^x}{7^x}=1$, откуда $\left(\frac{3}{7}\right)^x=1$, $x=0$. ◁

Задача 5. Решить уравнение $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.

▷ Запишем уравнение в виде $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$, откуда $2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$, $2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$. ◀

Задача 6. Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

▷ Заменой $3^x = t$ данное уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 - 4t - 45 = 0$. Решая это уравнение, находим его корни: $t_1 = 9$, $t_2 = -5$, откуда $3^x = 9$, $3^x = -5$. Уравнение $3^x = 9$ имеет корень $x = 2$, а уравнение $3^x = -5$ не имеет корней, так как $3^x > 0$. Ответ. $x = 2$. ◀

Задача 7. Решить уравнение $5^x + 5^{2-x} - 26 = 0$.

▷ Заменив в данном уравнении 5^x на t, имеем уравнение $t + \frac{25}{t} - 26 = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $t^2 - 26t + {}$ $+ 25 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = 25$. Возвращаясь к исходному обозначению, получаем $5^x = 1$ и $5^x = 25$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. ◀

Задача 8. Решить уравнение $3^{|2x-1|} = 3^{|5x+2|}$.

▷ Так как $3 > 0$, $3 \neq 1$, то исходное уравнение равносильно уравнению $|2x - 1| = |5x + 2|$. Обе части полученного уравнения неотрицательны, поэтому после возведения обеих его частей в квадрат получаем равносильное ему уравнение $(2x - 1)^2 = (5x + 2)^2$, откуда $21x^2 + 24x + 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{7}$. ◀

Задача 9. Решить уравнение $\sqrt[x]{3} \cdot \sqrt[x]{5} = 225$.

▷ Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (3 \cdot 5)^{\frac{1}{x}} = 225, \\ x \in N,\ x > 1. \end{cases}$$

Преобразовав уравнение системы к виду $15^{\frac{1}{x}} = 15^2$, имеем $\frac{1}{x} = 2$, откуда $x = \frac{1}{2}$. Но $x = \frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $x > 1$, $x \in N$, т. е. уравнение не имеет корней. ◀

Задача 10. Решить уравнение $(x - 3)^{3x^2 - 10x + 3} = 1$.

▷ Так как неизвестное x содержится и в основании, и в показателе степени, то необходимо рассмотреть три случая:

1) $x - 3 = 1$, откуда $x = 4$;

2) $\begin{cases} x - 3 = -1, \\ 3x^2 - 10x + 3 = 2n,\ n \in N. \end{cases}$

Корень первого уравнения $x = 2$ не обращает выражение $3x^2 - 10x + 3$ в четное число, значит, система не имеет решений.

3) $\begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0, \\ x - 3 \neq 0. \end{cases}$

Этой системе удовлетворяет значение $x = \frac{1}{3}$.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 4$. ◀

Задача 11. При каких значениях a уравнение $(a-1)3^{2x}-$ $-(2a-1)\cdot 3^x-1=0$ имеет два различных корня?

▷ Относительно $t=3^x>0$ исходное уравнение примет вид

$$(a-1)t^2-(2a-1)t-1=0. \qquad (1)$$

Исходное уравнение имеет два различных действительных корня тогда и только тогда, когда уравнение (1) имеет два положительных корня.

При $a=1$ уравнение (1) — линейное и имеет один корень ($t=-1$). При $a\neq 1$ квадратное уравнение (1) имеет два различных положительных корня, если

$$\begin{cases} D>0, \\ -\dfrac{1}{a-1}>0, \\ \dfrac{2a-1}{a-1}>0, \end{cases} \qquad (2)$$

где D — дискриминант уравнения (1), равный $(2a-1)^2-$ $-4(a-1)\cdot(-1)$; $D=4a^2-4a+1+4a-4=4a^2-3>0$ при $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Два последних неравенства системы (2) одновременно выполняются при $a<\frac{1}{2}$. Таким образом, решение системы (2) совпадает с решением системы $\begin{cases} a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a<\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ. При $a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ◀

Упражнения

Решить уравнение (21—41).

21. 1) $4^{x-1}=1$; 2) $0{,}3^{3x-2}=1$; 3) $2^{2x}=2^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

22. 1) $27^x=\frac{1}{3}$; 2) $400^x=\frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$.

23. 1) $3\cdot 9^x=81$; 2) $2\cdot 4^x=64$;

3) $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$; 4) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$;

5) $0{,}6^x\cdot 0{,}6^3=\dfrac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$; 6) $6^{3x}\cdot\frac{1}{6}=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$.

24. 1) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$; 2) $2^{3x+2}-2^{3x-2}=30$;

3) $2^{x+1}+2^{x-1}+2^x=28$; 4) $3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=63$.

25. 1) $5^x=8^x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3^x=5^{2x}$; 4) $4^x=3^{\frac{x}{2}}$.

26. 1) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$; 2) $16^x-17\cdot 4^x+16=0$;

3) $25^x-6\cdot 5^x+5=0$; 4) $64^x-8^x-56=0$.

27. 1) $3^x+3^{3-x}-12=0$; 2) $2^{x+2}-2^{2-x}=15$.

28. 1) $3^{x^2+x-12}=1$; 2) $2^{x^2-7x+10}=1$; 3) $2^{\frac{x-1}{x-2}}=4$; 4) $0{,}5^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{1}{x+1}}$.

29. 1) $0{,}3^{x^3-x^2+x-1}=1$; 2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}=1$;

3) $5{,}1^{\frac{1}{2}(x-3)}=5{,}1\sqrt{5{,}1}$; 4) $2^{2x^2+5x-4}=0{,}5$.

30. 1) $10^x=\sqrt[3]{100}$; 2) $10^x=\sqrt[5]{10\,000}$; 3) $225^{2x^2-24}=15$;

4) $10^x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{10\,000}}$; 5) $(\sqrt{10})^x=10^{x^2-x}$; 6) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

---

31. 1) $2^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}x}=\sqrt[4]{8}$; 2) $5^{0,1x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06}=5^{x^2}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; 4) $0{,}7^{\sqrt{x+12}}\cdot 0{,}7^{-2}=0{,}7^{\sqrt{x}}$.

32. 1) $7^x-7^{x-1}=6$; 2) $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=315$;

3) $5^{3x}+3\cdot 5^{3x-2}=140$; 4) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^x+6=0$.

33. 1) $7^{x-2}=3^{2-x}$; 2) $2^{x-3}=3^{3-x}$;

3) $3^{\frac{x+2}{4}}=5^{x+2}$; 4) $4^{\frac{x-3}{2}}=3^{2(x-3)}$.

34. 1) $(0{,}5)^{x^2-4x+3}=(0{,}5)^{2x^2+x+3}$; 2) $(0{,}1)^{3+2x}=(0{,}1)^{2-x^2}$;

3) $3^{\sqrt{x-6}}=3^x$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2-x}}$.

35. 1) $3^{x+3}+3^x=7^{x+1}+5\cdot 7^x$;

2) $3^{x+4}+3\cdot 5^{x+3}=5^{x+4}+3^{x+3}$;

3) $2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot 11$;

4) $2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot 3^{x-3}$.

36. 1) $8\cdot 4^x-6\cdot 2^x+1=0$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$;

3) $13^{2x+1}-13^x-12=0$; 4) $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0$;

5) $2^{3x}+8\cdot 2^x-6\cdot 2^{2x}=0$; 6) $5^{3x+1}+34\cdot 5^{2x}-7\cdot 5^x=0$.

37. 1) $3^{2x+6}=2^{x+3}$; 2) $5^{x-2}=4^{2x-4}$; 3) $2^x\cdot 3^x=36^{x^2}$; 4) $9^{-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{27}$.

38. 1) $4\cdot 9^x-13\cdot 6^x+9\cdot 4^x=0$; 2) $16\cdot 9^x-25\cdot 12^x+9\cdot 16^x=0$.

39. 1) $2^{|x-2|}=2^{|x+4|}$; 2) $1{,}5^{|5-x|}=1{,}5^{|x-1|}$;

3) $3^{|x+1|}=3^{2-|x|}$; 4) $3^{|x|}=3^{|2-x|-1}$.

40. 1) $\sqrt[x]{2}\cdot\sqrt[2x]{3}=12$; 2) $\sqrt[x]{5}\cdot 5^x=25$.

41. 1) $(x-3)^{x^2-x-2}=1$; 2) $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$;

3) $(x+3)^{x^2-4}=(x+3)^{-3x}$; 4) $(x+3)^{x^2-3}=(x+3)^{2x}$.

42. При каких значениях k уравнение $(k-1)4^x-4\cdot 2^x+(k+2)=0$ имеет хотя бы один корень?

43. При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1}, 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии 6,5; 3,25; 1,625; ... ?

44. Доказать, что уравнение: 1) $4^x+25^x=29$; 2) $7^x+18^x=25$ имеет только один корень $x=1$.

§ 3. Показательные неравенства

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенства $a^x>a^b$ или $a^x<a^b$.

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Задача 1. Решить неравенство $3^x<81$.

▷ Запишем неравенство в виде $3^x<3^4$. Так как $3>1$, то функция $y=3^x$ является возрастающей. Поэтому решениями неравенства являются числа $x<4$. ◀

Задача 2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\sqrt{8}$.

▷ Запишем неравенство в виде $\left(\frac{1}{2}\right)^x>2^{\frac{3}{2}}$, или $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

Так как $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывающая функция, то $x<-\frac{3}{2}$. ◀

Задача 3. Решить неравенство $3^{x^2-x}<9$.

▷ Запишем неравенство в виде $3^{x^2-x}<3^2$. Так как $3>1$, то $x^2-x<2$, откуда $x^2-x-2<0$, $-1<x<2$. ◀

Задача 4. Решить неравенство $16^x+4^x-2>0$.

▷ Обозначим $4^x=t$, тогда получим квадратное неравенство $t^2+t-2>0$. Представим его в виде

$$(t-1)(t+2)>0. \qquad (1)$$

Так как $t=4^x>0$, то $t+2>0$. Поделив обе части неравенства (1) на $t+2$, получим равносильное ему неравенство $t-1>0$, откуда $t>1$. Возвращаясь к исходному обозначению, получим неравенство $4^x>1$, которое можно записать в виде $4^x>4^0$, откуда $x>0$. ◀

Задача 5. Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x-\frac{2}{3}$.

▷ Построим графики функций $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=x-\frac{2}{3}$ (рис. 94).

Из рисунка видно, что они пересекаются в точке с абсциссой $x \approx 1$. Проверка показывает, что $x=1$ — корень данного уравнения: $\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$ и $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

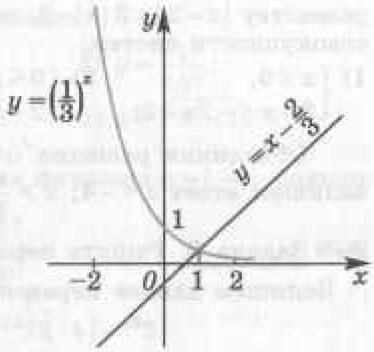


Рис. 94

Покажем, что других корней нет. Функция $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывающая, а функция $y=x-\frac{2}{3}$ возрастающая. Следовательно, при $x>1$ значения первой функции меньше $\frac{1}{3}$, а второй больше $\frac{1}{3}$; при $x<1$, наоборот, значения первой функции больше $\frac{1}{3}$, а второй меньше $\frac{1}{3}$. Геометрически (см. рис. 94) это означает, что графики этих функций при $x>1$ и $x<1$ «расходятся» и потому не могут иметь точек пересечения при $x \neq 1$.

Ответ. $x=1$. ◄

Заметим, что из решения этой задачи, в частности, следует, что неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x>x-\frac{2}{3}$ выполняется при $x<1$, а неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x<x-\frac{2}{3}$ — при $x>1$.

Задача 6. Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2-x}}>\left(\frac{2}{5}\right)^x$.

▷ Так как $0<\frac{2}{5}<1$, то данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2-x}<x$, область определения которого — промежуток $x \leqslant 2$. При $x \leqslant 0$ оно не имеет решений, так как $\sqrt{2-x} \geqslant 0$. Итак, решения неравенства содержатся в промежутке $0<x \leqslant 2$.

Возводя неравенство $\sqrt{2-x}<x$ с обеими положительными частями в квадрат, получаем $2-x<x^2$, $x^2+x-2>0$, откуда $x<-2$ или $x>1$ (рис. 95).

Рис. 95

Ответ. $1<x \leqslant 2$. ◄

Задача 7. Решить неравенство $5^{-|x-2|}>\left(\frac{1}{25}\right)^{|x|-1}$.

▷ Перепишем данное неравенство в виде $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x-2|}>\left(\frac{1}{5}\right)^{2|x|-2}$. Так как $0<\frac{1}{5}<1$, то полученное неравенство равносильно неравенству $|x-2|<2|x|-2$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности систем:

1) $\begin{cases} x<0, \\ 2-x<-2x-2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0\leqslant x<2, \\ 2-x<2x-2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x-2<2x-2. \end{cases}$

Объединив решения полученных трех систем неравенств, запишем ответ $x<-4$; $x>\frac{4}{3}$. ◄

Задача 8. Решить неравенство $4^x\leqslant 3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}+4^{1+\sqrt{x}}$.

▷ Запишем данное неравенство в виде

$$2^{2x}-\left(4\cdot 2^{x+\sqrt{x}}-2^{x+\sqrt{x}}\right)-2^{2+2\sqrt{x}}\leqslant 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства, разложив ее на множители способом группировки: $\left(2^x-2^{2+\sqrt{x}}\right)\left(2^x+2^{\sqrt{x}}\right)\leqslant 0$. Второй множитель в левой части неравенства положителен при всех $x\geqslant 0$ (т. е. на области определения неравенства). Поэтому последнее неравенство равносильно неравенству $2^x-2^{2+\sqrt{x}}\leqslant 0$, решая которое получаем $0\leqslant x\leqslant 4$. ◄

Упражнения

Решить неравенство (45—46).

45. 1) $3^x>9$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\frac{1}{4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x<2$;

4) $4^x<\frac{1}{2}$; 5) $2^{3x}\geqslant\frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}\leqslant\frac{1}{9}$.

46. 1) $5^{x-1}\leqslant\sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}}>9$; 3) $3^{x^2-4}\geqslant 1$; 4) $5^{2x^2-18}<1$.

47. Решить графически уравнение:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x-\frac{1}{2}$;

3) $2^x=-x-\frac{7}{4}$; 4) $3^x=11-x$.

Решить неравенство (48—49).

48. 1) $2^{-x^2+3x}<4$; 2) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x}\geqslant\frac{9}{7}$;

3) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x}<\frac{121}{169}$; 4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x}\leqslant 7\frac{1}{9}$.

49. 1) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$; 2) $2^{x-1}+2^{x+3}>17$;

3) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}\geqslant 448$; 4) $5^{3x+1}-5^{3x-3}\leqslant 624$.

50. Найти целые решения неравенства на отрезке $[-3;\ 3]$:

1) $9^x-3^x-6>0$; 2) $4^x-2^x<12$;

3) $5^{2x+1}+4\cdot 5^x-1>0$; 4) $3\cdot 9^x+11\cdot 3^x<4$.

51. Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{6^x}$; 2) $y=\sqrt[3]{-5^x}$; 3) $y=\frac{1}{10^x}$;

4) $y=\frac{1}{2^x-1}$; 5) $y=\sqrt{25^x-5^x}$; 6) $y=\sqrt{4^x-1}$.

52. При каких значениях x значения функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ больше значений функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+12$?

53. Решить графически неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant x+1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < x-\frac{1}{2}$;

3) $2^x < 9-\frac{1}{3}x$; 4) $3^x > -\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

54. Решить графически уравнение:

1) $2^x=3-2x-x^2$; 2) $3^{-x}=\sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=-\frac{3}{x}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x^3-1$.

Решить неравенство (55—58).

55. 1) $11^{\sqrt{x+6}} > 11^x$; 2) $0{,}3^{\sqrt{30-x}} > 0{,}3^x$.

56. 1) $0{,}4^x-2{,}5^{x+1} > 1{,}5$; 2) $25\cdot 0{,}04^{2x} > 0{,}2^{x(3-x)}$;

3) $\frac{4^x}{4^x-3^x} < 4$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-32\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} < 0$.

57. $(2{,}5)^{(x+1)^2}\cdot(0{,}4)^{4|x-1|} \geqslant \left(\frac{25}{4}\right)^{6{,}5}$.

58. $(x^2-x+1)^{x^2-\frac{5}{2}x+1} < 1$.

§ 4. Системы показательных уравнений и неравенств

Рассмотрим несколько примеров решения систем показательных уравнений и неравенств.

Задача 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+2y=-1, \\ 4^{x+y^2}=16. \end{cases}$

▷ Решим эту систему способом подстановки: $x=-2y-1$, $4^{-2y-1+y^2}=4^2$, откуда $-2y-1+y^2=2$, $y^2-2y-3=0$, $y_1=3$, $y_2=-1$. Тогда $x_1=-2\cdot 3-1=-7$, $x_2=-2\cdot(-1)-1=1$.

Ответ. $(-7;\ 3)$, $(1;\ -1)$. ◀

Задача 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3^{y+1}-2^x=5, \\ 4^x-6\cdot 3^y+2=0. \end{cases}$

▷ Обозначим $2^x=u$, $3^y=v$. Тогда система запишется так:

$$\begin{cases} 3v-u=5, \\ u^2-6v+2=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решим эту систему способом подстановки:

$$u=3v-5,\ (3v-5)^2-6v+2=0,$$
$$9v^2-36v+27=0,\ v^2-4v+3=0,\ v_1=1,\ v_2=3.$$

Тогда $u_1=-2$, $u_2=4$. Так как $u=2^x>0$, то решением системы (1) является пара чисел $u=4$, $v=3$. Возвратимся к исходным обозначениям: $2^x=4$, $3^y=3$, откуда $x=2$, $y=1$. ◄

Задача 3. Решить систему уравнений $\begin{cases}2^x\cdot 9^y=162,\\ 3^x\cdot 4^y=48.\end{cases}$

▷ Перемножив уравнения данной системы, получим

$$6^x\cdot 36^y=3^4\cdot 2\cdot 6\cdot 2^3,\text{ или } 6^{x+2y}=6^5,\text{ откуда } x=5-2y.$$

Тогда второе уравнение системы примет вид $3^{5-2y}4^y=48$, или $\left(\frac{4}{9}\right)^y=\frac{48}{3^5}=\left(\frac{4}{9}\right)^2$, откуда $y=2$, $x=1$.

Ответ. (1; 2). ◄

Задача 4. Решить систему $\begin{cases}3^{x-1}\leqslant\sqrt{3}, & (2)\\ (0,2)^{3x^2-2}=(0,2)^{2x^2-x+4}. & (3)\end{cases}$

▷ Решая неравенство (2), т. е. неравенство $3^{x-1}\leqslant 3^{\frac{1}{2}}$, получаем $x-1\leqslant\frac{1}{2}$, $x\leqslant 1,5$. Уравнение (3) равносильно уравнению $3x^2-2=2x^2-x+4$. Это уравнение имеет корни $x_1=2$, $x_2=-3$, из которых условию $x\leqslant 1,5$ удовлетворяет лишь $x=-3$. ◄

Замечание. При решении системы, в которую входит как уравнение, так и неравенство, чаще (в отличие от рассмотренного примера) поступают следующим образом: находят корни уравнения и отбирают из них те, которые удовлетворяют неравенству системы.

Задача 5. Решить систему $\begin{cases}5^{x-1}<3,\\ 2,5^{x^2+3}=0,4^{-4x}.\end{cases}$

▷ Уравнение системы запишем в виде $\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2+3}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-4x}$, т. е. $\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2+3}=\left(\frac{5}{2}\right)^{4x}$, откуда $x^2+3=4x$. Корнями этого уравнения являются числа 1 и 3. Подстановка $x=1$ и $x=3$ в неравенство исходной системы показывает, что решением системы является только $x=1$. ◄

Задача 6. Решить систему $\begin{cases}3^{xy}=3^{10},\\ 4^x=4^{7-y},\\ 2^x<2^y.\end{cases}$

▷ Решим сначала систему уравнений $\begin{cases}3^{xy}=3^{10},\\ 4^x=4^{7-y}.\end{cases}$ (4)

Эта система равносильна следующим системам:

$$\begin{cases} xy=10, \\ x=7-y, \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=10, \\ x+y=7. \end{cases}$$

Находим два решения системы: (2; 5), (5; 2). Неравенству $2^x<2^y$ удовлетворяет только первое решение системы (4), т. е. (2; 5). ◄

Упражнения

Решить систему уравнений (59—63).

59. 1) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 5^{x+y}=25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ 3^{x^2+y}=\frac{1}{9}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=1, \\ 2^{x-y}=8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3^{x-y}=81. \end{cases}$

60. 1) $\begin{cases} 4^x\cdot 2^y=32, \\ 3^{8x+1}=3^{3y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{3x-2y}=81, \\ 3^{6x}\cdot 3^y=27. \end{cases}$

61. 1) $\begin{cases} 2^x+2^y=6, \\ 2^x-2^y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x+5^y=8, \\ 3^x-5^y=-2. \end{cases}$

62. 1) $\begin{cases} 5^x-5^y=100, \\ 5^{x-1}+5^{y-1}=30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x-9\cdot 3^y=7, \\ 2^x\cdot 3^y=\frac{8}{9}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 16^y-16^x=24, \\ 16^{x+y}=256; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^x+2^{x+y+1}=5, \\ 3^{x+1}-2^{x+y}=1. \end{cases}$

63. 1) $\begin{cases} 5^{x+1}\cdot 3^y=75, \\ 3^x\cdot 5^{y-1}=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=4, \\ 3^y\cdot 2^x=9. \end{cases}$

Решить систему (64—66).

64. 1) $\begin{cases} 5^{2x+1}>625, \\ 11^{6x^2-10x}=11^{9x-15}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0{,}3^{10x^2-47x}=0{,}3^{-10x-7}, \\ 3{,}7^{x^2}<3{,}7^4. \end{cases}$

65. 1) $\begin{cases} 2^{x+1}>1, \\ 0{,}6^{x^2-2}=\left(1\frac{2}{3}\right)^x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 10^{5x}=0{,}1^{2x^2-3}, \\ 3^{4x-1}<1. \end{cases}$

66. 1) $\begin{cases} (5^x)^y=5^{21}, \\ 5^x\cdot 5^y=5^{10}, \\ 3^x>3^y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (0{,}2^y)^x=0{,}008, \\ (0{,}4)^y=0{,}4^{3,5-x}, \\ 2^x\cdot 0{,}5^y<1. \end{cases}$

67. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Упражнения к главе VI

68. Сравнить числа:

1) $4^{-\sqrt{3}}$ и $4^{-\sqrt{2}}$; 2) $2^{\sqrt{3}}$ и $2^{1,7}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$.

69. Сравнить с единицей число:

1) $2^{-\sqrt{5}}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

70. (Устно.) Установить, является ли функция возрастающей или убывающей:

1) $y=0,78^x$; 2) $y=1,69^x$; 3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$; 4) $y=4^{-x}$.

71. Выяснить, в каком промежутке находятся значения функции при $x\in[-1;\ 2]$:

1) $y=5^x$; 2) $y=5^{-x}$.

Решить уравнение (72—74).

72. 1) $1,5^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$; 2) $0,75^{2x-3}=\left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$;

3) $5^{x^2-5x-6}=1$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-2}=\frac{1}{7}$.

73. 1) $2^x+2^{x-3}=18$; 2) $3^x+4\cdot 3^{x+1}=13$;

3) $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$;

4) $5^{x+1}+3\cdot 5^{x-1}-6\cdot 5^x+10=0$.

74. 1) $5^{2x}-5^x-600=0$; 2) $9^x-3^x-6=0$;

3) $3^x+9^{x-1}-810=0$; 4) $4^x+2^{x+1}-80=0$.

75. Решить неравенство:

1) $3^{x-2}>9$; 2) $5^{2x}<\frac{1}{25}$; 3) $0,7^{x^2+2x}<0,7^3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}>\frac{1}{81}$.

76. Решить графически уравнение:

1) $2^{-x}=3x+10$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=2x+5$.

---

77. Выяснить, являются ли равносильными уравнения:

1) $5^x=3^x$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^x$; 2) $7^x=1$ и $x^2=0$;

3) $4^x=2$ и $x^2=\frac{1}{4}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$ и $\sqrt[x]{\frac{1}{4}}=16$.

78. Доказать, что последовательность значений функции $y=2^x$ при натуральных значениях $x=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ является геометрической прогрессией.

79. За первый год работы предприятие имело a рублей прибыли. В дальнейшем каждый год прибыль увеличивалась на $p\%$. Какой станет прибыль предприятия за n-й год работы?

80. Построить график функции:

1) $y=3^x-1$; 2) $y=3^{x-1}$; 3) $y=2^{2-x}+3$.

Решить уравнение (81—83).

81. 1) $0{,}6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$; 2) $16\sqrt{0{,}25^{5-\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$.

82. 1) $2\cdot3^{3x-1}+27^{x-\frac{2}{3}}=9^{x-1}+2\cdot3^{2x-1}$;

2) $2^{\sqrt{x}+2}-2^{\sqrt{x}+1}=12+2^{\sqrt{x}-1}$;

3) $22\cdot9^{x-1}-\frac{1}{3}\cdot3^{x+3}+\frac{1}{3}\cdot3^{x+2}=4$;

4) $5\cdot4^{x-1}-16^x+0{,}25\cdot2^{2x+2}+7=0$.

83. 1) $2^{x+4}+2^{x+2}=5^{x+1}+3\cdot5^x$;

2) $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot17+7^x\cdot17=0$;

3) $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$;

4) $3\cdot4^x+\frac{1}{3}\cdot9^{x+2}=6\cdot4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot9^{x+1}$.

84. Решить неравенство:

1) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+1}}<1$; 2) $2^{x^2}\cdot5^{x^2}<10^{-3}(10^{3-x})^2$;

3) $\frac{4^x-2^{x+1}+8}{2^{1-x}}<8^x$; 4) $\frac{1}{3^x+5}\leqslant\frac{1}{3^{x+1}-1}$.

85. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}2^{x-y}=128,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2y+1}=\frac{1}{8};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^x\cdot5^y=10,\\ 5^y-2^x=3.\end{cases}$

86. Выяснить, равносильны ли неравенства:

1) $2^x>-2$ и $2^{2x}>4$; 2) $2^x<\sqrt{x+1}$ и $2^{2x}<x+1$;

3) $2^x>\sqrt{x+1}$ и $2^{2x}>x+1$.

87. Построить график функции:

1) $y=2^{x+|x|}$; 2) $y=|3^{|x|}-3|$.

88. Решить уравнение:

1) $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}}=5\cdot0{,}04^x$; 2) $4\cdot3^x-9\cdot2^x=5\cdot3^{\frac{x}{2}}\cdot2^{\frac{x}{2}}$;

3) $2\cdot4^x-3\cdot10^x-5\cdot25^x=0$; 4) $4\cdot9^x+12^x-3\cdot16^x=0$.

89. Решить неравенство:

1) $3^{|x-2|}<9$; 2) $4^{|x+1|}>16$; 3) $2^{|x-2|}>4^{|x+1|}$; 4) $5^{|x+4|}<25^{|x|}$.

90. Решить уравнение $3^x+4^x=\left(\frac{1}{5}\right)^x+\left(\frac{1}{6}\right)^x$.

91. Найти все значения b, при которых уравнение

$$4^x-(5b-3)\cdot 2^x+4b^2-3b=0$$

имеет единственный корень.

92. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4.$$

93. Решить уравнение $2^{|x+1|}-|2^x-1|=1+2^x$.

Вопросы к главе VI

1. Какого вида функцию называют показательной?
2. Является ли показательной функция $y=2^{2x}$, $y=x^x$, $y=1^x$?
3. Перечислить свойства показательной функции.
4. Привести пример реального явления (процесса), которое можно описать показательной функцией.
5. Какие уравнения называют показательными?
6. На основании какого свойства степени решается уравнение $7^x=7^{2,5}$?
7. На основании какого свойства показательной функции решается неравенство $0{,}4^x>0{,}4^5$?
8. На основании какого свойства показательной функции можно утверждать, что $0{,}5^x>0$?
9. Что понимается под заданием: 1) решить систему уравнений с двумя неизвестными; 2) решить систему неравенств с двумя неизвестными?
10. Какие системы уравнений (неравенств) называются равносильными?
11. Можно ли в системе из двух уравнений одно из них заменить: 1) их почленной суммой; 2) их почленной разностью; 3) их почленным произведением? (Получится ли при этих операциях система, равносильная исходной?)
12. Через какую точку координатной плоскости проходит график любой показательной функции?
13. Имеет ли функция $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ наименьшее значение? Почему?
14. Имеет ли функция $y=1{,}2^x$ наибольшее значение? Почему?
15. Получится ли уравнение, равносильное данному, если обе его части разделить на 17^x?
16. Обосновать, почему уравнение $a^x=5$ ($a>0$, $a\neq 1$) имеет единственный корень.
17. Можно ли в системе двух неравенств одинакового смысла одно из неравенств заменить: 1) их почленной суммой; 2) почленным произведением левых и правых частей имеющихся неравенств?

Проверь себя!

1. Построить схематически график функции:

   1) $y=\left(\frac{3}{5}\right)^x$; 2) $y=6^x$.

2. Сравнить числа:

   1) $\left(\frac{1}{6}\right)^{0,2}$ и $\left(\frac{1}{6}\right)^{1,2}$; 2) $8^{-0,2}$ и $8^{-1,2}$.

3. Решить уравнение:

   1) $4^{x+1}=64^{x-1}$; 2) $0,7^{x^2+4x-5}=1$;

   3) $2^{x+3}-2^{x+1}=12$; 4) $4\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+1=0$.

4. Решить неравенство:

   1) $6^{x-2}>36$; 2) $0,5^{x^2-2}\geqslant\frac{1}{4}$.

---

1. Построить схематически график функции $y=3^{|x|}+1$.
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ на отрезке $[-2; 0]$.
3. Решить уравнение:

   1) $5^{|x-1|}=0,2^{|x+3|}$; 2) $3^{x^2}\cdot 5^{x^2}=225^x$; 3) $4^{x-4}=6^{4-x}$;

   4) $3^{3x+1}-10\cdot 9^{x+1}+9^{x+2}=0$.
4. Решить неравенство $0,8^{\sqrt{4x-3}}>0,8^x$.
5. Решить систему $\begin{cases}5^x\cdot 2^y=20,\\ 5^y\cdot 2^x=50,\\ 10^{x-y}<2.\end{cases}$

Историческая справка

Впервые использование неизвестного числа в показателе степени можно найти в переписке немецкого физика, математика и философа Г. Лейбница (1646—1716) и голландского ученого Х. Гюйгенса (1629—1695), которая состоялась в 1679 г.

В XVII в. европейские математики еще не имели строгой теории действительных чисел, поэтому могли изучать лишь отдельные свойства показательной функции. Только в XIX в., когда с помощью теории пределов удалось ввести понятие степени с действительным показателем, возможным стало и строгое обоснование всех свойств показательной функции.

Глава VII

Логарифмическая функция

Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь.

П. С. Лаплас

§ 1. Логарифмы

Задача 1. Решить уравнение $2^x=16$.

▷ Запишем данное уравнение так: $2^x=2^4$, откуда $x=4$. ◀

Способ решения задачи 1 состоял в том, что левую и правую части уравнения удалось представить в виде степени с одним и тем же основанием 2. Но уже, например, уравнение $2^x=17$ таким способом решить не удается. Однако это уравнение имеет корень. Чтобы уметь решать такие уравнения, вводится понятие логарифма числа. В § 1 предыдущей главы было сказано, что уравнение $a^x=b$, где $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, имеет единственный корень. Этот корень называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$. Например, корнем уравнения $2^x=16$ является число 4, т. е. $\log_2 16=4$.

Определение

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a>0$, $a\neq1$, называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b.

Например, $\log_2 8=3$, так как $2^3=8$; $\log_3 \frac{1}{9}=-2$, так как $3^{-2}=\frac{1}{9}$; $\log_7 7=1$, так как $7^1=7$; $\log_4 1=0$, так как $4^0=1$.

Определение логарифма можно кратко записать так:

$$a^{\log_a b}=b.$$

Это равенство справедливо при $b>0$, $a>0$, $a\neq1$. Его обычно называют *основным логарифмическим тождеством*.

Например, $4^{\log_4 5}=5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}=3$, $13^{\log_{13}\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$.

С помощью основного логарифмического тождества можно показать, например, что $x=\log_2 17$ является корнем уравнения $2^x=17$. В самом деле, $2^{\log_2 17}=17$.

Действие нахождения логарифма числа называют *логарифмированием*.

Задача 2. Вычислить $\log_{32} 128$.

▷ Обозначим $\log_{32} 128=x$. По определению логарифма $32^x=128$. Так как $32=2^5$, $128=2^7$, то $2^{5x}=2^7$, откуда $5x=7$, $x=\frac{7}{5}$. ◀

Задача 3. Вычислить $3^{-2\log_3 5}$.

▷ Используя свойства степени и основное логарифмическое тождество, находим $3^{-2\log_3 5}=(3^{\log_3 5})^{-2}=5^{-2}=\frac{1}{25}$. ◀

Задача 4. Решить уравнение $\log_3(1-x)=2$.

▷ По определению логарифма $3^2=1-x$, откуда $x=-8$. ◀

Задача 5. Выяснить, при каких значениях x существует $\log_5 \frac{x-1}{3-x}$.

▷ Так как основание логарифма $5>0$ и $5\neq 1$, то данный логарифм существует тогда и только тогда, когда $\frac{x-1}{3-x}>0$. Решая это неравенство, находим $1<x<3$. ◀

Упражнения

1. Найти логарифмы чисел по основанию 3:
$3, 9, 27, 81, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{243}, \sqrt[3]{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, 9\sqrt[4]{3}$.

Вычислить (2—11).

2. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_2 2$; 4) $\log_2 1$.
3. 1) $\log_2 \frac{1}{2}$; 2) $\log_2 \frac{1}{8}$; 3) $\log_2 \sqrt{2}$; 4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.
4. 1) $\log_3 27$; 2) $\log_3 81$; 3) $\log_3 3$; 4) $\log_3 1$.
5. 1) $\log_3 \frac{1}{9}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3}$; 3) $\log_3 \sqrt[4]{3}$; 4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{9}}$.
6. 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 3) $\log_{0,5} 0,125$;
4) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; 5) $\log_{0,5} 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$.

7. 1) $\log_5 625$; 2) $\log_6 216$; 3) $\log_4 \frac{1}{16}$; 4) $\log_5 \frac{1}{125}$.

8. 1) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

9. 1) $3^{\log_3 18}$; 2) $5^{\log_5 16}$; 3) $10^{\log_{10} 2}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$.

10. 1) $3^{5\log_3 2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$; 3) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6}$; 4) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9}$.

11. 1) $8^{\log_2 5}$; 2) $9^{\log_3 12}$; 3) $16^{\log_4 7}$; 4) $0{,}125^{\log_{0,5} 1}$.

12. Решить уравнение:

1) $\log_6 x=3$; 2) $\log_5 x=4$; 3) $\log_2(5-x)=3$;

4) $\log_3(x+2)=3$; 5) $\log_{\frac{1}{6}}(0{,}5+x)=-1$; 6) $\log_{0,2}(3-x)=-2$.

13. Выяснить, при каких значениях x существует логарифм:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)$; 2) $\log_{0,2}(7-x)$; 3) $\log_6 \frac{1}{1-2x}$;

4) $\log_8 \frac{5}{2x-1}$; 5) $\log_{\frac{1}{4}}(-x^2)$; 6) $\log_{0,7}(-2x^3)$.

Вычислить (14—16).

14. 1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$; 3) $\log_{0,5} \frac{1}{\sqrt{32}}$; 4) $\log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$;

5) $\log_{128} 64$; 6) $\log_{27} 243$; 7) $\log_{64} 256$; 8) $\log_{81} 27$;

9) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[4]{3}}$; 10) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4\sqrt[3]{2}}$.

15. 1) $9^{2\log_3 5}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}$;

4) $27^{-4\log_{\frac{1}{3}} 5}$; 5) $10^{3-\log_{10} 5}$; 6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 3}$.

16. 1) $\log_2 \log_3 81$; 2) $\log_3 \log_2 8$;

3) $2\log_{27} \log_{10} 1000$; 4) $\frac{1}{3}\log_9 \log_2 8$;

5) $3\log_2 \log_4 16+\log_{\frac{1}{2}} 2$; 6) $2\log_4 \log_{16} 256+\log_{\sqrt{2}} 8$.

При каких значениях x имеет смысл выражение (17—18)?

17. 1) $\log_6(49-x^2)$; 2) $\log_7(x^2+x-6)$; 3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x+7)$;

4) $y=\log_{0,3}(7x-2x^2-3)$; 5) $y=\log_2 \frac{2x-1}{x-5}$; 6) $y=\log_{\frac{1}{7}} \frac{5x+1}{4-x}$;

7) $y=\log_{10}\sqrt{x^2-1}$; 8) $y=\log_{0,1}\sqrt{9-x^2}$.

18. 1) $\log_3(1-x^3)$; 2) $\log_2(x^3+8)$;

3) $\log_{\frac{1}{4}}(x^3+x^2-6x)$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^3+x^2-2x)$.

Решить уравнение (19—22).

19. 1) $2^x=5$; 2) $1{,}2^x=4$; 3) $4^{2x+3}=5$; 4) $7^{1-2x}=2$.

20. 1) $\log_x 27=3$; 2) $\log_x \frac{1}{7}=-1$; 3) $\log_x \sqrt{5}=-4$; 4) $\log_x 0{,}2=-3$.

21. 1) $7^{2x}+7^x-12=0$; 2) $9^x-3^x-12=0$;

3) $8^{x+1}-8^{2x-1}=30$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-5\left(\frac{1}{3}\right)^x+6=0$.

22. 1) $(3^x+2^x)(3^x+3\cdot 2^x)=8\cdot 6^x$;

2) $(3\cdot 5^x+2{,}5\cdot 3^x)(2\cdot 3^x-2\cdot 5^x)=8\cdot 15^x$.

23. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\log_x(2x-1)$; 2) $\log_{x-1}(x+1)$?

24. Решить относительно x уравнение

$$9^x+9a(1-a)\cdot 3^{x-2}-a^3=0.$$

§ 2. Свойства логарифмов

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, r — любое действительное число. Тогда справедливы формулы

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c, \quad (1)$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c, \quad (2)$$

$$\log_a b^r=r\log_a b. \quad (3)$$

○ По основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a b}=b, \quad (4)$$

$$a^{\log_a c}=c. \quad (5)$$

1) Перемножая почленно равенства (4) и (5), получаем $a^{\log_a b+\log_a c}=bc$, откуда по определению логарифма $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$. Формула (1) доказана.

2) Разделив почленно равенство (4) на равенство (5), получим $a^{\log_a b-\log_a c}=\frac{b}{c}$, откуда по определению логарифма следует формула (2).

3) Возводя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b$ в степень r, получаем $a^{r\log_a b}=b^r$, откуда по определению логарифма следует формула (3). ●

Приведем примеры применения формул (1)—(3):

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2$;

2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1$; 3) $\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}\log_3 3 = \frac{1}{7}$.

Задача 1. Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$.

▷ Применяя формулы (1)—(3), находим

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3}\cdot 50}{\sqrt{12}} = \log_5 25 = 2. \blacktriangleleft$$

Задача 2. Прологарифмировать по основанию 2 выражение $\frac{\sqrt[3]{16}\,a^4}{b^5}$, где $a > 0$ и $b > 0$.

▷ Используя формулы (1)—(3), находим

$$\log_2 \frac{\sqrt[3]{16}\,a^4}{b^5} = \log_2 \sqrt[3]{16} + \log_2 a^4 - \log_2 b^5 = \frac{4}{3} + 4\log_2 a - 5\log_2 b. \blacktriangleleft$$

Задача 3. Доказать, что если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $k \neq 0$, то $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$.

▷ Пусть $\log_{a^k} b = x$, тогда по определению логарифма $b = a^{kx}$, а $\log_a b = \log_a a^{kx}$. По свойству (3) логарифмов имеем $\log_a a^{kx} = kx\log_a a = kx$, следовательно, $\log_a b = k\log_{a^k} b$, откуда $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$. ◀

Упражнения

Вычислить (25—28).

25. 1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$; 2) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125$;

3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

26. 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$.

27. 1) $\log_{13} \sqrt[5]{169}$; 2) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}}$.

28. 1) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;

2) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;

3) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

4) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

29. Прологарифмировать по основанию 3 выражение, в котором $a>0$ и $b>0$:

1) $27\sqrt{a^2b}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{9b^2}$; 3) $\dfrac{81\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{b^2}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[4]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^5b}}$.

30. Вычислить $\log_a x$, если $\log_a b=3$, $\log_a c=-2$ и:

1) $x=a^3b^2\sqrt{c}$; 2) $x=\dfrac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}$.

Вычислить (31—32).

31. 1) $\dfrac{\log_3 8}{\log_3 16}$; 2) $\dfrac{\log_5 27}{\log_5 9}$; 3) $\dfrac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9}$; 4) $\dfrac{\log_7 8}{\log_7 15-\log_7 30}$.

32. 1) $\dfrac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}$; 2) $\dfrac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$;

3) $\dfrac{\log_2 4+\log_2\sqrt{10}}{\log_2 20+3\log_2 2}$; 4) $\dfrac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}$.

33. Найти x по данному его логарифму ($a>0$, $b>0$):

1) $\log_3 x=4\log_3 a+7\log_3 b$;
2) $\log_5 x=2\log_5 a-3\log_5 b$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x=\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a-\frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$;
4) $\log_{\frac{2}{3}} x=\frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a+\frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b$.

34. Вычислить:

1) $36^{\log_6 5}+10^{1-\log_{10}2}-8^{\log_2 3}$;
2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$;
3) $16^{1+\log_4 5}+4^{\frac{1}{2}\log_2 3+3\log_8 5}$;
4) $72\cdot\left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9-\log_7 6}+5^{-\log_{\sqrt{5}}4}\right)$.

35. Выразить данный логарифм через логарифм по основанию 2:

1) $\log_4 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 7$; 3) $\log_{\sqrt{2}} 13$; 4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 3$.

Вычислить (36—37).

36. 1) $\dfrac{\log_4 9}{2\log_2 3}$; 2) $\dfrac{\log_{\frac{1}{8}}16}{-3\log_{\frac{1}{8}}2}$; 3) $\dfrac{\log_{\frac{1}{36}}7}{\log_{36}49}$; 4) $\dfrac{-3\log_{\frac{1}{16}}19}{\log_{0.25}19}$.

37. 1) $\log_{36} 2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}} 3$; 2) $2\log_{25} 30 + \log_{0,2} 6$.

38. Доказать, что при $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$ и $k\neq 0$ справедлива формула $\log_{a^k} x^k = \log_a x$.

39. Выразить данный логарифм через $\log_3 a$ $(a>0)$:

1) $\log_9 a^4$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} a^{-2}$; 3) $\log_{\sqrt{3}} a$; 4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} a^2$.

40. Решить уравнение:

1) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$; 2) $\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7 = 2$;

3) $2\log_x 7 - \frac{1}{2}\log_{x^2} 16 + \frac{1}{4}\log_{\sqrt{x}} 64 = 2$;

4) $\frac{1}{2}\log_x 7 - \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} 3 - \log_{x^2} 28 = 1$.

41. Доказать, что при $a>0$, $a\neq 1$ и любых $x_1\neq 0$ и $x_2\neq 0$ справедливы формулы:

1) $\log_a |x_1 \cdot x_2| = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$;

2) $\log_a \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|$.

42. Выразить через a и b:

1) $\log_{\sqrt{3}} 50$, если $\log_3 15 = a$, $\log_3 10 = b$;

2) $\log_4 1250$, если $\log_2 5 = a$.

§ 3. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода

Для логарифмов различных чисел составлены специальные таблицы (таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляются и с помощью микрокалькулятора. В том и в другом случае находятся только десятичные или натуральные логарифмы.

Определения

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Приближение значения числа e можно прочесть на табло инженерного микрокалькулятора после использования клавиши $\boxed{e^x}$: $e \approx 2{,}718281828$.

Вычисления на микрокалькуляторе чисел $\lg b$ и $\ln b$ проводятся с помощью клавиш $\boxed{\lg}$ и $\boxed{\ln}$ соответственно.

Например, $\lg 13 \approx 1{,}1139433$; $\ln 13 \approx 2{,}5649493$.

Оказывается, что достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов чисел, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию. Для этого используется *формула перехода* от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \tag{1}$$

где $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$, $c>0$, $c\neq 1$.

Докажем справедливость формулы (1).

○ Запишем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b$. Прологарифмируем обе его части по основанию c:

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Используя свойство логарифма степени, получаем

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b, \text{ откуда } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \bullet$$

Из формулы (1) следует формула

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{2}$$

Из формулы (1) при $c=10$ и $c=e$ получаются формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}. \tag{3}$$

Задача 1. С помощью микрокалькулятора вычислить $\log_3 80$ с точностью до сотых.

▷ 1) По формулам (3) с помощью десятичных логарифмов находим $\log_3 80 = \frac{\lg 80}{\lg 3} \approx 3{,}9886927$. 2) С помощью натуральных логарифмов находим $\log_3 80 = \frac{\ln 80}{\ln 3} \approx 3{,}9886928 \approx 3{,}99$. ◀

Формула перехода от одного основания логарифма к другому иногда используется при решении уравнений.

Задача 2. Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x = \frac{3}{2}$.

▷ По формуле перехода $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$. Уравнение принимает вид $\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = \frac{3}{2}$, откуда $\log_2 x = 1$, $x=2$. ◀

Задача 3. Выразить $\log_{600} 900$ через a и b, где $a=\log_5 2$, $b=\log_5 3$.

▷ По формуле перехода и свойствам логарифмов получаем

$$\log_{600} 900 = \frac{\log_5 (2^2\cdot 3^2\cdot 5^2)}{\log_5 (2^3\cdot 3\cdot 5^2)} = \frac{2\log_5 2 + 2\log_5 3 + 2}{3\log_5 2 + \log_5 3 + 2} = \frac{2a+2b+2}{3a+b+2}. ◀$$

Задача 4. Как известно, двухпроцентный вклад в сбербанк, равный a рублям, через n лет становится равным $a(1{,}02)^n$, а трехпроцентный вклад становится равным $a(1{,}03)^n$. Через сколько лет каждый из вкладов удвоится?

▷ 1) Для первого вклада $2a=a(1{,}02)^n$, откуда $(1{,}02)^n=2$, $n=\log_{1{,}02}2$. Проведя вычисления на микрокалькуляторе, получим $\log_{1{,}02}2\approx 35{,}002788$.

2) Для второго вклада $n=\log_{1{,}03}2$. Вычисления на микрокалькуляторе показывают, что $\log_{1{,}03}2\approx 23{,}449772$.

Ответ. По первому вкладу примерно через 35 лет, а по второму — через 23,5 года. ◀

Задача 5. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq 1$, $ab\neq 1$, $c\neq 1$, то справедливо равенство

$$\frac{\log_a c}{\log_{ab} c}=1+\log_a b.$$

▷ Используя формулу перехода и свойства логарифмов, получим $\dfrac{\log_a c}{\log_{ab} c}=\dfrac{\log_c ab}{\log_c a}=\dfrac{\log_c a+\log_c b}{\log_c a}=1+\dfrac{\log_c b}{\log_c a}=1+\log_a b$. ◀

Упражнения

Вычислить с помощью микрокалькулятора (43—44).

43. 1) $\lg 23$; 2) $\lg 7$; 3) $\lg 0{,}37$; 4) $\lg\frac{2}{3}$.

44. 1) $\ln 81$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln 0{,}17$; 4) $\ln\frac{6}{7}$.

45. Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:
1) $\log_7 25$; 2) $\log_5 8$; 3) $\log_{0{,}7} 9$; 4) $\log_{1{,}1} 0{,}23$.

46. Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:
1) $\log_7 5$; 2) $\log_8 15$; 3) $\log_{0{,}7} 9$; 4) $\log_{1{,}1} 0{,}23$.

47. Выразить данный логарифм через логарифм с основанием 7:
1) $\log_5 3$; 2) $\lg 6$; 3) $\log_2 7$; 4) $\log_5\frac{1}{3}$; 5) $\lg 7$; 6) $\log_3 7$.

48. Известно, что $\lg 2\approx 0{,}301$, $\lg 5\approx 0{,}699$, $\lg 3\approx 0{,}477$. Найти приближенное значение:
1) $\log_5 2$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_3 2$; 4) $\log_2 3$;
5) $\log_2\sqrt{5}$; 6) $\log_5 0{,}25$; 7) $\log_3 0{,}5$; 8) $\log_3 0{,}2$.

49. Вычислить:
1) $5^{\frac{\lg 625}{\lg 25}}$; 2) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4\cdot\log_2 3)$.

50. Решить уравнение:

1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$; 2) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$;

3) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$; 4) $\log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$;

5) $\log_2 x + \log_8 x = 8$; 6) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}$.

---

51. Найти $\log_3 39$, $\log_{27} 13$, $\log_{27} 39$, $\log_9 117$, если $\log_3 13 = m$.

52. Найти $\log_{49} 28$, если $\log_7 2 = m$.

53. Найти $\log_{15} 30$, если $\lg 3 = m$, $\lg 5 = n$.

54. Найти $\log_{24} 72$, если $\log_6 2 = m$.

55. Найти $\log_{36} 9$, если $\log_{36} 8 = m$.

56. Выразить $\log_{30} 8$ через a и b, если $a = \lg 5$, $b = \lg 3$.

57. Выразить $\log_{300} 120$ через a и b, если $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$.

58. Выразить $\log_{350} 140$ через m и n, если $m = \log_5 2$, $n = \log_7 5$.

59. Вычислить:

1) $\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$; 2) $\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}$.

60. Решить уравнение:

1) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$; 2) $16\log_{16}^2 x + 3\log_4 x - 1 = 0$;

3) $\log_3^2 x + 5\log_9 x - 1{,}5 = 0$; 4) $\log_3^2 x - 15\log_{27} x + 6 = 0$.

61. Вычислить (не используя микрокалькулятор):

1) $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6}$; 2) $\left(\log_7 2 + \frac{1}{\log_5 7}\right)\lg 7$; 3) $\frac{2\log_2 3}{\log_4 9}$.

62. Число жителей города-новостройки увеличивается ежегодно на 8%. Через сколько лет число жителей удвоится?

63. Вакуумный насос сконструирован таким образом, что за один ход он удаляет 3% имеющегося в камере газа. За сколько ходов насос удалит из камеры 99% газа?

64. При одном качании поршневого насоса из сосуда удаляется 1,2% имеющегося в нем воздуха. Через сколько качаний насоса в сосуде останется $\frac{1}{10^{16}}$ часть первоначальной массы воздуха?

65. К 2000 году известные запасы угля в мире составляли $5 \cdot 10^{12}$ т. Мера потребления угля в мире равна $2{,}2 \cdot 10^9$ тонн в год. 1) На сколько лет хватит имеющихся запасов угля при данном его потреблении? 2) На сколько лет хватит запасов, если его потребление будет ежегодно увеличиваться на 5%? на 4%?

66. Вода в глубоком озере содержит взвесь, которая уменьшает проходимость света в воде. Эксперименты показали, что при прохождении каждых 20 см воды интенсивность све-

та уменьшается на 10%. Днем измерительный прибор опустили на дно озера и начали постепенно поднимать. На какой глубине h впервые покажет наличие света прибор, способный обнаруживать 0,17% дневного света?

67. Расстояния d планет от Солнца (в астрономических единицах) и их периоды обращения вокруг Солнца T (в годах) приведены в таблице:

№ п/п	Планета	d	T
1	Меркурий	0,387	0,241
2	Венера	0,723	0,615
3	Земля	1,000	1,000
4	Марс	1,523	1,881
5	Юпитер	5,203	11,861
6	Сатурн	9,541	29,457
7	Уран	19,190	84,008
8	Нептун	30,086	1644,784
9	Плутон	39,507	248,350

Найти формулу зависимости T от d.

68. Вычислить на микрокалькуляторе приближенное значение числа e по формуле

$$e \approx 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n} \text{ при:}$$

1) $n=7$; 2) $n=8$; 3) $n=9$; 4) $n=10$.

§ 4. Логарифмическая функция, ее свойства и график

В математике и ее приложениях часто встречается логарифмическая функция $y=\log_a x$, где a — заданное число, $a>0$, $a\neq 1$.

Логарифмическая функция обладает свойствами:

1) Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел.

○ Это следует из определения логарифма, так как выражение $\log_a x$ имеет смысл только при $x>0$. ●

2) Множество значений логарифмической функции — множество R всех действительных чисел.

○ Это следует из того, что для любого действительного числа b существует такое положительное число x, что $\log_a x=b$, т. е. уравнение $\log_a x=b$ имеет корень. Его корень равен $x=a^b$, так как $\log_a a^b=b$. ●

3) Логарифмическая функция не является ограниченной.

○ Это следует из свойства 2 логарифмической функции. ●

4) Логарифмическая функция $y=\log_a x$ является возрастающей на промежутке $x>0$, если $a>1$, и убывающей, если $0<a<1$.

○ Пусть $a>1$. Докажем, что если $0<x_1<x_2$, то $y(x_1)<y(x_2)$, т. е. $\log_a x_1<\log_a x_2$. Пользуясь основным логарифмическим тождеством, условие $x_1<x_2$ можно записать так: $a^{\log_a x_1}<a^{\log_a x_2}$. Из этого неравенства по свойству степени с основанием $a>1$ следует, что $\log_a x_1<\log_a x_2$.

Пусть $0<a<1$. Докажем, что если $0<x_1<x_2$, то $\log_a x_1>\log_a x_2$. Запишем условие $x_1<x_2$ в виде $a^{\log_a x_1}<a^{\log_a x_2}$, откуда $\log_a x_1>\log_a x_2$. ●

Отметим, что справедливы и следующие два утверждения:
если $a>1$ и $\log_a x_1<\log_a x_2$, где $x_1>0$, $x_2>0$, то $x_1<x_2$;
если $0<a<1$ и $\log_a x_1<\log_a x_2$, где $x_1>0$, $x_2>0$, то $x_1>x_2$.

5) Если $a>1$, то функция $y=\log_a x$ принимает положительные значения при $x>1$, отрицательные при $0<x<1$. Если $0<a<1$, то функция $y=\log_a x$ принимает положительные значения при $0<x<1$, отрицательные при $x>1$.

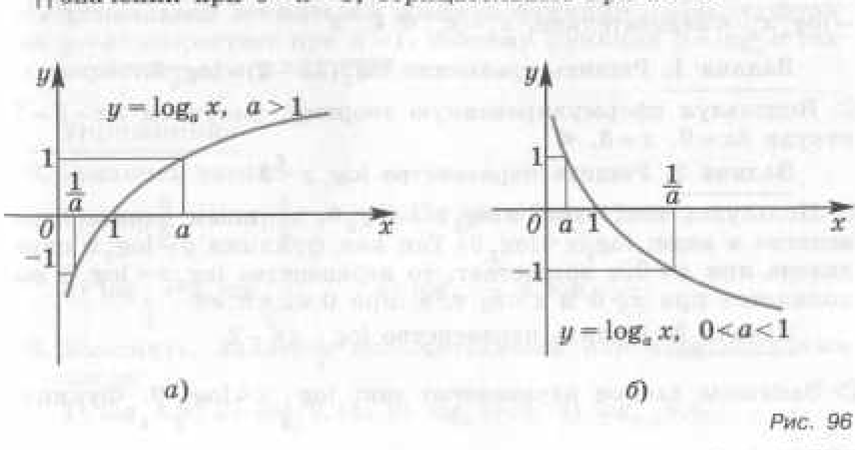


Рис. 96

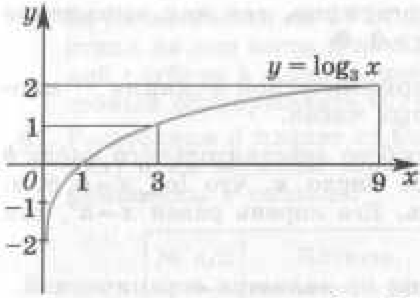


Рис. 97

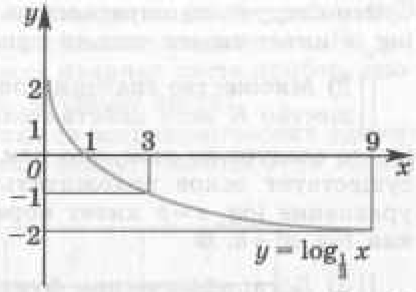


Рис. 98

○ Это следует из того, что функция $y=\log_a x$ принимает значение, равное нулю, при $x=1$ и является возрастающей на промежутке $x>0$, если $a>1$, и убывающей, если $0<a<1$. ●

Из рассмотренных свойств логарифмической функции $y=\log_a x$ следует, что ее график расположен правее оси Oy и имеет вид, указанный на рисунке 96, *а*, если $a>1$, и на рисунке 96, *б*, если $0<a<1$.

На рисунке 97 изображен график функции $y=\log_3 x$, а на рисунке 98 — график функции $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

Отметим, что график любой логарифмической функции $y=\log_a x$ проходит через точку (1; 0).

Теорема

Если $\log_a x_1=\log_a x_2$, где $a>0$, $a\neq 1$, $x_1>0$, $x_2>0$, то $x_1=x_2$.

○ Предположим, что $x_1\neq x_2$, например $x_1<x_2$. Если $a>1$, то из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $\log_a x_1<\log_a x_2$; если $0<a<1$, то из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $\log_a x_1>\log_a x_2$. В обоих случаях получилось противоречие с условием $\log_a x_1=$ $=\log_a x_2$. Следовательно, $x_1=x_2$. ●

Задача 1. Решить уравнение $\log_5(3x-2)=\log_5 7$.

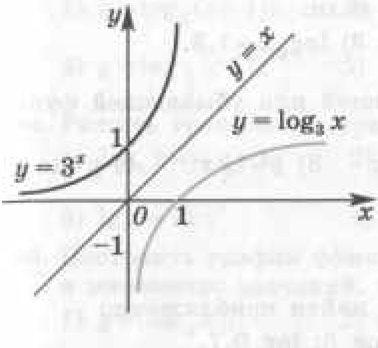
▷ Используя сформулированную теорему, получаем $3x-2=7$, откуда $3x=9$, $x=3$. ◀

Задача 2. Решить неравенство $\log_2 x<3$.

▷ Пользуясь тем, что $3=\log_2 2^3=\log_2 8$, запишем данное неравенство в виде: $\log_2 x<\log_2 8$. Так как функция $y=\log_2 x$ определена при $x>0$ и возрастает, то неравенство $\log_2 x<\log_2 8$ выполняется при $x>0$ и $x<8$, т. е. при $0<x<8$. ◀

Задача 3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x\leqslant -2$.

▷ Запишем данное неравенство так: $\log_{\frac{1}{3}} x\leqslant\log_{\frac{1}{3}} 9$. Функция



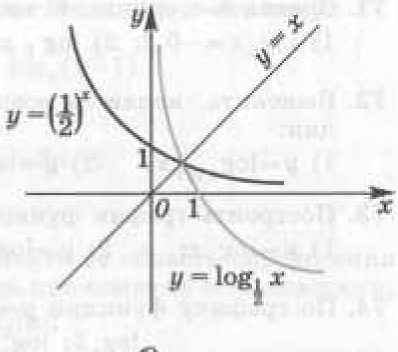


Рис. 99

$y=\log_{\frac{1}{3}} x$ определена при $x>0$ и убывает, поэтому неравенство выполняется при $x>0$ и $x \geqslant 9$.

Ответ. $x \geqslant 9$. ◄

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ и показательная функция $y=a^x$, где $a>0$, $a \neq 1$, взаимно обратны.

○ Решая уравнение $y=\log_a x$ относительно x, получаем $x=a^y$; меняя местами x и y, имеем $y=a^x$. ●

Графики этих функций при $a=3$ и $a=\frac{1}{2}$ показаны на рисунке 99.

Так как функции $y=\log_a x$ и $y=a^x$ взаимно обратны, то свойства одной из них можно установить, зная свойства другой. Например, множеством значений функции $y=a^x$ является множество $y>0$, поэтому областью определения функции $y=\log_a x$ является множество $x>0$; ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции $y=a^x$, а ось Oy является вертикальной асимптотой графика функции $y=\log_a x$; функция $y=a^x$ возрастает при $a>1$, поэтому функция $y=\log_a x$ также возрастает при $a>1$.

Упражнения

69. Сравнить числа:

1) $\log_3 \frac{6}{5}$ и $\log_3 \frac{5}{6}$;   2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ и $\log_{\frac{1}{3}} 17$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} e$ и $\log_{\frac{1}{2}} \pi$;   4) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

70. Выяснить, является положительным или отрицательным число:

1) $\log_3 4{,}5$; 2) $\log_3 0{,}45$; 3) $\log_5 25{,}3$; 4) $\log_{0,5} 9{,}6$.

71. Сравнить с единицей число x, если:

1) $\log_3 x = -0{,}3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1{,}7$; 3) $\log_2 x = 1{,}3$.

72. Выяснить, является возрастающей или убывающей функция:

1) $y = \log_{0{,}075} x$; 2) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$; 3) $y = \lg x$; 4) $y = \ln x$.

73. Построить график функции:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

74. По графику функции $y = \log_2 x$ найти приближенно

$$\log_2 3;\ \log_2 0{,}3;\ \log_2 5;\ \log_2 0{,}7.$$

75. Изобразить схематически график функции:

1) $y = \lg x$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \log_{0{,}4} x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Решить неравенство (76—77).

76. 1) $\log_5 x > \log_5 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$;

3) $\lg x < \lg 4$; 4) $\ln x > \ln 0{,}5$.

77. 1) $\log_3 x < 2$; 2) $\log_{0{,}4} x > 2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 16$; 4) $\log_{0{,}4} x \leqslant 2$.

78. Решить уравнение:

1) $\log_3 (5x-1) = 2$; 2) $\log_5 (3x+1) = 2$; 3) $\log_4 (2x-3) = 1$;

4) $\log_7 (x+3) = 2$; 5) $\lg (3x-1) = 0$; 6) $\lg (2-5x) = 1$.

79. Найти область определения функции:

1) $y = \log_4 (x-1)$; 2) $y = \log_{0{,}3} (1+x)$;

3) $y = \log_3 (x^2+2x)$; 4) $y = \log_{\sqrt{2}} (4-x^2)$.

---

80. Доказать, что функция $y = \log_2 (x^2-1)$ возрастает на промежутке $x > 1$.

81. Сравнить значения выражений:

1) $\frac{1}{2} + \lg 3$ и $\lg 19 - \lg 2$; 2) $\frac{\lg 5 + \lg \sqrt{7}}{2}$ и $\lg \frac{5+\sqrt{7}}{2}$;

3) $3(\lg 7 - \lg 5)$ и $\lg 9 - \frac{2}{3} \lg 8$; 4) $\lg \lg \lg 50$ и $\lg^3 5$.

82. Найти область определения функции:

1) $y = \log_8 (x^2-3x-4)$; 2) $y = \log_{\sqrt{3}} (-x^2+5x+6)$;

3) $y = \log_{0{,}7} \frac{x^2-9}{x+5}$; 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-4}{x^2+4}$;

5) $y = \log_2 (2^x-2)$; 6) $y = \log_3 (3^{x-1}-9)$.

83. Построить график функции, найти ее область определения и множество значений:

1) $y=\log_3(x-1)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$; 3) $y=1+\log_3 x$;

4) $y=\log_{\frac{1}{3}} x-1$; 5) $y=1+\log_3(x-1)$.

84. Решить графически уравнение:

1) $\log_2 x=-x+1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x=2x-5$;

3) $\lg x=\sqrt{x}$; 4) $\lg x=2^{-x}$.

85. Построить график функции, найти ее область определения и множество значений, указать промежутки монотонности:

1) $y=|\log_3 x|$; 2) $y=\log_3|x|$;

3) $y=\log_2|3-x|$; 4) $y=|1-\log_2 x|$.

86. Найти область определения функции:

1) $y=\log_2|3-x|-\log_2|x^3-8|$;

2) $y=\log_{0,3}\sqrt{x+1}+\log_{0,4}(1-8x^3)$.

§ 5. Логарифмические уравнения

Задача 1. Решить уравнение

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3. \quad (1)$$

▷ Предположим, что x — такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е. x — корень уравнения (1).

Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$\log_2((x+1)(x+3))=3.$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$(x+1)(x+3)=8, \quad (2)$$

$x^2+4x+3=8$, т. е. $x^2+4x-5=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=-5$.

Так как уравнение (2) является *следствием* исходного уравнения, то необходима проверка.

Проверим, являются ли числа 1 и -5 корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения $x=1$, получаем $\log_2(1+1)+\log_2(1+3)=\log_2 2+\log_2 4=1+2=3$, т. е. $x=1$ — корень уравнения (1). При $x=-5$ числа $x+1$ и $x+3$ отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т. е. $x=-5$ не является корнем этого уравнения.

Ответ. $x=1$. ◀

Замечание. Решение уравнения (1) можно заменить решением равносильной ему системы

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0, \\ \log_2((x+1)(x+3))=3. \end{cases}$$

Задача 2. Решить уравнение $\log_2(1-x)=3-\log_2(3-x)$.

▷ Перенесем логарифм из правой части в левую:

$\log_2(1-x)+\log_2(3-x)=3$, $\log_2((1-x)(3-x))=3$, $(1-x)(3-x)=8$.

Решая это уравнение, получаем $x_1=5$, $x_2=-1$. Число 5 не является корнем исходного уравнения, так как при $x=5$ левая и правая части уравнения теряют смысл. Проверка показывает, что число -1 является корнем исходного уравнения.

Ответ. $x=-1$. ◀

Задача 3. Решить уравнение

$$\lg(2x^2-4x+12)=\lg x+\lg(x+3).$$

▷ По свойству логарифмов $\lg(2x^2-4x+12)=\lg(x^2+3x)$, откуда $2x^2-4x+12=x^2+3x$, $x^2-7x+12=0$, $x_1=3$, $x_2=4$.

Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения. ◀

Задача 4. Решить уравнение $\log_7(3x+4)=\log_7(5x+8)$.

▷ Приравнивая выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем $3x+4=5x+8$, откуда $x=-2$.

Выполняя проверку, убеждаемся, что при $x=-2$ левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.

Ответ. Корней нет. ◀

Задача 5. Решить уравнение

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x=2\log_4(2x-1).$$

▷ Преобразуем данное уравнение:

$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x-2\log_4(2x-1)=0$, $\log_4(2x-1)\cdot(\log_4 x-2)=0$.

Приравнивая каждый из множителей левой части уравнения к нулю, получаем: 1) $\log_4(2x-1)=0$, откуда $2x-1=1$, $x_1=1$; 2) $\log_4 x-2=0$, откуда $\log_4 x=2$, $x_2=16$.

Проверка показывает, что числа 1 и 16 — корни исходного уравнения. ◀

Задача 6. Решить уравнение $\log_3 x+\log_x 3=\frac{5}{2}$.

▷ Уравнение имеет смысл, если

$$x>0,\ x\neq 1. \qquad (3)$$

Пусть $t=\log_3 x$, тогда $\log_x 3=\frac{1}{t}$ и уравнение примет вид $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$, или $2t^2-5t+2=0$, откуда $t_1=2$, $t_2=\frac{1}{2}$. Если $t=2$, то $\log_3 x=2$, $x=9$. Если $t=\frac{1}{2}$, то $\log_3 x=\frac{1}{2}$, $x=\sqrt{3}$.

Найденные значения $x_1=9$, $x_2=\sqrt{3}$ удовлетворяют условиям (3) и являются корнями данного уравнения. ◀

Задача 7. Решить уравнение $1-\log_9(x+1)^2=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\frac{x+5}{x+3}$.

▷ Переходя к логарифмам по основанию 3, получаем равносильное исходному уравнение $1-\log_3|x+1|=\log_3\frac{x+5}{x+3}$. (4)

Следствием последнего уравнения является уравнение

$$\frac{3}{|x+1|}=\frac{x+5}{x+3}. \tag{5}$$

При $x>-1$ уравнение (5) примет вид $\frac{3}{x+1}=\frac{x+5}{x+3}$. Следствие этого уравнения $3x+9=x^2+6x+5$ имеет корни $x_1=1$ и $x_2=-4$ (не удовлетворяющий условию $x>-1$). При $x<-1$ уравнение (5) равносильно уравнению $x^2+9x+14=0$, оба корня которого $x_1=-7$ и $x_2=-2$ удовлетворяют условию $x<-1$. Проверка показывает, что числа 1, -7 и -2 являются корнями уравнения (4), а значит, и исходного уравнения. ◀

Задача 8. Решить уравнение $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$.

▷ Область определения уравнения находится из условий $1-x>0$, $1-x\neq1$, $3-x>0$, $3-x\neq1$, откуда получаем $x<1$, $x\neq0$.

Применяя формулу $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ и полагая $\log_{1-x}(3-x)=t$, получаем уравнение $t=\frac{1}{t}$, откуда $t_1=1$, $t_2=-1$.

На области определения исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\log_{1-x}(3-x)=1$, $\log_{1-x}(3-x)=-1$. Первое из них не имеет корней, так как $1-x\neq3-x$, а второе имеет корни $x_1=2+\sqrt{2}$ и $x_2=2-\sqrt{2}$. Из чисел x_1 и x_2 только второе принадлежит области определения уравнения.

Ответ. $x=2-\sqrt{2}$. ◀

Задача 9. Решить уравнение $x^{\lg x-1}=100$.

▷ Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получаем равносильное уравнение $(\lg x-1)\lg x=2$. Пусть $\lg x=t$, тогда $t^2-t-2=0$, откуда $t_1=-1$, $t_2=2$. Решая уравнения $\lg x=-1$ и $\lg x=2$, находим $x_1=0{,}1$, $x_2=100$. ◀

Задача 10. Решить систему уравнений $\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=1,\\ 4y^2+x-12=0.\end{cases}$

▷ Из первого уравнения системы выразим x через y, получив $\log_2\frac{x}{y}=\log_2 2$, откуда $\frac{x}{y}=2$, $x=2y$. Подставив $x=2y$ во второе уравнение системы, получим $4y^2+2y-12=0$, откуда $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=-2$. Тогда $x_1=3$, $x_2=-4$. Проверкой убеждаемся в том, что $\left(3;\ \frac{3}{2}\right)$ — решение системы, а $(-4;\ -2)$ не является ее решением. ◀

Упражнения

87. Установить, какое из данных двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x-3=0$ и $x^2-5x+6=0$; 2) $|x|=5$ и $\sqrt{x^2}=5$;

3) $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$ и $x^2-3x+2=0$;

4) $\log_8 x+\log_8 (x-2)=1$ и $\log_8 (x(x-2))=1$.

Решить уравнение (88—92).

88. 1) $\log_2 (x-5)+\log_2 (x+2)=3$; 2) $\log_3 (x-2)+\log_3 (x+6)=2$;
3) $\lg(x+\sqrt{3})+\lg(x-\sqrt{3})=0$; 4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=0$.

89. 1) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2$; 2) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$.

90. 1) $\frac{1}{2}\lg(x^2+x-5)=\lg(5x)+\lg\frac{1}{5x}$;

2) $\frac{1}{2}\lg(x^2-4x-1)=\lg(8x)-\lg(4x)$.

91. 1) $\log_3 (5x+3)=\log_3 (7x+5)$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} (3x-1)=\log_{\frac{1}{2}} (6x+8)$.

92. 1) $\log_7 (x-1)\log_7 x=\log_7 x$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} x\log_{\frac{1}{3}} (3x-2)=\log_{\frac{1}{3}} (3x-2)$;
3) $\log_2 (3x+1)\log_3 x=2\log_2 (3x+1)$;
4) $\log_{\sqrt{3}} (x-2)\log_5 x=2\log_3 (x-2)$.

93. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\lg x-\lg y=2,\\ x-10y=900;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2,\\ x^2y-2y+9=0.\end{cases}$

Решить уравнение (94—96).

94. 1) $\log_5 x^2=0$; 2) $\log_4 x^2=3$; 3) $\log_3 x^3=0$; 4) $\log_4 x^3=6$;
5) $\lg x^4+\lg(4x)=2+\lg x^3$; 6) $\lg x+\lg x^2=\lg(9x)$.

95. 1) $\log_4 ((x+2)(x+3))+\log_4 \frac{x-2}{x+3}=2$;

2) $\log_2 \frac{x-1}{x+4}+\log_2 ((x-1)(x+4))=2$;

3) $\log_3 x^2-\log_3 \frac{x}{x+6}=3$; 4) $\log_2 \frac{x+4}{x}+\log_2 x^2=5$.

96. 1) $2^{3\lg x}\cdot 5^{\lg x}=1600$; 2) $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400$;

3) $\frac{1}{4+\lg x}+\frac{2}{2-\lg x}=1$; 4) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$.

97. Не решая уравнений, выяснить, равносильны ли они:

1) $2^{3x+1}=2^{-3}$ и $3x+1=-3$; 2) $\log_3 (x-1)=2$ и $x-1=9$;

3) $\lg x^2=1$ и $2\lg x=1$; 4) $\lg\sqrt{x}=2$ и $\frac{1}{2}\lg x=2$.

98. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{y} = 4, \\ xy = 2. \end{cases}$

Решить уравнение (99—108).

99. 1) $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1$; 2) $\log_2 x + \log_x 2 = 2{,}5$;
3) $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$; 4) $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1$.

100. 1) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$; 2) $\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7 = 2$.

101. 1) $\lg(6\cdot 5^x - 25\cdot 20^x) - \lg 25 = x$;
2) $\lg(2^x + x + 4) = x - x\lg 5$.

102. 1) $\lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$;
2) $2\log_5(4-x)\cdot\log_{2x}(4-x) = 3\log_5(4-x) - \log_5(2x)$.

103. 1) $\sqrt{\log_x 25 + 3} = \dfrac{1}{\log_5 x}$;
2) $\sqrt{2\log_2^2 x + 3\log_2 x - 5} = \log_2(2x)$.

104. $1 + \log_6 \dfrac{x+3}{x+7} = \dfrac{1}{4}\log_{\sqrt{6}}(x-1)^2$.

105. 1) $\log_2 x + \log_x 2 = \dfrac{5}{2}$; 2) $\log_{2x-1}(2x-3) = \log_{2x-3}(2x-1)$.

106. $\log_2(2^x+1)\log_2(2^{x+1}+2) = 2$.

107. $\sqrt{3 + \log_x 5\sqrt{5}}\cdot\log_{\sqrt{5}} x = -\sqrt{6}$.

108. 1) $x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6$; 2) $x^{\log_2 \frac{x}{98}}\cdot 14^{\log_2 7} = 1$.

109. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = a$ имеет корни.

110. Найти все значения a, при которых уравнение $\dfrac{\lg(ax)}{\lg(x+1)} = 2$ имеет ровно один корень.

111. При каких значениях a уравнение $\dfrac{\lg x}{\lg(x-a-a^2)} = 2$ имеет хотя бы один корень? Найти все корни этого уравнения.

§ 6. Логарифмические неравенства

При изучении логарифмической функции рассматривались неравенства вида $\log_a x < b$ и $\log_a x \geqslant b$. Приведем примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ решения таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т. е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

Задача 1. Решить неравенство $\lg(x+1) \leqslant 2$.

▷ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x, а левая часть — при $x+1>0$, откуда $x>-1$, т. е. $x>-1$ — область определения исходного неравенства, которое запишем так: $\lg(x+1) \leqslant \lg 100$. Так как $10>1$, то $x+1 \leqslant 100$, откуда $x \leqslant 99$. Учитывая область определения исходного неравенства, получаем $-1<x \leqslant 99$. ◀

Задача 2. Решить неравенство

$$\log_2(x-3)+\log_2(x-2) \leqslant 1. \qquad (1)$$

▷ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому левая часть неравенства имеет смысл при $x-3>0$ и $x-2>0$.

Следовательно, областью определения этого неравенства является промежуток $x>3$. По свойствам логарифмов неравенство (3) при $x>3$ равносильно неравенству

$$\log_2((x-3)(x-2)) \leqslant \log_2 2. \qquad (2)$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому при $x>3$ неравенство (2) выполняется, если

$$(x-3)(x-2) \leqslant 2.$$

Таким образом, исходное неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leqslant 2, \\ x>3. \end{cases}$$

Рис. 100

Решая первое неравенство этой системы, получаем $x^2-5x+4 \leqslant 0$, откуда $1 \leqslant x \leqslant 4$. Совмещая этот отрезок с промежутком $x>3$, получаем $3<x \leqslant 4$ (рис. 100). ◀

Задача 3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant -4.$$

▷ Область определения неравенства находится из условия $x^2+2x-8>0$. Исходное неравенство можно записать так:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Так как логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{2}$ является убывающей, то для всех x из области определения неравенства получаем $x^2+2x-8 \leqslant 16$. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-8 \leqslant 16, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-24 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решая первое квадратное неравенство, получаем $x<-4$, $x>2$ (рис. 101, *а*). Решая второе неравенство, получаем $-6\leqslant x\leqslant 4$ (рис. 101, *б*). Поэтому множество решений неравенства — совокупность промежутков $[-6;\ -4)$ и $(2;\ 4]$ (рис. 101, *в*).

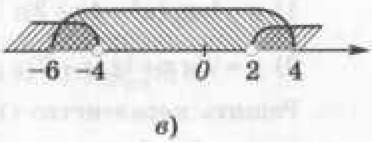


Рис. 101

Ответ. $-6\leqslant x<-4,\ 2<x\leqslant 4.$ ◄

Задача 4. Решить неравенство $\log_{x^2-3}(4x+7)>0.$

▷ Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} x^2-3>1, \\ 4x+7>1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0<x^2-3<1, \\ 0<4x+7<1. \end{cases}$$

Первая система равносильна системе $\begin{cases} |x|>2, \\ x>-\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ откуда находим $x>2$.

Вторая система равносильна системе $\begin{cases} \sqrt{3}<|x|<2, \\ -\dfrac{7}{4}<x<-\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ откуда следует, что $-\dfrac{7}{4}<x<-\sqrt{3}$.

Ответ. $-\dfrac{7}{4}<x<-\sqrt{3},\ x>2.$ ◄

Упражнения

112. Найти область определения функции:

1) $y=\lg(3x-2)$; 2) $y=\log_2(7-5x)$;
3) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)$; 4) $y=\log_7(4-x^2)$.

Решить неравенство (113—115).

113. 1) $\log_3(x+2)<3$; 2) $\log_8(4-2x)\geqslant 2$;
3) $\log_3(x+1)<-2$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\geqslant -2$;
5) $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x)\geqslant -1$; 6) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<-2$.

114. 1) $\log x>\lg 8+1$; 2) $\lg x>2-\lg 4$;
3) $\log_2(x-4)<1$; 4) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

115. 1) $\log_{15}(x-3)+\log_{15}(x-5)<1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+\log_{\frac{1}{3}}(12-x)\geq -2$.

116. Найти область определения функции:
1) $y=\log_5(x^2-4x+3)$; 2) $y=\log_6\frac{3x+2}{1-x}$;
3) $y=\sqrt{\lg x+\lg(x+2)}$; 4) $y=\sqrt{\lg(x-1)+\lg(x+1)}$.

Решить неравенство (117—125).

117. 1) $\log_5\frac{3x-2}{x^2+1}>0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3}{x-7}<0$;
3) $\lg(3x-4)<\lg(2x+1)$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

118. 1) $\log_8(x^2-4x+3)<1$; 2) $\log_6(x^2-3x+2)\geq 1$;
3) $\log_3(x^2+2x)>1$; 4) $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2{,}5x)<-1$.

119. 1) $\lg(x^2-8x+13)>0$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)<0$;
3) $\log_2(x^2+2x)<3$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6)\geq -3$.

120. 1) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2 x^2>0$; 2) $\log_3\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)<1$.

121. 1) $\log_{0,2}x-\log_5(x-2)<\log_{0,2}3$;
2) $\lg x-\log_{0,1}(x-1)>\log_{0,1}0{,}5$.

122. 1) $\log_{0,2}^2 x-5\log_{0,2}x<-6$; 2) $\log_{0,1}^2 x+3\log_{0,1}x>4$.

123. 1) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}<1$; 2) $\log_3(2-3^{-x})<x+1-\log_3 4$;
3) $\log_{3x+\frac{1}{4}}(1-25x^2)>0$; 4) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6}-2x)<0$.

124. $\frac{2}{3^x-1}\leq\frac{7}{9^x-2}$.

125. $4^x(\sqrt{16^{1-x}-1}+2)<4|4^x-1|$.

Упражнения к главе VII

Вычислить (126—130).

126. 1) $\log_{15}225$; 2) $\log_4 256$; 3) $\log_3\frac{1}{243}$; 4) $\log_7\frac{1}{343}$.

127. 1) $\log_{\frac{1}{4}}64$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}81$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{64}$.

128. 1) $\log_{11}1$; 2) $\log_7 7$; 3) $\log_{16}64$; 4) $\log_{27}9$.

129. 1) $(0,1)^{-\lg 0,3}$; 2) $10^{-\lg 4}$; 3) $5^{-\log_5 3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}$.

130. 1) $4\log_{\frac{1}{2}} 3-\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27-2\log_{\frac{1}{2}} 6$;

2) $\frac{2}{3}\lg 0,001+\lg\sqrt[3]{1000}-\frac{3}{5}\lg\sqrt{10\,000}$.

131. Вычислить с помощью микрокалькулятора:

1) $\log_8 7$; 2) $\log_3 12$; 3) $\log_{1,3} 0,17$; 4) $\log_{0,3} 8,1$.

132. Построить график функции:

1) $y=\log_4 x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$.

Какая из данных функций является возрастающей (убывающей)? При каких значениях x каждая функция принимает положительные (отрицательные) значения, равные нулю?

133. Выяснить, является возрастающей или убывающей функция:

1) $y=\log_{0,2} x$; 2) $y=\log_{\sqrt{5}} x$; 3) $y=\log_{\frac{1}{e}} x$; 4) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$.

134. Решить графически уравнение:

1) $\log_3 x=5-x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x=3x$.

135. Найти область определения функции:

1) $y=\log_7(5-2x)$; 2) $y=\log_2(x^2-2x)$.

Решить уравнение **(136—138)**.

136. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x)=-2$; 2) $\lg(x^2-2)=\lg x$.

137. 1) $\lg(x^2-2x)=\lg 30-1$; 2) $\log_3(2x^2+x)=\log_3 6-\log_3 2$;

3) $\lg^2 x-3\lg x=4$; 4) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6=0$.

138. 1) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$; 2) $\log_3(5-x)+\log_3(-1-x)=3$;

3) $\lg(x-2)+\lg x=\lg 3$; 4) $\log_{\sqrt{6}}(x-1)+\log_{\sqrt{6}}(x+4)=\log_{\sqrt{6}} 6$.

Решить неравенство **(139—141)**.

139. 1) $\log_2(x-5)\leqslant 2$; 2) $\log_3(7-x)>1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>-2$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(3-5x)<-3$.

140. 1) $\log_3(5-4x)<\log_3(x-1)$; 2) $\log_{0,3}(2x+5)\geqslant\log_{0,3}(x+1)$.

141. 1) $\lg(x^2+2x+2)<1$; 2) $\log_3(x^2+7x-5)>1$.

---

142. Вычислить:

1) $\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; 2) $\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{25\sqrt[4]{5}}$; 3) $2^{2-\log_2 5}$; 4) $3,6^{\log_{3,6} 10+1}$;

5) $2\log_5\sqrt{5}+3\log_2 8$; 6) $\log_2\log_2\log_2 2^{16}$.

143. Сравнить числа:

1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 2) $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{9}} 9}$ и $\sqrt{8}$.

144. Вычислить $\log_{30} 64$ с точностью до 0,001, зная, что $\lg 3 \approx 0{,}4771$, $\lg 5 \approx 0{,}6990$.

145. Вычислить $\log_{36} 15$ с точностью до 0,001, зная, что $\lg 3 \approx 0{,}4771$, $\lg 5 \approx 0{,}6990$.

146. Выяснить, при каких значениях x справедливо неравенство:

1) $\log_x 8 < \log_x 10$; 2) $\log_x \frac{3}{4} < \log_x \frac{1}{2}$.

147. Решить графически уравнение:

1) $\log_3 x = \frac{3}{x}$; 2) $2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Решить уравнение (148—152).

148. 1) $3^{4x}=10$; 2) $2^{3x}=3$; 3) $1{,}3^{3x-2}=3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5+4x}=1{,}5$;

5) $16^x-4^{x+1}-14=0$; 6) $25^x+2\cdot 5^x-15=0$.

149. 1) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}$;

2) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$;

3) $\log_3 x\cdot\log_2 x=4\log_3 2$; 4) $\log_5 x\cdot\log_3 x=9\log_5 3$.

150. 1) $\log_3(2-x^2)-\log_3(-x)=0$;

2) $\log_5(x^2-12)-\log_5(-x)=0$;

3) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{3x-7}=2$;

4) $\lg(x+6)-\lg\sqrt{2x-3}=\lg 4$.

151. 1) $\log_{\sqrt{2}} x+4\log_4 x+\log_8 x=13$;

2) $\log_{0,5}(x+2)-\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8)$.

152. 1) $\log_2\frac{2}{x-1}=\log_2 x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{10}{7-x}=\log_{\frac{1}{2}} x$;

3) $\lg\frac{x+8}{x-1}=\lg x$; 4) $\lg\frac{x-4}{x-2}=\lg x$.

153. Решить неравенство:

1) $\log_{\sqrt{6}}(x-4)+\log_{\sqrt{6}}(x+1)\leqslant 2$;

2) $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)+\log_{3\sqrt{2}}(x+12)\leqslant 2$;

3) $\log_3(8x^2+x)>2+\log_3 x^2+\log_3 x$;

4) $\log_2 x+\log_2(x-3)>\log_2 4$;

5) $\log_{\frac{1}{5}}(x-10)-\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\geqslant -1$;

6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)+\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+4)>-2$.

Решить уравнение (154—155).

154. 1) $\log_{\frac{1}{x}} 5+\log_{\frac{1}{x^2}} 12+\frac{1}{2}\log_x 3=1$;

2) $\frac{1}{2}\log_x 7-\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} 3-\log_{x^2} 28=1$.

155. 1) $3+2\log_{x+1} 3=2\log_3(x+1)$; 2) $1+2\log_{x+2} 5=\log_5(x+2)$;

3) $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$; 4) $\log_{3x+7}(5x+3)=2-\log_{5x+3}(3x+7)$.

Решить неравенство (156—158).

156. 1) $4\log_4 x-33\log_x 4\leqslant 1$; 2) $\log_x 3\leqslant 4(1+\log_{\frac{1}{3}} x)$;

3) $\log_{x+2} x^2>1$; 4) $\log_{x^2+2}(3x+6)\leqslant 1$.

157. 1) $\log_{3-x}\frac{4-x}{5-x}\leqslant 1$; 2) $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$.

158. $\log_{|2x+2|}(1-9^x)<\log_{|2x+2|}(1+3^x)+\log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right)$.

159. Доказать, что если последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией, то их логарифмы по одному и тому же основанию образуют арифметическую прогрессию.

160. Найти три последовательных члена геометрической прогрессии, если их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3.

161. Построить график функции: 1) $y=\frac{1}{\log_2 x}$; 2) $y=\frac{1}{\ln x}$.

Решить уравнение (162—163).

162. 1) $5x^{\log_3 2}+2^{\log_3 x}=24$; 2) $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\sqrt[3]{10}$.

163. $\log_2(2^x-5)-\log_2(2^x-2)=2-x$.

164. Решить неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2$; 2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$.

165. Решить уравнение $\log_2 x\cdot\log_2(x-3)+1=\log_2(x^2-3x)$.

166. Решить неравенство при различных значениях a:

$$\frac{1}{\log_a x-1}+\frac{1}{\log_a x^2+1}<-\frac{3}{2}.$$

167. Решить неравенство:

1) $\log_a(x-1)+\log_a x>2$; 2) $\log_a^2 x^2>1$.

Вопросы к главе VII

1. Что называется логарифмом числа 5 по основанию 2?
2. Сформулировать основное логарифмическое тождество.
3. Сформулировать основные свойства логарифмов.
4. Дать определение десятичного логарифма. Используя специальное обозначение десятичного логарифма, записать $\log_{10} 7$.
5. Дать определение натурального логарифма. Записать обозначение натурального логарифма числа x.
6. Чему равно приближенное значение числа e: 1) до десятых; 2) до сотых?
7. Записать формулу перехода от логарифма числа k по основанию q к логарифмам по основанию p. При каких значениях k, q и p имеет смысл эта формула?
8. Какова область определения логарифмической функции?
9. Каково множество значений логарифмической функции?
10. При каких значениях a логарифмическая функция $y=\log_a x$ является: 1) возрастающей; 2) убывающей?
11. Перечислить промежутки знакопостоянства логарифмической функции $y=\log_a x$ в зависимости от значений числа a.
12. Является ли функция $y=\log_a x$: 1) ограниченной сверху; 2) ограниченной снизу?
13. Через какую точку координатной плоскости проходят графики всех логарифмических функций? Почему?
14. При каких значениях x и y справедливо равенство $\log_7 (xy)=\log_7 x+\log_7 y$?

Проверь себя!

1. Вычислить:

   1) $\log_4 64$; 2) $\lg 0{,}01$; 3) $2^{\log_2 6}$;

   4) $3^{2\log_3 5}$; 5) $\log_2 68-\log_2 17$.

2. Построить схематически график функции:

   1) $y=\log_{0,3} x$; 2) $y=\log_4 x$.

3. Сравнить числа:

   1) $\log_{0,2} 8$ и $\log_{0,2} 7{,}5$; 2) $\log_5 0{,}8$ и $\log_5 1{,}3$.

4. Решить уравнение:

   1) $\log_4 (3x+1)=2$; 2) $\log_3 (x+2)+\log_3 x=1$;

   3) $\lg(x^2-6x+9)=\lg 3+\lg(x+3)$.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases}\ln x-\ln y=\ln 5,\\ x-3y=4.\end{cases}$

6. Решить неравенство:

   1) $\log_2 (x-1)\leq 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} (2-x)>-1$.

1. Выяснить, при каких значениях m имеет смысл выражение:

   1) $\log_2(m-1)$; 2) $\log_{m+1}3$; 3) $\log_m(m-1)$.

2. Решить графически уравнение $\log_2 x = 3 - x$.
3. Вычислить $25^{\log_5 4} - 10^{2-\lg 25} + 2^{3\log_2 3}$.
4. Решить уравнение:

   1) $\log_{2x+2}(2x^2-8x+6)=2$;

   2) $(\log_2 x)^2 + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$;

   3) $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5 = 1$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x\cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4. \end{cases}$$

6. Решить неравенство:

   1) $\lg(x^2-2x-2)\leqslant 0$; 2) $\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)) > 0$.

Историческая справка

Еще в XVI—XVII вв. практика поставила перед математиками задачу упрощения вычислений, связанных с расчетами сложных процентов в финансовых, страховых и кредитных делах. Тогда же ученые воспользовались идеей, в основе которой лежат свойства степеней. Эти свойства были известны еще Архимеду в III в. до н. э., который в своем сочинении «Псаммит» («Исчисление песчинок») рассматривал последовательности степеней одного и того же числа

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ \dots,\ a^n,\ \dots$$

и высказывал утверждение, что $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$.

Но чтобы воспользоваться этой идеей, нужны были таблицы, в которых сопоставлялись бы последовательности степеней чисел с последовательностями их показателей. Автором изобретения логарифмов и составителем первых таблиц логарифмов считают англичанина Дж. Непера (1550—1617), опубликовавшего в 1614 г. работу под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов». Непер также ввел и сам термин «логарифм», который возник из сочетания греческих слов λογοσ — отношение и αριθμος — число.

Самым удобным основанием для таблиц логарифмов является число 10, так как мы пользуемся в расчетах десятичной системой счисления. Действительно, любое положительное число N можно представить в стандартном виде $N = a\cdot 10^k$, где $k\in\mathbf{Z}$, $1\leqslant a<10$. Поскольку порядок числа k легко определяется, то для нахождения логарифма числа ($\lg N = k + \lg a$) достаточно иметь лишь таблицу мантисс — таблицу чисел $\lg a$, где $1 \leqslant a < 10$.

Таблицы десятичных логарифмов, которыми вплоть до появления микрокалькуляторов пользовались в России, разработал на основе неперовских таблиц отечественный педагог-математик В. М. Брадис (1890—1975).

На основе той же идеи замены произведения степеней суммой, а частного степеней разностью показателей этих степеней была создана логарифмическая линейка, которой пользовались более 300 лет инженеры и математики всего мира. Изобретателем логарифмической линейки (в 1624 г.) считается английский ученый Э. Гунтер.

Десятичные логарифмы в силу традиций и удобства использования до сих пор широко применяются в практике. Однако для математической науки и ее приложений более значимыми являются натуральные логарифмы. Значимость функции $y = \ln x$ объясняется тем, что в математике часто используются показательные функции с основанием e и соответственно обратные им функции.

Законченный вид теории логарифмической функции придал выдающийся математик XVIII в. Л. Эйлер (1707—1783). Отметим, что значительную часть своей жизни Эйлер, сын небогатого пастора из Базеля, провел в России, приняв в 1727 г. приглашение работать в только что организованной в Петербурге Академии наук. Ему принадлежат общие определения показательной и логарифмической функций как взаимно обратных, а также введение числа e. Развитие теории логарифмических функций после Эйлера происходило в основном в рамках математического анализа.

Глава VIII

Тригонометрические формулы

Математика есть такая наука, которая показывает, как из знаемых количеств находить другие, нам еще неизвестные.

Д. С. Аничков

§ 1. Радианная мера угла

Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности с центром O радиуса 1 (рис. 102). Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P, а положительным направлением на прямой направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмем радиус окружности. Отметим на прямой несколько точек ± 1, $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm\pi$, где $\pi \approx 3{,}14$ — иррациональное число. Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке P, будем мысленно наматывать ее на окружность. При этом точки числовой прямой с координатами, например, 1, $\frac{\pi}{2}$, -1, -2 перейдут соответственно в точки окружности M_1, M_2, M_3, M_4, такие, что длина дуги PM_1 равна 1, длина дуги PM_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и т. д.

Таким образом, каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.

Так как точке прямой с координатой 1 ставится в соответствие точка M_1, то естественно считать угол POM_1 единичным и мерой этого угла измерять другие углы. Например, угол POM_2 следует считать равным $\frac{\pi}{2}$. Такой способ измерения углов широко используется в математике и физике. В этом случае говорят, что углы измеряются в радианной мере, а угол POM_1 называют углом в один радиан (1 рад). Длина дуги окружности PM_1 равна радиусу. Рассмотрим окружность радиуса R и отметим на ней дугу PM длины R и угол POM (рис. 103).

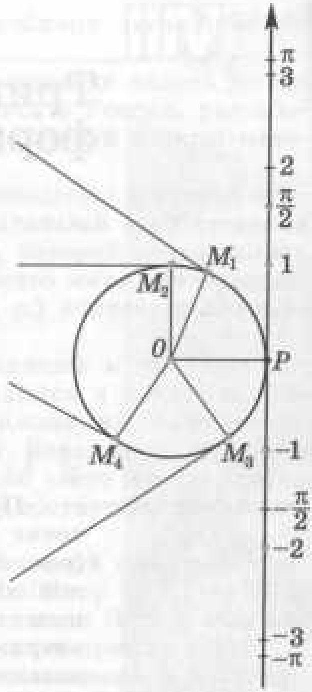


Рис. 102

Определение

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется *углом в один радиан*.

Найдем градусную меру угла в 1 радиан (записывают 1 рад).

Из курса геометрии известно, что дуге длиной πR (полуокружность) соответствует центральный угол в 180°, тогда дуге длиной R соответствует угол, в π раз меньший, т. е.

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

Так как $\pi \approx 3{,}14$, то 1 рад $\approx 57{,}3°$.

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^\circ. \quad (1)$$

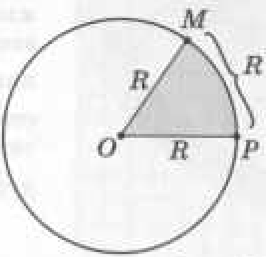


Рис. 103

Задача 1. Найти градусную меру угла, равного $\frac{3\pi}{4}$ рад.

▷ По формуле (1) находим:

$$\frac{3\pi}{4} \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4}\right)^\circ = 135°. ◀$$

Так как угол 180° равен π рад, то

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}.$$

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\alpha° = \frac{\pi}{180}\alpha \text{ рад}. \quad (2)$$

Задача 2. Найти радианную меру угла, равного: 45°; 15°.

▷ По формуле (2) находим: $45° = \frac{\pi}{180}\cdot 45$ рад $= \frac{\pi}{4}$ рад; $15° = \frac{\pi}{180}\cdot 15$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад. ◀

Приведем таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и радианной мерах.

Градусы	0	30	45	60	90	180
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают. Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 рад соответствует дуге, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад соответствует дуге, длина которой находится по формуле

$$l=\alpha R. \qquad (3)$$

Задача 3. Конец минутной стрелки Кремлевских курантов движется по окружности радиуса $R\approx 3{,}06$ м. Какой путь проходит конец стрелки за 15 мин?

▷ За 15 мин стрелка поворачивается на угол, равный $\frac{\pi}{2}$ рад. По формуле (3) при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ находим

$$l=\frac{\pi}{2}R\approx\frac{3{,}14}{2}\cdot 3{,}06 \text{ м}\approx 4{,}8 \text{ м}. ◀$$

Особенно простой вид формула (3) имеет в случае, когда радиус окружности $R=1$. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, соответствующего этой дуге, в радианах, т. е. $l=\alpha$. Этим объясняется удобство применения радианной меры в математике, физике, механике и др.

Задача 4. Доказать, что площадь S кругового сектора радиуса R, дуга которого содержит α рад, находится по формуле

$$S=\frac{R^2}{2}\alpha, \text{ где } 0<\alpha<\pi.$$

▷ Площадь кругового сектора в π рад (полукруга) равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Поэтому площадь сектора в 1 рад в π раз меньше, т. е. равна $\frac{\pi R^2}{2}:\pi$. Значит, площадь сектора в α рад равна $\frac{R^2}{2}\alpha$. ◀

Упражнения

1. Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:
1) 40°; 2) 120°; 3) 150°; 4) 75°; 5) 32°; 6) 140°.
2. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:
1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$; 4) 2; 5) 3; 6) 0,36.

3. (Устно.) Определить градусную и радианную меры углов: а) равностороннего треугольника; б) равнобедренного прямоугольного треугольника; в) квадрата.

---

4. Вычислить радиус окружности, если дуге длиной 0,36 м соответствует центральный угол в 0,9 рад.
5. Найти радианную меру угла, который соответствует дуге окружности длиной 3 см, если радиус окружности равен 1,5 см.
6. Дуге кругового сектора соответствует угол в $\frac{3\pi}{4}$ рад. Найти площадь сектора, если радиус круга равен 1 см.
7. Радиус круга равен 2,5 см, а площадь кругового сектора равна 6,25 см^2. Найти угол, который соответствует дуге этого кругового сектора.
8. Заполнить таблицу.

Градусы	0,5	36	159	108				
Радианы					$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{10}$	2,5	1,8

9. Заполнить таблицу.

Угол, °	30					
Угол, рад		$\frac{\pi}{5}$			22	
Радиус, см	2		10	5		
Длина дуги, см		2	5			10
Площадь сектора, см^2				50	25	50

10. Выразить в радианах дополнение угла, равного 132°, до полного.
11. Записать градусные и радианные меры углов: 1) правильного шестиугольника; 2) правильного двенадцатиугольника.
12. В равнобедренном треугольнике угол при вершине в 2,5 раза меньше угла при основании. Выразить углы треугольника в градусной и радианной мерах.
13. Углы треугольника относятся между собой как 1:3:5. Выразить углы этого треугольника:
1) в долях прямого угла (d); 2) в градусах; 3) в радианах.

§ 2. Поворот точки вокруг начала координат

В предыдущем параграфе использовался наглядный способ установления соответствия между точками числовой прямой и точками окружности. Покажем теперь, как можно установить соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют *единичной окружностью*. Введем понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α — любое действительное число.

1. Пусть $\alpha > 0$. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки $P(1; 0)$ против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 104). Конечную точку пути обозначим M.

В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α рад.

2. Пусть $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α рад означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длиной $|\alpha|$ (рис. 105).

Поворот на 0 рад означает, что точка остается на месте.

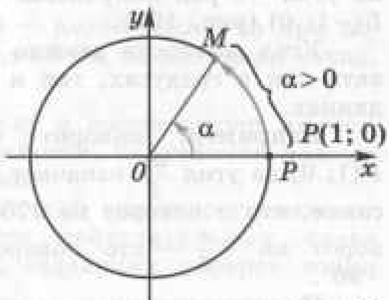


Рис. 104

Рассмотрим несколько примеров.

1) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ рад получается точка $M(0; 1)$ (рис. 106).

2) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад получается точка $N(0; -1)$ (рис. 106).

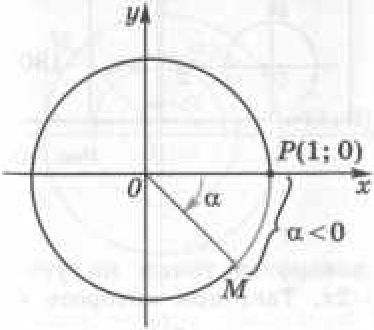


Рис. 105

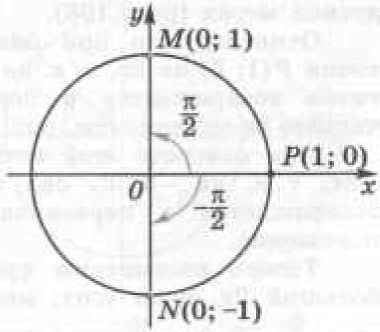


Рис. 106

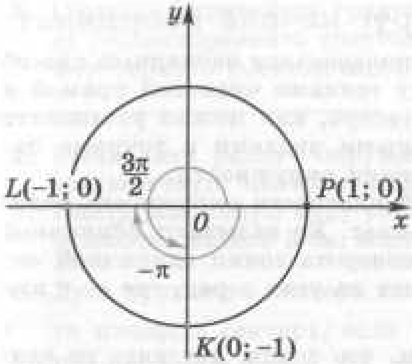


Рис. 107

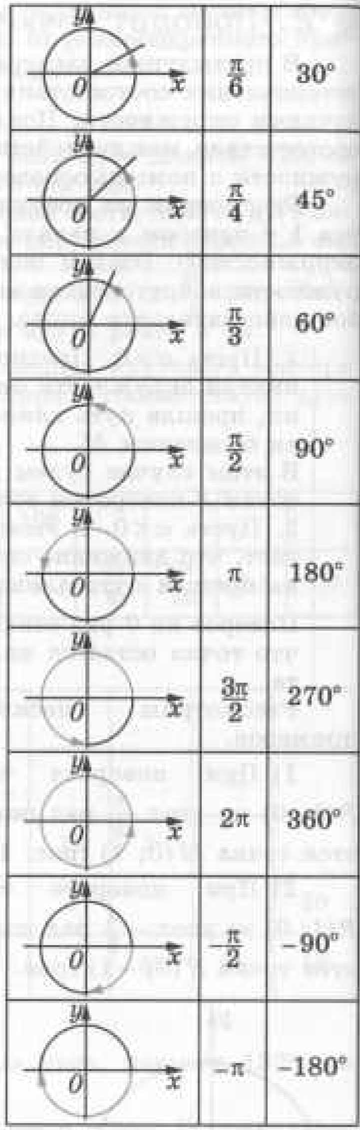


Рис. 108

3) При повороте точки $P(1;\,0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад получается точка $K(0;\,-1)$ (рис. 107).

4) При повороте точки $P(1;\,0)$ на угол $-\pi$ рад получается точка $L(-1;\,0)$ (рис. 107).

Угол поворота можно задавать как в градусах, так и в радианах.

Например, поворот точки $P(1;\,0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает то же самое, что и поворот на $270°$; поворот на $-\frac{\pi}{2}$ — это поворот на $-90°$.

Проиллюстрируем повороты точки $P(1;\,0)$ на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мерах (рис. 108).

Отметим, что при повороте точки $P(1;\,0)$ на 2π, т. е. на $360°$, точка возвращается в первоначальное положение (см. рис. 108).

При повороте этой точки на -2π, т. е. на $-360°$, она также возвращается в первоначальное положение.

Теперь рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший 2π, и на угол, меньший -2π. Так, при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против

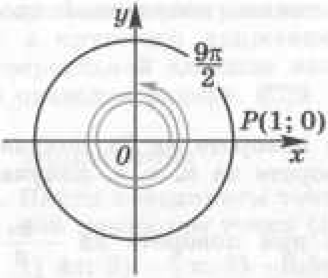


Рис. 109

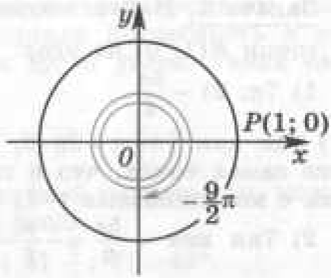


Рис. 110

часовой стрелки и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ (рис. 109). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}=-2\cdot 2\pi-\frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении (рис. 110).

Заметим, что при повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 109).

Вообще если $\alpha=\alpha_0+2\pi k$, где k — целое число, то при повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.

Каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α рад.

Одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha+2\pi k$, где k — целое число, задающих поворот точки $P(1;\ 0)$ в точку M (рис. 111).

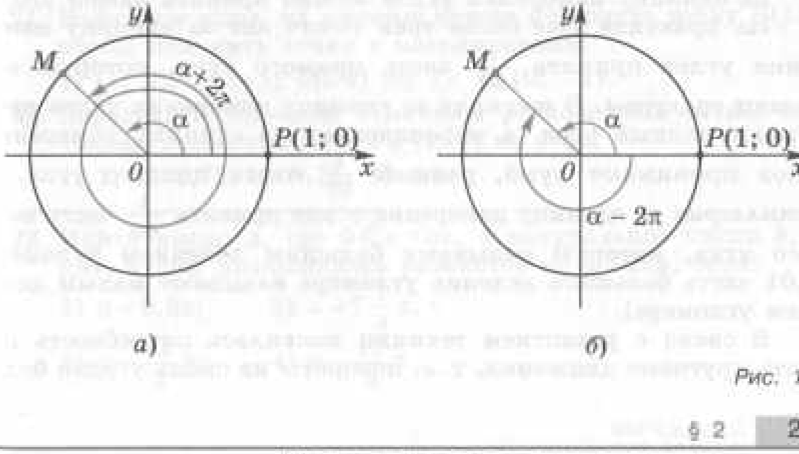


Рис. 111

Задача 1. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$.

▷ 1) Так как $7\pi=\pi+2\pi\cdot 3$, то при повороте на 7π получается та же самая точка, что и при повороте на π, т. е. получается точка с координатами $(-1;\ 0)$.

2) Так как $-\frac{5\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}-2\pi$, то при повороте на $-\frac{5\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на $-\frac{\pi}{2}$, т. е. получается точка с координатами $(0;\ -1)$.

Ответ. 1) $(-1;\ 0)$; 2) $(0;\ -1)$. ◀

Задача 2. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $(1;\ 0)$, чтобы в результате получить точку $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

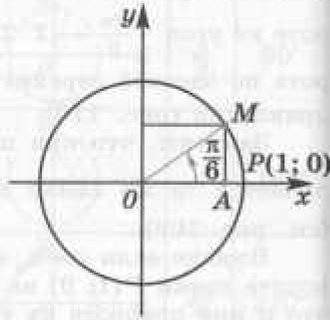


Рис. 112

▷ Из прямоугольного треугольника AOM (рис. 112) следует, что угол AOM равен $\frac{\pi}{6}$, т. е. один из углов поворота равен $\frac{\pi}{6}$. Следовательно, все углы, на которые нужно повернуть точку $(1;\ 0)$, чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, выражаются так: $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, где $k\in Z$. ◀

Об измерении углов на практике

Понятие об измерении углов известно из геометрии. За единицу измерения углов принимают некоторый определенный угол и с его помощью измеряют другие углы.

За единицу измерения углов можно принять любой угол.

На практике уже более трех тысяч лет за единицу измерения углов принята $\frac{1}{90}$ часть прямого угла, которую называют градусом. В *технике* за единицу измерения углов принимают полный угол, в мореплавании за единицу измерения углов принимают румб, равный $\frac{1}{32}$ части полного угла. В *артиллерии* за единицу измерения углов принята $\frac{1}{60}$ часть полного угла, которую называют большим делением угломера (0,01 часть большого деления угломера называют малым делением угломера).

В связи с развитием техники появилась потребность изучать круговые движения, т. е. повороты на сколь угодно большие углы, а также различные колебательные процессы, связанные с круговым движением. Возникла потребность в новой универсальной единице измерения дуг и углов. Такой единицей оказался радиан.

Упражнения

14. Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1; 0) на угол:

1) 4π; 2) $-\frac{3}{2}\pi$; 3) $-6{,}5\pi$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{3}$; 6) $-45°$.

На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки (1; 0) на заданный угол (**15—17**).

15. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{3}{4}\pi$;

4) $\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{5}{4}\pi$; 6) $-225°$.

16. 1) $\frac{\pi}{4}\pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3}\pm 2\pi$;

3) $\frac{2\pi}{3}\pm 6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4}\pm 8\pi$.

17. 1) $\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; 2) $-\frac{3}{2}\pi+2\pi k,\ k\in Z$.

18. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на заданный угол:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π; 5) $540°$; 6) $810°$.

19. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на заданный угол ($k\in Z$):

1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; 3) $\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

20. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на заданный угол ($k\in Z$):

1) $\frac{\pi}{2}\pm\pi$; 2) $\frac{\pi}{4}\pm\pi$; 3) $-\frac{3\pi}{2}+\pi k$; 4) $-\pi+\pi k$.

21. Найти все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) (1; 0); 2) (–1; 0); 3) (0; 1); 4) (0; –1).

22. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95.

---

23. Найти число x, где $0\leqslant x<2\pi$, и натуральное число k, такие, чтобы выполнялось равенство $a=x+2\pi k$, если:

1) $a=9{,}8\pi$; 2) $a=7\frac{1}{3}\pi$;

3) $a=\frac{11}{2}\pi$; 4) $a=\frac{17}{3}\pi$.

24. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

1) $4{,}5\pi$; 2) $5{,}5\pi$; 3) -6π; 4) -7π.

25. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на заданный угол ($k \in \mathbf{Z}$):

1) $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$;

3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k$.

26. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

27. Из множества углов, выраженных формулой $\alpha=\frac{\pi}{6}(6k-1)$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, найти: 1) наименьший положительный угол; 2) наименьший по модулю угол.

28. Каждый из следующих углов представить в виде суммы $360°k+\alpha$, где $k \in \mathbf{Z}$ и α — неотрицательный угол, меньший $360°$:

1) $450°$; 2) $1100°$; 3) $-700°$;

4) $-90°$; 5) $1440°$; 6) $-1760°$.

29. Две точки A и B, находящиеся на противоположных концах диаметра, начинают двигаться по окружности в одном направлении. Точка A в каждую минуту описывает дугу в $60°$, точка B — дугу в $48°$. Через сколько минут после начала движения произойдет первое, второе, k-е совпадение точек?

30. Две точки A и B, находящиеся на концах взаимно перпендикулярных диаметров окружности (рис. 113), начинают одновременно двигаться по окружности: точка A — по часовой стрелке, описывая каждую минуту дугу в $20°$, точка B — против часовой стрелки, описывая каждую минуту дугу в $25°$. Через сколько минут произойдет первое, второе, k-е совпадение точек?

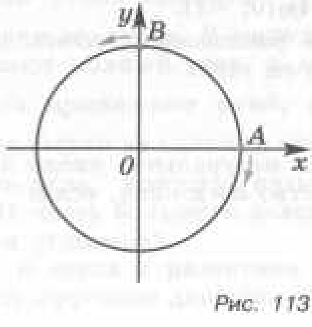


Рис. 113

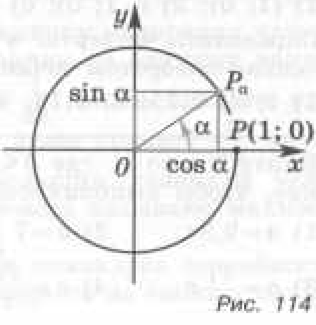


Рис. 114

31. Выразить румб: 1) в градусах и минутах; 2) в радианах.

32. Для измерения географической долготы места употребляют особую единицу, называемую часом. Час долготы равен $\frac{1}{24}$ части полного угла (360°), на который поворачивается Земля за сутки. Один час содержит 60 мин, а каждая минута содержит 60 с. Выразить 1 ч, 1 мин и 1 с долготы в градусах, минутах и секундах дуги.

§ 3. Определение синуса, косинуса и тангенса угла

В курсе геометрии были введены понятия синуса, косинуса и тангенса угла, выраженного в градусах. Этот угол рассматривался в промежутке от 0° до 180°. Синус и косинус произвольного угла определяются следующим образом (рис. 114):

Определения

Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается $\sin\alpha$).

Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается $\cos\alpha$).

В этих определениях угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах. Например, при повороте точки (1; 0) на угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. на угол 90°, получается точка (0; 1). Ордината точки (0; 1) равна 1, поэтому $\sin\frac{\pi}{2}=\sin 90°=1$; абсцисса этой точки равна 0, поэтому $\cos\frac{\pi}{2}=\cos 90°=0$.

Заметим, что приведенные определения синуса и косинуса в случае, когда угол заключен в промежутке от 0° до 180°, совпадают с определениями, известными из курса геометрии.

Задача 1. Найти $\sin(-\pi)$ и $\cos(-\pi)$.

▷ Точка (1; 0) при повороте на угол $-\pi$ перейдет в точку (−1; 0) (рис. 115). Следовательно, $\sin(-\pi)=0$, $\cos(-\pi)=-1$. ◁

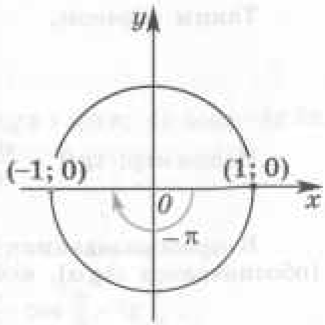


Рис. 115

Задача 2. Найти $\sin 270°$ и $\cos 270°$.

▷ Точка (1; 0) при повороте на угол 270° перейдет в точку (0; −1) (рис. 116). Следовательно, $\cos 270°=0$, $\sin 270°=-1$. ◁

Напомним, что меру угла α (в радианах) можно рассматривать как действительное число. Поэтому $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно рассматривать как числовые выражения. Например, в уравнении $\sin x = a$, где a — заданное число, считается, что x — неизвестное число.

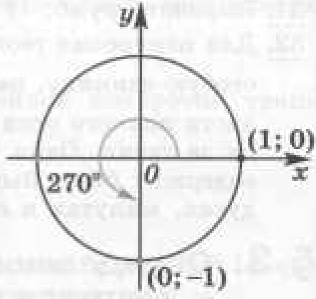


Рис. 116

Задача 3. Решить уравнение $\sin x = 0$.

▷ Решить уравнение $\sin x = 0$ — это значит найти все углы, синус которых равен нулю. Ординату, равную нулю, имеют две точки единичной окружности (1; 0) и (–1; 0) (см. рис. 115). Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ и т. д. Следовательно,

$$\sin x = 0 \text{ при } x = \pi k, \text{ где } k \in \mathbf{Z}.$$

Задача 4. Решить уравнение:

$$1)\ \sin x = 1;\ 2)\ \cos x = 1.$$

▷ 1) Ординату, равную единице, имеет точка (0; 1) единичной окружности. Эта точка получается из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Абсциссу, равную единице, имеет точка, полученная из точки (1; 0) поворотом на углы $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ. 1) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◀

Определение

Тангенсом угла α называется отношение синуса угла к его косинусу (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$).

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Например: $\operatorname{tg} 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$

В преобразованиях иногда используется котангенс угла α (обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$), который определяется формулой

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Например:

$$\operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{\cos 270^\circ}{\sin 270^\circ} = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Отметим, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого угла, а их значения заключены от -1 до 1; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\cos\alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\sin\alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 5. Вычислить $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

▷ $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2{,}5.$ ◀

Упражнения

33. Отметить на единичной окружности точки, соответствующие числу α, если:

1) $\sin\alpha = 1$; 2) $\sin\alpha = 0$; 3) $\cos\alpha = -1$; 4) $\cos\alpha = 0$;

5) $\sin\alpha = -0{,}6$; 6) $\sin\alpha = 0{,}5$; 7) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

34. Вычислить:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2}$; 2) $\sin 0 - \cos 2\pi$;

3) $\sin\pi + \sin 1{,}5\pi$; 4) $\sin 0 + \cos 2\pi$.

35. Найти значения синуса и косинуса числа β, если:

1) $\beta = 3\pi$; 2) $\beta = 4\pi$; 3) $\beta = 3{,}5\pi$;

4) $\beta = \frac{5}{2}\pi$; 5) $\beta = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\beta = (2k+1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Вычислить (36—37).

36. 1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin\pi k + \cos 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

37. 1) $\operatorname{tg}\pi + \cos\pi$; 2) $\operatorname{tg} 0^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ$; 3) $\operatorname{tg}\pi + \sin\pi$; 4) $\cos\pi - \operatorname{tg} 2\pi$.

38. Найти значение выражения:

1) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

2) $5\sin\frac{\pi}{4} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 5\cos\frac{\pi}{4} - 10\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) : \cos\frac{\pi}{6}$; 4) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

39. Решить уравнение:

1) $2\sin x=0$; 2) $\frac{1}{2}\cos x=0$; 3) $\cos x-1=0$; 4) $1-\sin x=0$.

40. Выяснить, может ли $\sin\alpha$ быть равным:

1) 0,049; 2) −0,875; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2+\sqrt{2}$.

---

41. Найти значение выражения:

1) $0{,}5\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$ при $\alpha=60°$;

2) $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}$ при $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

42. Найти значение выражения:

1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 2) $2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}$.

43. Решить уравнение:

1) $\sin x=-1$; 2) $\cos x=-1$; 3) $\sin 3x=0$;

4) $\cos 0{,}5x=0$; 5) $\sin\left(\frac{x}{2}+6\pi\right)=1$; 6) $\cos(5x+4\pi)=1$.

44. Используя микрокалькулятор, проверить равенство:

1) $\sin 60°\approx0{,}866$; 2) $\cos 45°\approx0{,}707$;

3) $\cos\frac{\pi}{5}\approx0{,}996$; 4) $\sin\frac{\pi}{13}\approx0{,}225$.

45. Вычислить с точностью до 0,01, используя микрокалькулятор:

1) $\cos 4{,}81$; 2) $\cos 45°12'$; 3) $\cos\frac{10}{7}\pi$; 4) $\sin\frac{19}{9}\pi$.

46. Выяснить, что больше:

1) $\sin 20°$ или $\sin 20°\cdot\operatorname{tg}40°$; 2) $\cos 42°$ или $\cos 42°\cdot\operatorname{tg}48°$.

47. Доказать, что всякая хорда единичной окружности равна удвоенному синусу половины центрального угла, соответствующего этой хорде.

48. Сравнить с нулем разность:

1) $\cos\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{ctg}1$; 2) $\operatorname{tg}1-\sin\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)$.

§ 4. Знаки синуса, косинуса и тангенса

1. Знаки синуса и косинуса.

Пусть точка (1; 0) движется по единичной окружности против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти (квадранте), ординаты и абсциссы положительны. Поэтому $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Для точек, расположенных во второй четверти, ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно,

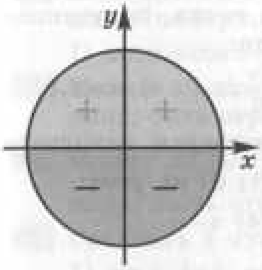


Рис. 117

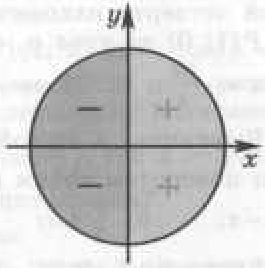


Рис. 118

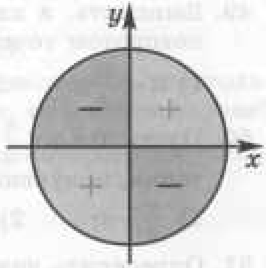


Рис. 119

$\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Аналогично в третьей четверти $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, а в четвертой четверти $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ (рис. 117, 118). При дальнейшем движении точки по окружности знаки синуса и косинуса определяются тем, в какой четверти окажется точка. Если точка (1; 0) движется по часовой стрелке, то знаки синуса и косинуса также определяются тем, в какой четверти окажется точка.

Задача 1. Выяснить знаки синуса и косинуса угла:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) 745°; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

▷ 1) Углу $\frac{3\pi}{4}$ соответствует точка единичной окружности, расположенная во второй четверти. Поэтому $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) Так как $745° = 2\cdot 360° + 25°$, то повороту точки (1; 0) на угол 745° соответствует точка, расположенная в первой четверти. Поэтому $\sin 745° > 0$, $\cos 745° > 0$.

3) Так как $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, то при повороте точки (1; 0) на угол $-\frac{5\pi}{7}$ получается точка третьей четверти. Поэтому $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ◀

2. Знаки тангенса.

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha > 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, и $\operatorname{tg}\alpha < 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют противоположные знаки. Знаки тангенса в различных четвертях показаны на рисунке 119.

Задача 2. Выяснить знак тангенса угла: 1) 260°; 2) 3.

▷ 1) Так как $180° < 260° < 270°$, то $\operatorname{tg} 260° > 0$.

2) Так как $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, то $\operatorname{tg} 3 < 0$. ◀

Упражнения

49. Выяснить, в какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α, если:

1) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 2) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=-\frac{7\pi}{6}$; 4) $\alpha=4{,}8$.

50. Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Выяснить, в какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

1) $\frac{\pi}{2}-\alpha$; 2) $\alpha-\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}+\alpha$; 4) $\pi-\alpha$.

51. Определить знак числа $\sin\alpha$, если:

1) $\alpha=-\frac{33\pi}{7}$; 2) $\alpha=-0{,}1\pi$; 3) $\alpha=5{,}1$; 4) $\alpha=-470°$.

52. Определить знак числа $\cos\alpha$, если:

1) $\alpha=\frac{7}{6}\pi$; 2) $\alpha=4{,}6$; 3) $\alpha=-5{,}3$; 4) $\alpha=-150°$.

53. Определить знак числа $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\alpha=\frac{12}{5}\pi$; 2) $\alpha=3{,}7$; 3) $\alpha=-1{,}3$; 4) $\alpha=283°$.

54. Определить знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{3}{2}\pi<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; 3) $\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi$; 4) $2\pi<\alpha<2{,}5\pi$.

55. Определить знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\alpha=1$; 2) $\alpha=3$; 3) $\alpha=-3{,}4$; 4) $\alpha=-1{,}3$.

---

56. Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Определить знак числа:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\cos(\alpha-\pi)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$; 6) $\sin(\pi-\alpha)$.

57. Выяснить, каковы знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $3\pi<\alpha<\frac{10\pi}{3}$; 2) $\frac{5\pi}{2}<\alpha<\frac{11\pi}{4}$.

58. Найти значения углов α, заключенных в промежутке от 0 до 2π, знаки синуса и косинуса которых совпадают; различны.

59. Определить знак числа:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$.

60. Сравнить числа:

1) $\sin 0{,}7$ и $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ и $\cos 2{,}3$.

61. Решить уравнение:

1) $\sin(5\pi+x)=1$; 2) $\cos(x+3\pi)=0$;

3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=-1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi+x\right)=-1$.

62. Выяснить, в какой четверти находится точка, соответствующая числу α, если:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=-1{,}4$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}4$.

63. Может ли $\sin\alpha$ ($\cos\alpha$), где α — угол некоторого треугольника, быть отрицательным? Если может, то в каком случае?

64. Может ли $\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, где α — угол некоторого треугольника, быть отрицательным?

65. Сравнить с нулем:

1) $\sin 5\cdot \operatorname{tg} 5\cdot \cos 5$; 2) $\sin 3\cdot \operatorname{tg} 4\cdot \cos 2$.

§ 5. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

Выясним зависимость между синусом и косинусом.

Пусть точка $M(x;\ y)$ единичной окружности получена поворотом точки $(1;\ 0)$ на угол α (рис. 120). Тогда по определению синуса и косинуса $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$.

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты $(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$. Следовательно,

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \qquad (1)$$

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется *основным тригонометрическим тождеством*.

Из равенства (1) можно $\sin\alpha$ выразить через $\cos\alpha$, а $\cos\alpha$ выразить через $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

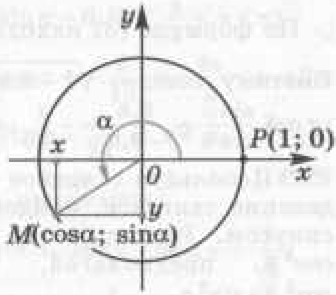


Рис. 120

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Задача 1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

▷ Воспользуемся формулой (2). Так как $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha<0$, т. е. в формуле (2) перед корнем нужно поставить знак «–»:

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}. \ ◀$$

Задача 2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

▷ Так как $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$, то $\cos\alpha>0$, поэтому в формуле (3) перед корнем нужно поставить знак «+»:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}. \blacktriangleleft$$

Выясним теперь зависимость между тангенсом и котангенсом. По определению $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Перемножая почленно эти равенства, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. \tag{4}$$

Из равенства (4) можно выразить $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ и наоборот:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \tag{5}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{6}$$

Равенства (4)—(6) справедливы при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Задача 3. Вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=13$.

▷ По формуле (6) находим $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{13}$. ◀

Задача 4. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

▷ По формуле (3) находим $\cos\alpha$. Так как $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то $\cos\alpha<0$. Поэтому $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}64}=-0{,}6$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0{,}8}{-0{,}6}=-\frac{4}{3}$. ◀

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдем зависимость между тангенсом и косинусом. Разделим обе части равенства $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ на $\cos^2\alpha$, предполагая, что $\cos\alpha\neq0$. Получим равенство $\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{7}$$

Эта формула верна, если $\cos\alpha\neq0$, т. е. при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Из нее можно выразить тангенс через косинус и косинус через тангенс.

Задача 5. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

▷ Из формулы (7) получаем $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}-1=\frac{16}{9}$.

Тангенс во второй четверти отрицателен, поэтому $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$. ◀

Задача 6. Вычислить $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

▷ Из формулы (7) находим $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{10}$. Так как $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$ и поэтому $\cos\alpha=-\sqrt{0,1}$. ◀

Упражнения

66. Выяснить, может ли синус (косинус) принимать значения: $0{,}03$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{13}$; $-\frac{13}{11}$; $\sqrt{2}$.

67. Выяснить, могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$;

3) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{5}$ и $\cos\alpha=\frac{\sqrt{23}}{5}$; 4) $\sin\alpha=0{,}2$ и $\cos\alpha=0{,}8$.

68. Вычислить:

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

69. По одному из данных чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ найти остальные три:

1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; 2) $\sin\alpha=0{,}8$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha=-3$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; 4) $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

5) $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{24}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

---

70. Выяснить, какие значения может принимать:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{5}$; 2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; 4) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

71. Выяснить, могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{24}}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\cos\alpha=\frac{3}{4}$.

72. Пусть α — один из углов прямоугольного треугольника. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{11}$.

73. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=2$. Найти значение выражения:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

3) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}$; 4) $\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

74. Известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Найти:

1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

75. Упростить:

1) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\frac{1}{\sin^2\alpha}$;

3) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha+1)$; 4) $(1+\sin^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha-\frac{1}{\sin^2\alpha}$;

5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$; 6) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

76. Известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=p$. Найти:

1) $\sin\alpha-\cos\alpha$; 2) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

77. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$. Найти:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

§ 6. Тригонометрические тождества

Задача 1. Доказать, что при $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, справедливо равенство $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

▷ По определению $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, и поэтому

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Эти преобразования верны, так как $\sin\alpha\neq0$ при $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$. ◀

Определение

Равенство, справедливое для всех допустимых значений входящих в него букв (т. е. таких, при которых его левая и правая части имеют смысл), называют *тождеством*, а задачи на доказательство таких равенств называют задачами на доказательство тождеств.

Обычно при доказательстве тригонометрических тождеств или при упрощении выражений допустимые значения углов не устанавливают, если это не требуется в условии задачи.

Задача 2. Доказать тождество $\cos^2\alpha=(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$.

▷ $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$. ◀

Задача 3. Доказать тождество $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

▷ Покажем, что разность между левой и правой частями равна 0:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=0. ◀$$

При решении задач 1—3 использовались следующие способы доказательства тождеств: преобразование левой части к правой; преобразование правой части к левой; установление того, что разность между левой и правой частями равна нулю. Иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием его левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Задача 4. Доказать тождество $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

$$\triangleright\ \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. ◀

Задача 5. Упростить выражение $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

$$\triangleright\ \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha.\ ◀$$

Упражнения

78. Доказать тождество:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$;

2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\cos^2\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$; 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$;

5) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=1$; 6) $\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha=1$.

79. Упростить выражение:

1) $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha-2\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

80. Упростить выражение и найти его значение:

1) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) $\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

3) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

4) $\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

81. Доказать тождество:

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=1$;

2) $\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

---

82. Упростить выражение:

1) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha-1$; 2) $1-\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$;

3) $1+\mathrm{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

83. Доказать тождество:

1) $(1-\cos 2\alpha)(1+\cos 2\alpha)=\sin^2 2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\dfrac{1}{1+\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;

5) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$; 6) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=1$; 8) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

84. Показать, что значение выражения $(a\sin\beta+b\cos\beta)^2+(b\sin\beta-a\cos\beta)^2$ не зависит от величины угла β.

85. Выразить:

1) $\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ через $\cos\alpha$;

2) $\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ через $\sin\alpha$.

86. Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=3$. Найти $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$.

87. Решить уравнение:

1) $2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x=1$;

2) $2\sin^2 x+3\cos^2 x-2=0$;

3) $3\cos^2 x-2\sin x=3-3\sin^2 x$;

4) $\cos^2 x-\sin^2 x=2\sin x-1-2\sin^2 x$.

88. Найти значение выражения $\mathrm{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}+\mathrm{ctg}^2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=5$.

89. Найти значение выражения $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}6$.

90. Найти значение выражения $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$, если $\cos\alpha-\sin\alpha=0{,}2$.

91. Доказать тождество:

1) $\sin^3\alpha(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)+\cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\,\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

2) $1-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

3) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-2\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$;

4) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

§ 7. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки $P(1; 0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 121). Тогда ось Ox делит угол M_1OM_2 пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ox.

Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка M_1 имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, точка M_2 имеет координаты $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$. Следовательно,

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha. \qquad (2)$$

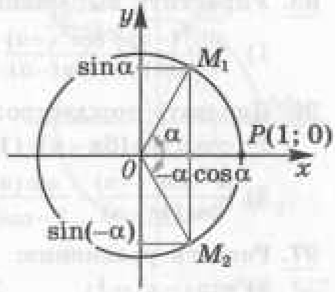


Рис. 121

Используя определение тангенса, получаем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \qquad (3)$$

Формулы (1)—(2) справедливы при любых α, а формула (3) — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Можно показать, что если $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, то

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Формулы (1)—(3) позволяют сводить вычисление значений синуса, косинуса и тангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов. Например,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Упражнения

92. Вычислить:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $\cos(-\pi) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\dfrac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

93. Упростить выражение:

1) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha\sin(-\alpha)$;

3) $\dfrac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 4) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

94. Вычислить:

1) $\dfrac{2-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

2) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

95. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

96. Доказать тождество:

1) $\cos\alpha\sin(6\pi-\alpha)\cdot(1+\operatorname{ctg}^2(-\alpha))=\operatorname{ctg}(-\alpha)$;

2) $\dfrac{1-\sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin(\alpha-2\pi)}{1-\cos^2(-\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha$.

97. Решить уравнение:

1) $\sin(-x)=1$; 2) $\cos(-2x)=0$;

3) $\cos(-2x)=1$; 4) $\sin(-2x)=0$;

5) $\cos^2(-x)+\sin(-x)=2-\sin^2 x$;

6) $1-\sin^2(-x)+\cos(4\pi-x)=\cos(x-2\pi)$.

98. Может ли синус отрицательного угла быть числом положительным? Привести пример.

99. Сравнить с нулем:

1) $\sin(-110^\circ)\cos(-110^\circ)\operatorname{tg}(-110^\circ)$;

2) $\sin(-4)\cos(-5)\operatorname{tg}(-1)$.

§ 8. Формулы сложения

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha\pm\beta)$ и $\sin(\alpha\pm\beta)$ через синусы и косинусы углов α и β.

Теорема

Для любых α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \quad (1)$$

○ Пусть точки M_α, $M_{-\beta}$ и $M_{\alpha+\beta}$ получены поворотом точки $M_0(1;\ 0)$ на углы α, $-\beta$ и $\alpha+\beta$ соответственно (рис. 122).

По определению синуса и косинуса эти точки имеют следующие координаты: $M_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, $M_{-\beta}(\cos(-\beta);\ \sin(-\beta))$,

$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta)).$$

Так как $\angle M_0OM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha$, то равнобедренные треугольники $M_0OM_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}OM_\alpha$ равны и, значит, равны их основания $M_0M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}M_\alpha$. Следовательно, $(M_0M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_\alpha)^2$.

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2 + (-\sin(\alpha+\beta))^2 = (\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2 + (\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2.$$

Преобразуем это равенство, используя формулы (1) и (2) из § 7:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta +$$
$$+ 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha.$$

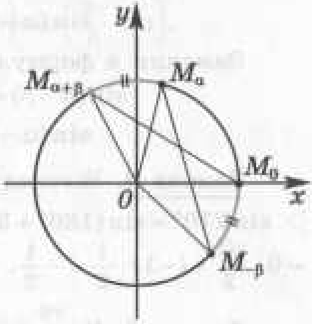


Рис. 122

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем

$$2-2\cos(\alpha+\beta) =$$
$$= 2-2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,

что и требовалось доказать ●

Задача 1. Вычислить $\cos 75°$.

▷ По формуле (1) находим $\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. ◀

Заменив в формуле (1) β на $-\beta$, получим

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

$$\mathbf{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.} \quad (2)$$

Задача 2. Вычислить $\cos 15°$.

▷ По формуле (2) получаем

$$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \text{ ◀}$$

Задача 3. Доказать формулы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha. \quad (3)$$

▷ При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ по формуле (2) получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta, \text{ т. е.}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \sin\beta. \quad (4)$$

Заменив в этой формуле β на α, получим $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$. Полагая в формуле (4) $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, имеем $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$. ◀

Используя формулы (1)—(3), выведем формулы сложения для синуса: $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}. \quad (5)$$

Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$, получаем

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

$$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}. \quad (6)$$

Задача 4. Вычислить $\sin 210°$.

▷ $\sin 210°=\sin(180°+30°)=\sin 180°\cos 30°+\cos 180°\sin 30°=$ $=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$. ◀

Задача 5. Вычислить $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$.

▷ $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\sin\left(\frac{8\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\pi=0$. ◀

Задача 6. Доказать равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (7)$$

▷ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$. Разделив числитель и знаменатель последней дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta$, получим формулу (7). ◀

Формула (7) может быть полезна при вычислениях. Например, $\operatorname{tg}225°=\operatorname{tg}(180°+45°)=\frac{\operatorname{tg}180°+\operatorname{tg}45°}{1-\operatorname{tg}180°\operatorname{tg}45°}=1$.

Упражнения

100. С помощью формул сложения вычислить:

1) $\cos 135°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\cos 150°$; 4) $\cos 240°$.

101. Найти значение выражения:

1) $\cos 57°30'\cos 27°30'+\sin 57°30'\sin 27°30'$;

2) $\cos 19°30'\cos 25°30'-\sin 19°30'\sin 25°30'$;

3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;

4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

102. Вычислить:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

103. Упростить выражение:

1) $\cos 3\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin 3\alpha$; 2) $\cos 5\beta\cos 2\beta+\sin 5\beta\sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

104. Найти значение выражения:

1) $\sin 73^\circ\cos 17^\circ+\cos 73^\circ\sin 17^\circ$;

2) $\sin 73^\circ\cos 13^\circ-\cos 73^\circ\sin 13^\circ$;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

105. Вычислить:

1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

106. Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;

2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

---

107. Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$, и $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

108. Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, и $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

109. Вычислить $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, и $\cos\beta=\frac{8}{17}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$.

110. Упростить выражение:

1) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$;

3) $\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha$; 4) $\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha$.

111. Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; 2) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}$;

3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$; 4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha$.

Вычислить (112—113).

112. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}29^\circ+\operatorname{tg}31^\circ}{1-\operatorname{tg}29^\circ\operatorname{tg}31^\circ}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi-\operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}{1+\operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi\operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}$;

3) $\dfrac{1+\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}55^\circ}{\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}10^\circ}$; 4) $\dfrac{1-\operatorname{tg}13^\circ\operatorname{tg}17^\circ}{\operatorname{tg}17^\circ+\operatorname{tg}13^\circ}$.

113. 1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta=2{,}4$;

2) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg}\beta=-1$.

114. Упростить выражение $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$.

115. Упростить выражение:

1) $\sin\alpha\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos\alpha$; 2) $\sin5\beta\cos3\beta-\sin3\beta\cos5\beta$.

116. Решить уравнение:

1) $\cos6x\cos5x+\sin6x\sin5x=-1$;

2) $\sin3x\cos5x-\sin5x\cos3x=-1$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos x=1$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)+\sin\dfrac{x}{2}=1$.

Упростить выражение (117—118).

117. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; 2) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$;

3) $\sin6\alpha\cdot\operatorname{ctg}3\alpha-\cos6\alpha$; 4) $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4}+\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

5) $\cos2\alpha+\sin2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; 6) $\cos2\alpha-\sin2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

118. 1) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$;

2) $(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

3) $\dfrac{3\operatorname{ctg}^2 15^\circ-1}{3-\operatorname{ctg}^2 15^\circ}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}50^\circ-\operatorname{tg}5^\circ-1}{\operatorname{tg}50^\circ\operatorname{tg}5^\circ}$.

119. Доказать, что если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$ и $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, то:

1) $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$; 2) $(1-\operatorname{ctg}\alpha)(1-\operatorname{ctg}\beta)=2$.

120. Доказать тождество:

1) $\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta+2\sin(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha$;

2) $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

§ 9. Синус, косинус и тангенс двойного угла

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \quad (1)$$

<u>Задача 1.</u> Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▷ По формуле (1) находим

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot\cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$ и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1{,}2\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$. ◀

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \quad (2)$$

<u>Задача 2.</u> Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

▷ Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot(0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82$. ◀

<u>Задача 3.</u> Упростить выражение $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

▷ $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$. ◀

<u>Задача 4.</u> Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

▷ Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ (см. § 8) $\beta = \alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \quad (3)$$

При $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ по формуле (3) находим $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$. ◀

<u>Задача 5.</u> Вычислить $\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

▷ $\sin 3\alpha = \sin(\alpha+2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha = \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha\, 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha =$

$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha =$
$= \sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$.

При $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ получаем $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{16}$. ◄

Упражнения

Выразить синус, косинус или тангенс, используя формулы двойного угла (121—122).

121. 1) $\sin 48^\circ$; 2) $\cos 164^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 92^\circ$; 4) $\sin\frac{4\pi}{3}$; 5) $\cos\frac{5\pi}{3}$.

122. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$.

Вычислить, не используя калькулятора (123—125).

123. 1) $2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ$; 2) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;
3) $\frac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$; 4) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$.

124. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;
3) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

125. 1) $2\sin 75^\circ\cdot\cos 75^\circ$; 2) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$;
3) $\frac{6\operatorname{tg} 75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$; 4) $\frac{\operatorname{tg}^2 22^\circ 30' - 1}{\operatorname{tg} 22^\circ 30'}$.

126. Вычислить $\sin 2\alpha$, если:
1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

127. Вычислить $\cos 2\alpha$, если:
1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

128. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$.

Упростить выражение (129—130).

129. 1) $2\cos 40^\circ\cdot\cos 50^\circ$; 2) $2\sin 25^\circ\cdot\sin 65^\circ$;
3) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$; 4) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$.

130. 1) $\frac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - 1}$; 2) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

---

131. Доказать тождество:
1) $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$; 2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;
3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$.

132. Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{3}$.

133. Доказать тождество:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha$; 4) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$;

5) $\frac{(1-2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha-1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2 2\alpha$;

6) $1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha$; 7) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

134. Доказать тождество

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}=\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

135. Решить уравнение:

1) $\sin 2x-2\cos x=0$; 2) $\cos 2x+\sin^2 x=1$;

3) $4\cos x=\sin 2x$; 4) $\sin^2 x=-\cos 2x$;

5) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=0$; 6) $\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}$.

136. Упростить выражение:

1) $\frac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$; 2) $\frac{(\cos 0{,}75\beta-\sin 0{,}75\beta)^2}{1-\sin 1{,}5\beta}$.

137. Доказать тождество:

1) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=0{,}25$; 2) $8\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ=\operatorname{ctg}10^\circ$;

3) $16\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 80^\circ=1$;

4) $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{tg}8\alpha+16\operatorname{tg}16\alpha+32\operatorname{ctg}32\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$;

5) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 6) $\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cdot\cos^3\alpha=\cos^3 2\alpha$.

138. Доказать:

1) $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; 2) $\operatorname{tg}^2 36^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 72^\circ=5$.

§ 10. Синус, косинус и тангенс половинного угла

По известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно найти значения $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, в какой четверти лежит угол α.

Из формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ при $x = \frac{\alpha}{2}$ получаем

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Запишем основное тригонометрическое тождество в виде

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2) и вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем соответственно

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad (3), \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad (4).$$

Формулы (3) и (4) можно записать так:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \quad (5), \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad (6).$$

Формулы (5) и (6) называют формулами синуса и косинуса половинного угла. Иногда их называют также *формулами понижения степени*.

Если известен $\cos\alpha$, то из формул (5) и (6) можно найти $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$ и $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$. Знаки $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ могут быть определены, если известно, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Задача 1. Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -0{,}02$ и $0 < \alpha < \pi$.

▷ По формуле (5)

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}02}{2} = 0{,}49.$$

Так как $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ и поэтому $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. Следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$. ◁

Разделив равенство (6) на равенство (5), получим формулу тангенса половинного угла

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (7)$$

Задача 2. Вычислить $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

▷ По формуле (7) имеем

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-0{,}8}{1+0{,}8} = \frac{0{,}2}{1{,}8} = \frac{1}{9}.$$

По условию $\pi < \alpha < 2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ и $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} < 0$. Следовательно, $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$. ◁

Задача 3. Упростить выражение

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

▷ $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-$

$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}$. ◀

Задача 4. Решить уравнение $1+\cos 2x=2\cos x$.

▷ Так как $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, то данное уравнение примет вид $2\cos^2 x=2\cos x$, откуда $\cos x(\cos x-1)=0$.

1) $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$;

2) $\cos x=1$, $x=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Итак, исходное уравнение имеет две серии корней: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, и $x=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. В ответе можно записывать обе серии с одной буквой (k или n) так: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. ◀

Задача 5. Выразить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

▷ 1) $\sin\alpha=\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1}=$

$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

2) $\cos\alpha=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1}=$

$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

3) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$ ◀

По формулам из задачи **5** можно находить синус, косинус и тангенс угла α, зная тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$.

Упражнения

139. Выразить квадрат синуса (косинуса) заданного угла через косинус двойного угла:

1) $\sin^2 15°$; 2) $\cos^2 \frac{1}{4}$; 3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

140. Найти числовое значение выражения:

1) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; 2) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15°$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^2 15°$.

141. Пусть $\cos\alpha=0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

142. Пусть $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

143. Вычислить:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\operatorname{tg} 22°30'$; 4) $\operatorname{ctg} 22°30'$.

144. Упростить выражение:

1) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

4) $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$; 5) $\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 6) $(1-\cos 2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$.

Доказать тождество (145—146).

145. 1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

3) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

146. 1) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

147. Упростить выражение:

1) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin 2\alpha$;

2) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin 2\alpha$.

148. Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то

$$\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

149. Упростить выражение $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}$.

150. Решить уравнение:

1) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$; 2) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$;

3) $1+\cos\frac{x}{2}=2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $1+\cos 8x=2\cos 4x$;

5) $2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=1$; 6) $2\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 4x=1$.

151. Выяснить, существует ли такой угол α, что:

1) $\cos^2\alpha-\cos^2 25^\circ=\cos^2(45^\circ-\alpha)-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$;

2) $\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{4}+\cos 130^\circ$.

152. Доказать тождество:

1) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\frac{1-\sin\alpha-\cos 2\alpha+\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

§ 11. Формулы приведения

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от 0° до 90° $\left(\text{или от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$. Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

Задача 1. Вычислить $\sin 870^\circ$ и $\cos 870^\circ$.

▷ Заметим, что $870^\circ=2\cdot 360^\circ+150^\circ$. Следовательно, при повороте точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат на 870° точка совершит два полных оборота и еще повернется на угол 150°, т. е. получится та же самая точка M, что и при повороте на 150° (рис. 123). Поэтому $\sin 870^\circ=\sin 150^\circ$, $\cos 870^\circ=\cos 150^\circ$.

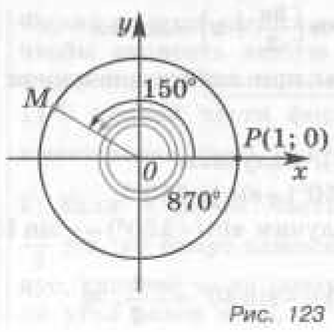


Рис. 123

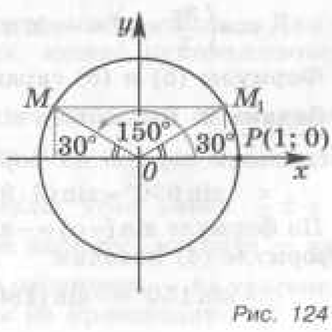


Рис. 124

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно оси Oy (рис. 124). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы — противоположные числа. Поэтому $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $\sin 870° = \frac{1}{2}$, $\cos 870° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ◀

При решении задачи 1 использовались равенства

$$\sin(2\cdot 360° + 150°) = \sin 150°,\ \cos(2\cdot 360° + 150°) = \cos 150°, \quad (1)$$

$$\sin(180° - 30°) = \sin 30°,\ \cos(180° - 30°) = -\cos 30°. \quad (2)$$

Равенства (1) верны, так как при повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол $\alpha + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, получается та же самая точка, что и при повороте на угол α. Следовательно, верны формулы

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}. \quad (3)$$

Равенства (2) являются частными случаями формул

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha. \quad (4)$$

Докажем формулу $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

○ Применяя формулу сложения для синуса, получаем

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha. ●$$

Аналогично доказывается и вторая из формул (4), которые называют *формулами приведения*. Формулами приведения для синуса называют следующие шесть формул:

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, && \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \\ &\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, && \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \\ &\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha, && \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Следующие шесть формул называют формулами приведения для косинуса:

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, && \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha, \\ &\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, && \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \\ &\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha, && \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) справедливы при любых значениях α.

Задача 2. Вычислить $\sin 930°$.

▷ Используя первую из формул (3), получаем

$$\sin 930° = \sin(3\cdot 360° - 150°) = \sin(-150°).$$

По формуле $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ получим $\sin(-150°) = -\sin 150°$. По формуле (4) находим

$$-\sin 150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}. ◀$$

Задача 3. Вычислить $\cos \frac{15\pi}{4}$.

▷ $\cos \frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◀

Покажем теперь, как можно свести вычисление тангенса любого угла к вычислению тангенса острого угла. Заметим, что из формул (3) и определения тангенса следует равенство $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Используя это равенство и формулы (4), получаем
$\operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \operatorname{tg}(\alpha+\pi-2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha-\pi) = -\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} =$
$= -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha, \ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{7}$$

Аналогично доказывается формула

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha, \ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{8}$$

Следующие четыре формулы называют формулами приведения для тангенса и котангенса:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha, \\ &\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha. \end{aligned} \tag{9}$$

Формулы (9) справедливы при всех допустимых значениях α.

Задача 4. Вычислить: 1) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}$.

▷ 1) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$;

2) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. ◀

Формулы приведения для синуса и косинуса доказываются с помощью формул сложения аналогично тому, как доказана первая из формул (4). Формулы (9) можно получить из формул (5) и (6), зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Формулы приведения запоминать необязательно. Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими правилами:

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2) Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс и котангенс — на тангенс. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замены не происходит.

Например, покажем, как с помощью этих правил можно получить формулу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. По первому правилу в правой части формулы нужно поставить знак «–», так как если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\alpha<\pi$, а косинус во второй четверти отрицателен. По второму правилу косинус нужно заменить на синус, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

Итак, формулы (3), (7) и формулы приведения позволяют свести вычисление синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к вычислению их значений для острого угла.

Упражнения

153. Найти значение острого угла α, при котором выполняется равенство:

1) $\sin 150^\circ=\sin(90^\circ+\alpha)$; 2) $\cos 310^\circ=\cos(270^\circ+\alpha)$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{11}{6}\pi=\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$.

Вычислить с помощью формул приведения (154—155).

154. 1) $\cos 150^\circ$; 2) $\sin 135^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 135^\circ$; 4) $\cos 120^\circ$;

5) $\cos 225^\circ$; 6) $\sin 210^\circ$; 7) $\operatorname{ctg} 240^\circ$; 8) $\sin 315^\circ$.

155. 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$; 5) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$;

6) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

Упростить выражение (156—157).

156. 1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

157. 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

158. Вычислить:

1) $\sin 1140^\circ$; 2) $\cos 840^\circ$; 3) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

159. Найти значение выражения:

1) $\cos 630° - \sin 1470° - \operatorname{ctg} 1125°$;

2) $\operatorname{tg} 1800° - \sin 495° + \cos 945°$;

3) $3\cos 3660° + \sin(-1560°) + \cos(-450°)$;

4) $\cos 4455° - \cos(-945°) + \operatorname{tg} 1035° - \operatorname{ctg}(-1500°)$.

160. Вычислить:

1) $\cos\frac{23\pi}{4} - \sin\frac{15\pi}{4} - \operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right)$;

2) $\sin\frac{25\pi}{3} - \cos\left(-\frac{17\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

Доказать тождество (**161—162**).

161. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 0$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = 0$;

3) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)} = -\sin\alpha$.

162. 1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$;

3) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$; 4) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$.

163. Вычислить $\left(\dfrac{\operatorname{tg}^2 590°}{\cos^2 320°} + \dfrac{\sin 111°}{\cos 1599°}\right)\left(\dfrac{\cos 279°}{\sin 549°} + \dfrac{\operatorname{ctg}^2 950°}{\sin^2 400°}\right)$.

164. Доказать, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу его третьего угла.

165. Дано A, B и C — углы треугольника. Доказать, что:

1) $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{C}{2}$;

3) $\cos(A+B) = -\cos C$.

166. Косинус одного из углов равен $-0{,}8$. Найти синус, косинус и тангенс смежного с ним угла.

167. Решить уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 1$; 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = 1$;

3) $\cos(x-\pi) = 0$; 4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

5) $\sin(2x+3\pi)\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right) - \sin 3x\cos 2x = -1$;

6) $\sin\left(5x-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2x+4\pi) - \sin(5x+\pi)\sin 2x = 0$.

168. Определить $\cos x$, если $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

169. Доказать, что вычисление значений синуса, косинуса и тангенса любого угла можно свести к вычислению их значений для угла, заключенного в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

§ 12. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов

Задача 1. Упростить выражение

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

▷ Используя формулы сложения и формулу синуса двойного угла, получаем

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\right.$$

$$\left.+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha. \quad ◁$$

Эту задачу можно решить проще, если использовать формулу суммы синусов:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

С помощью этой формулы получаем

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Докажем теперь справедливость формулы (1).

○ Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2}=x$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=y$. Тогда $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, и поэтому $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y+$ $+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ●

Наряду с формулой (1) используется формула разности синусов, а также формулы суммы и разности косинусов:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) доказываются аналогично тому, как ранее доказывалась формула (1); формула (2) получается из формулы (1) заменой β на $-\beta$.

Задача 2. Вычислить $\sin 75° + \cos 75°$.

▷ $\sin 75° + \cos 75° = \sin 75° + \sin 15° = 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} =$
$= 2\sin 45° \cos 30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. ◀

Задача 3. Преобразовать в произведение $2\sin\alpha + \sqrt{3}$.

▷ $2\sin\alpha + \sqrt{3} = 2\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\right) =$
$= 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. ◀

Задача 4. Доказать, что наименьшее значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$ равно $-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}$.

▷ Преобразуем данное выражение в произведение:
$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

Так как наименьшее значение косинуса равно -1, а наибольшее равно 1, то наименьшее значение данного выражения равно $\sqrt{2}\cdot(-1) = -\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$. ◀

При решении некоторых задач, например при исследовании гармонических колебаний, бывает необходимо преобразовать в произведение выражение вида $a\sin\alpha + b\cos\alpha$.

Обозначим $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Тогда для любых чисел a и b всегда найдется такое φ, что

$$a = r\cos\varphi \text{ и } b = r\sin\varphi, \qquad (1)$$

и данную сумму можно записать так:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = r(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) = r\sin(\alpha+\varphi).$$

Из равенств (1), зная r, находим

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Итак, мы получили равенство

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi), \qquad (3)$$

где значение φ определяется по формулам (2).

Метод, примененный для преобразования выражения $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ к виду $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, называют *методом вспомогательного угла*.

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right). \qquad (4)$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right). \qquad (5)$$

Применяя формулы (4) и (5), получаем равенства

$$1 + \sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\cos 2\alpha=-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

Эти равенства могут оказаться полезными в тригонометрических преобразованиях и при решении некоторых тригонометрических уравнений.

Задача 5. Преобразовать в произведение $\frac{\sqrt{2}-\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}$.

▷ $$\frac{\sqrt{2}-\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}=\frac{\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)}{\sin x-\cos x}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(1-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right). \blacktriangleleft$$

Задача 6. Вычислить

$$\frac{\cos 11\alpha+3\cos 9\alpha+3\cos 7\alpha+\cos 5\alpha}{\cos 8\alpha},\text{ если } \cos\alpha=a.$$

▷ Пользуясь известными формулами, преобразуем числитель: $\cos 11\alpha+\cos 5\alpha+3(\cos 9\alpha+\cos 7\alpha)=2\cos 8\alpha\cos 3\alpha+6\cos 8\alpha\cos\alpha=$ $=2\cos 8\alpha(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)=2\cos 8\alpha(\cos\alpha\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha+$ $+3\cos\alpha)=2\cos 8\alpha(\cos^3\alpha-\cos\alpha\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha+3\cos\alpha)=$ $=2\cos 8\alpha(\cos^3\alpha-3\cos\alpha+3\cos^3\alpha+3\cos\alpha)=8\cos 8\alpha\cos^3\alpha$. Значит,

$$\frac{\cos 11\alpha+3\cos 9\alpha+3\cos 7\alpha+\cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}=\frac{8\cos 8\alpha\cos^3\alpha}{\cos 8\alpha}=8\cos^3\alpha=8a^3.$$

Ответ. $8a^3$. ◀

Задача 7. Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, если $\sin\alpha-\sin\beta=0{,}5$, а $3(\cos\alpha-\cos\beta)=1$.

▷ Обозначим $\sin\alpha-\sin\beta=a$, $\cos\alpha-\cos\beta=b$. Тогда по формулам преобразования разности синусов и косинусов в произведение получим

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=a,\quad -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=b.$$

Возведем эти равенства в квадрат и сложим:

$$4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=a^2+b^2,$$

откуда $\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a^2+b^2}{4}$. Преобразуем выражение

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\frac{1}{2}(\cos\beta-\cos\alpha)+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{4a}{a^2+b^2-2b}.$$

По условию $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{4\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{2}{3}}=-\frac{72}{11}.$$

Упражнения

170. Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

171. Вычислить:

1) $\cos 105°+\cos 75°$; 2) $\sin 105°-\sin 75°$; 3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$;
4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$; 5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$; 6) $\sin 105°+\sin 165°$.

172. Преобразовать в произведение:

1) $1+2\sin\alpha$; 2) $1-2\sin\alpha$; 3) $1+2\cos\alpha$; 4) $1+\sin\alpha$.

173. Доказать тождество:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

174. Упростить выражение:

1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$; 2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

175. Доказать тождество:

1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=0$;

3) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$.

176. Записать в виде произведения:

1) $\cos 22°+\cos 24°+\cos 26°+\cos 28°$;

2) $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}$.

177. Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ и вычислить:

1) $\operatorname{tg}267^\circ+\operatorname{tg}93^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12}+\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{12}$.

178. Разложить на множители:

1) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha$;

3) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha$; 4) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.

179. Преобразовать в произведение:

1) $\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\cos 2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha$;

3) $\sin\pi\alpha-\operatorname{tg}\pi\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}(2\alpha+30^\circ)-\cos(2\alpha+30^\circ)$.

180. Преобразовать в произведение:

1) $1-\sqrt{2}\sin\alpha$; 2) $\sin^2\alpha-0{,}75$;

3) $\sin x+\sqrt{3}\cos x$; 4) $\sqrt{3}\sin x-\cos x$.

181. Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$;

2) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$.

182. Преобразовать в произведение:

1) $\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha$;

2) $\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\sin 8\alpha+\sin 10\alpha$.

183. Доказать, что при $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ справедливо тождество:

1) $\sin^2\alpha\sin 2\alpha+\sin^2\beta\sin 2\beta+\sin^2\gamma\sin 2\gamma-\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma=$
$=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

2) $\cos^2\alpha\cos 2\alpha+\cos^2\beta\cos 2\beta+\cos^2\gamma\cos 2\gamma-$
$-\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

§ 13. Произведение синусов и косинусов

В преобразованиях тригонометрических выражений, а также при решении некоторых уравнений используются формулы преобразования произведения в сумму или разность:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)), \quad (1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)), \quad (2)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)). \quad (3)$$

Эти формулы можно доказать, преобразуя их правые части с помощью формулы сложения. Например, формулу (1) можно получить так:

○ $\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))=\dfrac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-$
$-\cos\alpha\sin\beta)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta$. ●

Задача 1. Вычислить, не пользуясь таблицами, произведение $\cos 5^\circ \cos 55^\circ \cos 65^\circ$.

▷ Применяя формулу (3) для первых двух множителей, имеем
$$\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 50^\circ)\cos 65^\circ=\frac{1}{2}\cos 60^\circ\cos 65^\circ+\frac{1}{2}\cos 50^\circ\cos 65^\circ.$$

Преобразуем второе слагаемое в сумму:
$$\frac{1}{2}\cos 60^\circ\cos 65^\circ+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\cos 115^\circ+\cos 15^\circ)=\frac{1}{2}\cos 60^\circ\cos 65^\circ+$$
$$+\frac{1}{4}(-\cos 65^\circ+\cos(45^\circ-30^\circ))=\frac{1}{4}\cos 65^\circ-\frac{1}{4}\cos 65^\circ+\frac{1}{4}(\cos 45^\circ\cos 30^\circ+$$
$$+\sin 45^\circ\sin 30^\circ)=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}.$$ ◀

Задача 2. Преобразовать произведение $\sin^2\alpha\cos^4\alpha$ в сумму.

▷ Используя формулы $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, получим $\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha=$
$=\frac{1}{16}(1-\cos 4\alpha)(1+\cos 2\alpha)=\frac{1}{16}(1+\cos 2\alpha-\cos 4\alpha-\cos 2\alpha\cos 4\alpha)$. Так как $\cos 2\alpha\cos 4\alpha=\frac{1}{2}(\cos 6\alpha+\cos 2\alpha)$, то $\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2\alpha-$
$-\frac{1}{16}\cos 4\alpha-\frac{1}{32}\cos 6\alpha$. ◀

Задача 3. При каком значении x выражение
$\sin\left(\frac{\pi}{10}+3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{20}-3x\right)$ принимает наибольшее значение?

▷ По формуле (2) имеем
$$\sin\left(\frac{\pi}{10}+3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{20}-3x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{20}+6x\right)-\cos\frac{3\pi}{20}\right).$$

Наибольшее значение выражение примет тогда, когда $\cos\left(\frac{\pi}{20}+6x\right)=1$, т. е. при $\frac{\pi}{20}+6x=2\pi k$, откуда $x=-\frac{\pi}{120}+\frac{\pi}{3}k$, где $k\in\mathbf{Z}$. ◀

Упражнения

Преобразовать в сумму произведение (184—185).

184. 1) $\sin 10^\circ\sin 20^\circ$; 2) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\cos 35^\circ\sin 25^\circ$;

4) $\cos 15^\circ\cos 5^\circ$; 5) $\sin(x+\alpha)\cos(x-\alpha)$; 6) $\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)$.

185. 1) $2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $4\cos x\cdot\sin^2\frac{x}{2}$; 3) $\sin^3\alpha$; 4) $4\cos^4\alpha$.

186. Вычислить:

1) $\sin 82^\circ 30'\cos 37^\circ 30'$; 2) $\sin 82^\circ 30'\sin 37^\circ 30'$.

187. Упростить:

1) $\sin\alpha(1+2\cos 2\alpha)$; 2) $2\cos\alpha\cos 2\alpha-\cos 3\alpha$;

3) $\cos 2\alpha+2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

4) $\cos^2 3+\cos^2 1-\cos 4\cos 2$.

188. Доказать тождество:

1) $2\sin\alpha\sin 2\alpha+\cos 3\alpha=\cos\alpha$;

2) $2\sin 3\alpha\cos 4\alpha+\sin\alpha=\sin 7\alpha$;

3) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$;

4) $4\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$.

189. Доказать:

1) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$;

2) $\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} 60^\circ\operatorname{tg} 80^\circ=3$.

190. При каком значении x выражение $\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-2x\right)$ принимает наименьшее значение?

191. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{24}\right)$.

192. Решить уравнение:

1) $\cos 4x\cos 2x=\cos 5x\cos x$; 2) $\sin 5x\sin x=\sin 7x\sin 3x$;

3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$;

4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2 x=0$.

193. Доказать тождество:

1) $\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)+\sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma-\beta)+\sin\gamma\sin\alpha\sin(\alpha-\gamma)=$
$=\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)$;

2) $\sin^2\alpha+\sin^2 3\alpha+\cos 2\alpha\cos 4\alpha+\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-1=$
$=\frac{\sin 6\alpha}{2\sin\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin\frac{5\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha$.

Упражнения к главе VIII

194. Найти:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

4) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=2$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

195. Упростить выражение:

1) $2\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2$;

2) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$.

Вычислить (196—197).

196. 1) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

197. 1) $\cos\frac{23\pi}{4}-\sin\frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{25\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$;

3) $3\cos 3660°+\sin(-1560°)$; 4) $\cos(-945°)+\operatorname{tg}1035°$.

Упростить выражение (198—199).

198. 1) $\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)$.

199. 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

200. Доказать тождество:

1) $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Вычислить (201—202).

201. 1) $2\sin 6\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3\alpha\right)-\sin 6\alpha$ при $\alpha=\frac{5\pi}{24}$;

2) $\cos 3\alpha+2\cos(\pi-3\alpha)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-1{,}5\alpha\right)$ при $\alpha=\frac{5\pi}{36}$.

202. 1) $\dfrac{\sqrt{3}(\cos 75°-\cos 15°)}{1-2\sin^2 15°}$; 2) $\dfrac{2\cos^2\frac{\pi}{8}-1}{1+8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$.

203. Доказать тождество:

1) $\frac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\frac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

204. Показать, что:

1) $\sin 35°+\sin 25°=\cos 5°$; 2) $\cos 12°-\cos 48°=\sin 18°$.

---

205. Упростить выражение $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}$.

Доказать тождество (206—207).

206. 1) $\dfrac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}=-\sqrt{3}\operatorname{ctg}2\alpha$;

2) $\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin(2{,}5\pi-2\alpha)}{\cos(4{,}5\pi-2\alpha)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}$.

207. 1) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

208. Вычислить $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

209. Вычислить значение выражения

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha},\ \text{если}\ \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}.$$

210. Вычислить значение выражения

$$\frac{4\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha},\ \text{если}\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}.$$

Доказать тождество (211—212).

211. 1) $\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$.

212. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$.

213. Найти значение выражения $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

Доказать тождество (214—216).

214. $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$.

215. 1) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\dfrac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha)$;

2) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=\dfrac{1}{32}(\cos^2 4\alpha+14\cos 4\alpha+17)$.

216. 1) $4\sin\alpha\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin 3\alpha$;

2) $\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(1-\operatorname{tg}\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{4(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{4\sin\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$.

Вопросы к главе VIII

1. Дать определение угла в 1 радиан; в 1 градус.
2. По каким формулам переводят радианную меру угла в градусную и наоборот?

3. Дать определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла.
4. Какая зависимость существует между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла?
5. Записать знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям.
6. Каковы значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$?
7. Как найти значения косинуса, тангенса и котангенса угла α, если известно значение $\sin\alpha$ и в какой четверти находится угол α?
8. Сформулировать правила для запоминания формул приведения.
9. Сформулируйте теоремы сложения для: 1) косинуса; 2) синуса; 3) тангенса.
10. Как, зная формулы сложения для синуса, косинуса и тангенса, получить формулы двойного угла? Записать эти формулы.
11. Записать формулы синуса, косинуса, тангенса половинного аргумента.
12. Записать формулы преобразования суммы и разности синусов и косинусов в произведение.
13. Записать формулы преобразования произведения синусов и косинусов в сумму.

Проверь себя!

1. Вычислить $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
2. Найти значение выражения:

   1) $\cos 135°$; 2) $\sin\frac{8\pi}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; 4) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.
3. Упростить выражение:

   1) $\sin(\alpha-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(-\beta)$;

   2) $\cos^2(\pi-\alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

   3) $2\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha+\beta)$.
4. Доказать тождество:

   1) $3\cos 2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 2\cos 2\alpha$;

   2) $\frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha} = \sin\alpha$.

---

1. Вычислить значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

2. Вычислить:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-2\cos\pi$; 2) $\sin\frac{16}{3}\pi+\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$.

3. Определить знак значения числового выражения $\sin 2\cos 3\operatorname{tg} 4$.

4. Упростить выражение $\left(2-\frac{2}{\sin^2(\pi+\alpha)}\right)\left(\frac{1}{\cos^2(\alpha-\pi)}-1\right)$.

5. Доказать тождество $\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=-2\operatorname{ctg}^2\alpha$.

6. Решить уравнение $1+\sin(2x+4\pi)-2\cos^2 2x=2\sin^2 2x$.

Историческая справка

Как и многие разделы математики, тригонометрия возникла из практических потребностей человека в земельных расчетах (для определения расстояний до недоступных предметов, для составления географических карт и т. п.), а также для астрономических расчетов. Еще древнегреческие ученые создали «тригонометрию хорд», которую во II в. описал Птолемей в своей работе «Алмагест» («Великая книга»). Птолемей вывел соотношения между хордами в круге, которые, по сути, аналогичны современным формулам синуса половинного и двойного угла, синуса суммы и разности двух углов (эти соотношения в «Алмагесте» выражены словесно из-за отсутствия в те времена математической символики).

В VIII в. усилиями математиков Ближнего и Среднего Востока тригонометрия выделилась из астрономической науки в самостоятельную математическую дисциплину. К этому времени соотношения между хордами индийскими математиками были заменены синусами. Слово «синус» происходит от латинского слова sinus (перегиб), которое, в свою очередь, произошло от арабского слова «джива» (хорда, тетива лука). Слово «косинус» является сокращением словосочетания complementi sinus (синус дополнения), объясняющего тот факт, что $\cos\alpha$ равен синусу угла, дополняющего α до 90°. Латинское слово tangens переводится как «касательная» (касательная к окружности).

В IX в. в Багдаде Мухаммед бен Муса аль-Хорезми (ок. 787—850) составил первые таблицы синусов и котангенсов. Абу-ль-Вефа (940—998) вывел теорему синусов сферической тригонометрии и с ее помощью построил таблицу синусов с интервалом в 15′, в которой значения синусов приведены с точностью до 8-го десятичного знака. Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед аль-Бируни (973—1048) упрочил в тригонометрии важное нововведение — для определения значений синуса и косинуса стал использовать окружность единичного радиуса. В первой половине XV в. Джемшид ибн Масуд аль-Каши создал тригонометрические таблицы с шагом в 1′, которыми пользовались ученые различных отраслей знаний на протяжении 250 лет.

Первый научный труд, в котором тригонометрия рассматривается как самостоятельная математическая дисциплина, был создан в 1462—1464 гг. Иоганом Мюллером, известным в истории науки под именем Региомонтан (1436—1476). Тригонометрии посвятил два раздела своего знаменитого труда «Об обращении небесных тел» Н. Коперник (1473—1543). В сочинениях И. Кеплера, Й. Бюрги, Ф. Виета и других известных математиков Европы выведены многие интересные формулы тригонометрии. Интересны, например, рекуррентные формулы, полученные Виетом:

$$\cos m\alpha = 2\cos\alpha \cdot \cos(m-1)\alpha - \cos(m-2)\alpha;$$
$$\cos m\alpha = -2\sin\alpha \cdot \sin(m-1)\alpha + \cos(m-2)\alpha;$$
$$\sin m\alpha = 2\cos\alpha \cdot \sin(m-1)\alpha - \sin(m-2)\alpha;$$
$$\sin m\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos(m-1)\alpha + \sin(m-2)\alpha.$$

Например, при $m=2$ из формулы Виета получается известная формула $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и др.

Швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667—1748) в своих работах впервые стал использовать символическую запись тригонометрических функций, а близкую к принятой нами символику ввел Л. Эйлер (1707—1783) в 1748 г. в своей работе «Введение в анализ бесконечно малых». В этой работе автор разъяснил вопрос о знаках всех тригонометрических функций любого аргумента. Дальнейшее развитие теории тригонометрических функций было продолжено в XIX в. великим русским математиком Н. И. Лобачевским (1792—1856) и другими учеными.

Глава IX

Тригонометрические уравнения

Уравнение есть равенство, которое еще не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенными, что этого можно достичь.

А. Фуше

§ 1. Уравнение $\cos x = a$

Из определения косинуса следует, что $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\cos x = -1{,}5$ не имеет корней.

Задача 1. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

▷ Напомним, что $\cos x$ — абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 125). Так как $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, то точка M_1 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Итак, все корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Вместо двух формул обычно пользуются одной: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. ◁

Задача 2. Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

▷ Абсциссу, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки

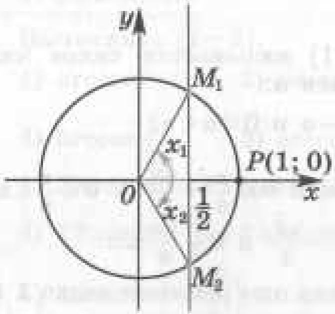


Рис. 125

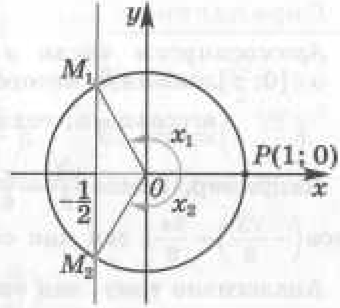


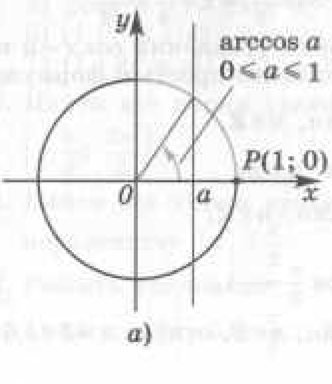
Рис. 126

окружности M_1 и M_2 (рис. 126). Так как $-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$, то угол $x_1=\frac{2\pi}{3}$, а угол $x_2=-\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, все корни уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. ◀

Таким образом, каждое из уравнений $\cos x=\frac{1}{2}$ и $\cos x=-\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней.

На отрезке $0\leqslant x\leqslant\pi$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1=\frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x=\frac{1}{2}$ и $x_1=\frac{2\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют арккосинусом числа $\frac{1}{2}$ и записывают $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$; число $\frac{2\pi}{3}$ называют арккосинусом числа $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и записывают $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Вообще уравнение $\cos x=a$, где $-1\leqslant a\leqslant 1$, имеет на отрезке $0\leqslant x\leqslant\pi$ только один корень. Если $a\geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; если $a<0$, то в промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Этот корень называют арккосинусом числа a и обозначают $\arccos a$ (рис. 127).



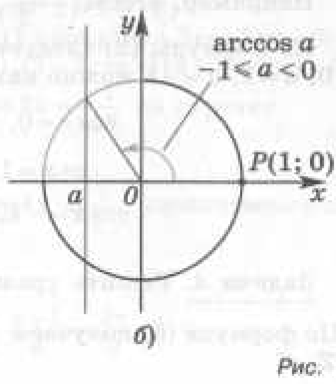


Рис. 127

Определение

Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in [0; \pi]$, косинус которого равен a:

$$\arccos a = \alpha, \text{ если } \cos\alpha = a \text{ и } 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \quad (1)$$

Например, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \pi$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, так как $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{5\pi}{6} \leqslant \pi$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач **1** и **2**, можно показать, что все корни уравнения $\cos x = a$, где $|a| \leqslant 1$, можно находить по формуле

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Задача 3. Решить уравнение $(4\cos x - 1)(2\cos 2x + 1) = 0$.

▷ Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x = \frac{1}{4} \text{ и } \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Корни этих уравнений найдем по формуле (2).

Если $\cos x = \frac{1}{4}$, то $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а если $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, то $2x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, так как $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ. $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Можно доказать, что для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \quad (3)$$

Эта формула позволяет находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел.

Например, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Из формулы (2) следует, что корни уравнения $\cos x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ можно находить по более простым формулам:

$$\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \quad (4)$$

$$\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \quad (5)$$

$$\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \quad (6)$$

Задача 4. Решить уравнение $\cos\frac{x}{3} = -1$.

▷ По формуле (6) получаем $\frac{x}{3} = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, откуда $x = 3\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Упражнения

Вычислить (1—2).

1\. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arccos \frac{1}{2}$; 5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2\. 1) $2\arccos 0 + 3\arccos 1$; 2) $3\arccos(-1) - 2\arccos 0$;

3) $12\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3\. Сравнить числа:

1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\arccos \frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arccos(-1)$;

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решить уравнение (4—7).

4\. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5\. 1) $\cos x = \frac{3}{4}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{3}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6\. 1) $\cos 4x = 1$; 2) $\cos 2x = -1$; 3) $\sqrt{2}\cos \frac{x}{4} = -1$;

4) $2\cos \frac{x}{3} = \sqrt{3}$; 5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

7\. 1) $\cos x \cos 3x = \sin 3x \sin x$; 2) $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 0$.

8\. Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arccos(\sqrt{6} - 3)$; 2) $\arccos(\sqrt{7} - 2)$; 3) $\arccos(2 - \sqrt{10})$;

4) $\arccos(1 - \sqrt{5})$; 5) $\operatorname{tg}\left(3\arccos \frac{1}{2}\right)$; 6) $\arccos(\cos 3)$.

9\. Решить уравнение:

1) $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$; 2) $4\cos^2 x = 3$;

3) $2\cos^2 x = 1 + 2\sin^2 x$; 4) $2\sqrt{2}\cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$;

5) $(1 + \cos x)(3 - 2\cos x) = 0$; 6) $(1 - \cos x)(4 + 3\cos 2x) = 0$;

7) $(1 + 2\cos x)(1 - 3\cos x) = 0$; 8) $(3 - 2\cos x)(2 + 3\cos x) = 0$.

10\. Найти все корни уравнения $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

11\. Найти все корни уравнения $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $|x| < \frac{\pi}{2}$.

<u>12.</u> Решить уравнение:

1) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos \frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

13. Доказать, что при всех значениях a, таких, что $-1 \leqslant a \leqslant 1$, выполняется равенство $\cos(\arccos a) = a$. Вычислить:

1) $\cos(\arccos 0{,}2)$; 2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\pi + \arccos\frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{1}{3}\right)$;

5) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

14. Доказать, что $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Вычислить:

1) $5\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$; 2) $3\arccos(\cos 2)$;

3) $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)$; 4) $\arccos(\cos 4)$.

15. Вычислить:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5} - \arccos\frac{3}{5}\right)$.

16. Упростить выражение $\cos(2\arccos a)$, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

17. Доказать, что если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то

$$2\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}} = \arccos a.$$

§ 2. Уравнение $\sin x = a$

Из определения синуса следует, что $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\sin x = 2$ не имеет корней.

Задача 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

▷ Напомним, что $\sin x$ — ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x. Ординату, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 128). Так как $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то точка M_1 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, т. е. на углы $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

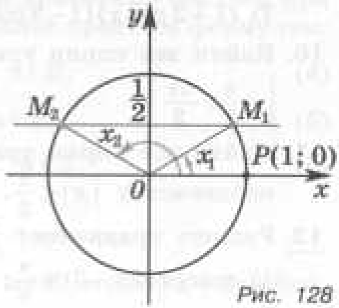


Рис. 128

Итак, все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z. \qquad (1)$$

В самом деле, если n — четное число, т. е. $n = 2k$, то из формулы (1) получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если n — нечетное число, т. е. $n = 2k - 1$, то из формулы (1) получаем $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$ ◀

Задача 2. Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

▷ Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют точки M_1 и M_2 (рис. 129), где $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, все корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формулам

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

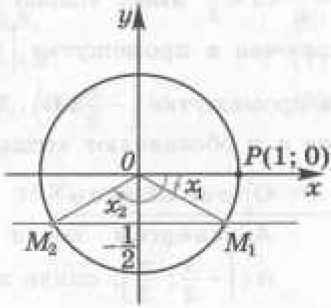


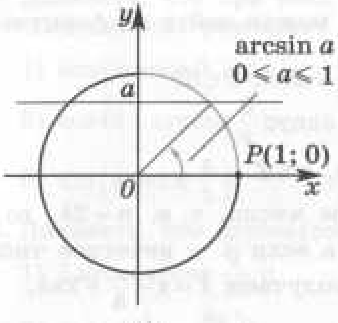
Рис. 129

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in Z. \qquad (2)$$

В самом деле, если $n = 2k$, то по формуле (2) получаем $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если $n = 2k - 1$, то по формуле (2) находим $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Откуда $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in Z.$ ◀

Итак, каждое из уравнений $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ и $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом числа $\frac{1}{2}$ и записывают $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, число $-\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом числа $-\frac{1}{2}$ и пишут $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.



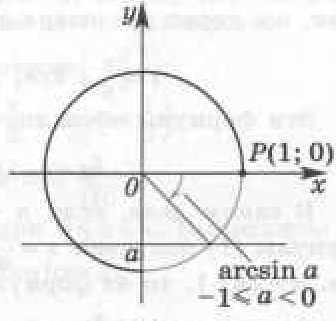


Рис. 130

Вообще уравнение $\sin x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеет только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; если $a < 0$, то корень заключен в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Этот корень называют *арксинусом* числа a и обозначают $\arcsin a$ (рис. 130).

Определение

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a:

$$\arcsin a = \alpha, \text{ если } \sin \alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Например, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, выражаются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z. \quad (4)$$

Задача 3. Решить уравнение $(3\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 0$.

▷ Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = \frac{1}{3} \text{ и } \sin 2x = -\frac{1}{2}.$$

Корни этих уравнений найдем по формуле (4). Если $\sin x = \frac{1}{3}$, то $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$; если $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, то

$2x=(-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, откуда $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ. $x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. ◀

Можно доказать, что для любого $a\in[-1;\ 1]$ справедлива формула

$$\arcsin(-a)=-\arcsin a. \qquad (5)$$

Эта формула позволяет находить значения арксинусов отрицательных чисел через значения арксинусов положительных чисел. Например, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}$.

Отметим, что из формулы (4) следует, что корни уравнения $\sin x=a$ при $a=0$, $a=1$, $a=-1$ можно находить по более простым формулам:

$$\sin x=0,\ x=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, \qquad (6)$$

$$\sin x=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, \qquad (7)$$

$$\sin x=-1,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \qquad (8)$$

Задача 4. Решить уравнение $\sin 2x=1$.

▷ По формуле (7) имеем $2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. ◀

Упражнения

Вычислить (18—19).

18. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin\frac{1}{2}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

19. 1) $\arcsin 1-\arcsin(-1)$; 2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

3) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

20. Сравнить числа:

1) $\arcsin\frac{1}{4}$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arcsin(-1)$.

Решить уравнение (21—24).

21. 1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

22. 1) $\sin x=\frac{2}{7}$; 2) $\sin x=-\frac{1}{4}$; 3) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

23. 1) $\sin 3x=1$; 2) $\sin 2x=-1$; 3) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3}=-1$;

4) $2\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}$; 5) $\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$; 6) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

---

24. 1) $\sin 4x\cos 2x=\cos 4x\sin 2x$; 2) $\cos 2x\sin 3x=\sin 2x\cos 3x$.

25. Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arcsin(\sqrt{5}-2)$; 2) $\arcsin(\sqrt{5}-3)$; 3) $\arcsin(3-\sqrt{17})$;

4) $\arcsin(2-\sqrt{10})$; 5) $\operatorname{tg}\left(6\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение (26—28).

26. 1) $1-4\sin x\cos x=0$; 2) $\sqrt{3}+4\sin x\cos x=0$;

3) $1+6\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=0$; 4) $1-8\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}=0$.

27. 1) $1+\cos 5x\sin 4x=\cos 4x\sin 5x$;

2) $1-\sin x\cos 2x=\cos x\sin 2x$.

28. 1) $(4\sin x-3)(2\sin x+1)=0$; 2) $(4\sin 3x-1)(2\sin x+3)=0$.

29. Найти все корни уравнения $\sin 2x=\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

30. Найти все корни уравнения $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\log_{\pi}(x-4\pi)<1$.

31. Доказать, что $\sin(\arcsin a)=a$ при $-1\leqslant a\leqslant 1$. Вычислить:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{7}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$; 3) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{3}{4}\right)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 5) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

32. Доказать, что $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$ при $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $7\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\arcsin\left(\sin\frac{1}{2}\right)$;

3) $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$; 4) $\arcsin(\sin 5)$.

Вычислить (33—35).

33. 1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; 4) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

34. 1) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

35. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)$.

36. Решить уравнение:

1) $\arcsin\left(\frac{x}{2}-3\right)=\frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(3-2x)=-\frac{\pi}{4}$.

37. Доказать, что если $0\leqslant a\leqslant 1$, то $2\arcsin a=\arccos(1-2a^2)$.

§ 3. Уравнение tg $x=a$

Из определения тангенса следует, что tg x может принимать любое действительное значение. Поэтому уравнение tg $x=a$ имеет корни при любом значении a.

<u>Задача 1.</u> Решить уравнение tg $x=\sqrt{3}$.

▷ Построим углы, тангенсы которых равны $\sqrt{3}$. Для этого проведем через точку P (рис. 131) прямую, перпендикулярную PO, и отложим отрезок $PM=\sqrt{3}$; через точки M и O проведем прямую. Эта прямая пересекает единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M_1 и M_2. Из прямоугольного треугольника POM находим $\frac{PM}{PO}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}=\operatorname{tg} x_1$, откуда $x_1=\frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается из точки $P(1;\,0)$ поворотом вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, где $k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$.

Точка M_2 получается поворотом точки $P(1;\,0)$ на угол $x_2=\frac{\pi}{3}+\pi$, а также на углы $x=\frac{\pi}{3}+\pi+2\pi k$, где $k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$.

Итак, корни уравнения tg $x=\sqrt{3}$ можно найти по формулам $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$. Эти формулы объединяются в одну: $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. ◀

<u>Задача 2.</u> Решить уравнение tg $x=-\sqrt{3}$.

▷ Углы, тангенсы которых равны $-\sqrt{3}$, указаны на рисунке 132, где $PM\perp PO$, $PM=\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольни-

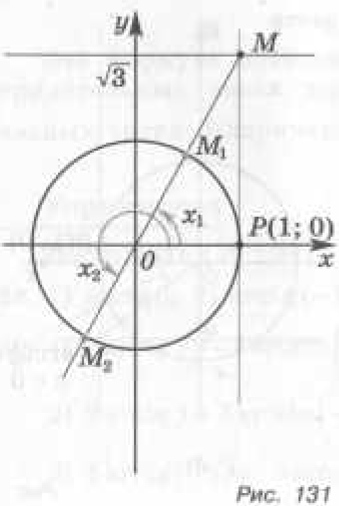


Рис. 131

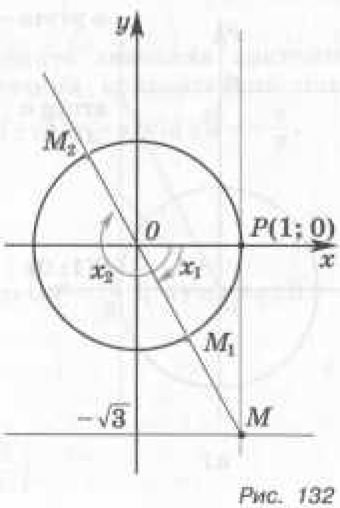


Рис. 132

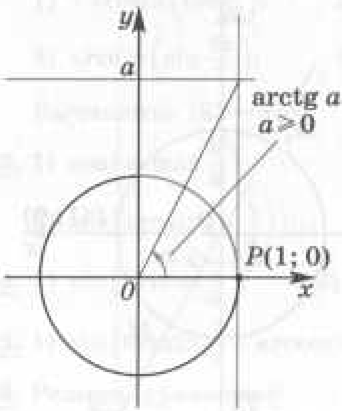
ка POM находим $\angle POM=\frac{\pi}{3}$, т. е. $x_1=-\frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается поворотом точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол $x_1=-\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, где $k=\pm 1,\ \pm 2,\ \dots$.

Точка M_2 получается поворотом точки $P(1;\ 0)$ на углы $x=-\frac{\pi}{3}+\pi(2k+1),\ k\in \mathbf{Z}$.

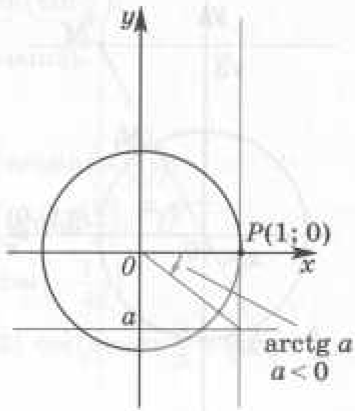
Поэтому корни уравнения $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ можно найти по формуле $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$. ◄

Итак, каждое из уравнений $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ имеет бесконечное множество корней. На интервале $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1=\frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ и $x_1=-\frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $\sqrt{3}$ и записывают $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$; число $-\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $-\sqrt{3}$ и пишут $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$.

Вообще уравнение $\operatorname{tg} x=a$ для любого $a\in \mathbf{R}$ имеет на интервале $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ только один корень. Если $a\geqslant 0$, то корень заключен в промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; если $a<0$, то в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Этот корень называют арктангенсом числа a и обозначают $\operatorname{arctg} a$ (рис. 133).



а)



б)

Рис. 133

Определение

Арктангенсом числа $a \in R$ называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a:

$$\operatorname{arctg} a = \alpha, \text{ если } \operatorname{tg}\alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Например, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач **1** и **2**, можно показать, что все корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$, где $a \in R$, выражаются формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \ n \in Z. \qquad (2)$$

Задача 3. Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + 4)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$.

▷ Все корни этого уравнения содержатся среди корней уравнений $\operatorname{tg} x = -4$, $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Первое из этих уравнений имеет корни $x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n$, $n \in Z$, определяемые формулой (2).

Второе уравнение, равносильное уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, имеет корни $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Заметим, что все найденные значения x являются корнями исходного уравнения ($\operatorname{ctg} x$ определен, если $\operatorname{tg} x \neq 0$, а $\operatorname{tg} x$ определен, если $\operatorname{ctg} x \neq 0$).

Ответ. $x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. ◀

Можно доказать, что для любого $a \in R$ справедлива формула

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a. \qquad (3)$$

Эта формула позволяет находить значения арктангенсов отрицательных чисел через значения арктангенсов положительных чисел. Например, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Упражнения

Вычислить (38—39).

38. 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

39. 1) $6\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $2\operatorname{arctg} 1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

40. Сравнить числа:

1) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\arccos\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\operatorname{arctg}2$; 4) $\operatorname{arctg}(-5)$ и $\operatorname{arctg}0$.

Решить уравнение (41—43).

41. 1) $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg}x=-1$; 5) $\operatorname{tg}x=4$; 6) $\operatorname{tg}x=-5$.

42. 1) $\operatorname{tg}3x=0$; 2) $1+\operatorname{tg}\frac{x}{3}=0$; 3) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{6}=0$.

---

43. 1) $(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})=0$; 2) $(\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})=0$;

3) $(\operatorname{tg}x-2)(2\cos x-1)=0$; 4) $(\operatorname{tg}x-4{,}5)(1+2\sin x)=0$;

5) $(\operatorname{tg}x+4)\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)=0$; 6) $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{6}+1\right)(\operatorname{tg}x-1)=0$.

44. Найти наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения $3\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0$.

45. Решить уравнение:

1) $\operatorname{arctg}(5x-1)=\frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}(3-5x)=-\frac{\pi}{3}$.

46. Доказать, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=a$ при любом a. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2{,}1)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-0{,}3))$;

3) $\operatorname{tg}(\pi-\operatorname{arctg}7)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}6\right)$.

47. Доказать, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha$ при $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $4\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}0{,}5)$; 2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}13)$.

48. Вычислить:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

49. Доказать, что при любом действительном значении a справедливо равенство $\cos(\operatorname{arctg}a)=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

§ 4. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Однородные и линейные уравнения

В предыдущих параграфах были выведены формулы корней простейших тригонометрических уравнений $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg}x=a$. К этим уравнениям сводятся другие тригонометрические уравнения. Для решения большинства таких уравнений требуется применение различных формул и преобразований тригонометрических выражений.

1. Уравнения, сводящиеся к алгебраическим

Рассмотрим уравнения вида

$$a\sin^2 x+b\sin x+c=0,\ a\neq 0. \tag{1}$$

Полагая $\sin x=t$, перепишем уравнение (1) в виде

$$at^2+bt+c=0. \tag{2}$$

Пусть $D=b^2-4ac<0$, тогда уравнение (2) не имеет действительных корней, и поэтому уравнение (1) не имеет корней.

Пусть $D\geqslant 0$, тогда уравнение (2) имеет корни

$$t_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ t_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},$$

а уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x=t_1,\ \sin x=t_2.$$

Уравнение (1) имеет действительные корни тогда и только тогда, когда $D\geqslant 0$ и по крайней мере одно из чисел t_1, t_2 по абсолютной величине не превосходит единицы.

Задача 1. Решить уравнение $\sin^2 x+\sin x-2=0$.

▷ Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Обозначив $\sin x=t$, получим уравнение $t^2+t-2=0$. Его корни $t_1=1$, $t_2=-2$. Таким образом, решение исходного уравнения свелось к решению простейших уравнений $\sin x=1$ и $\sin x=-2$.

Уравнение $\sin x=1$ имеет корни $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; уравнение $\sin x=-2$ не имеет корней.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. ◀

К квадратному уравнению относительно $\sin x$ можно свести уравнение $a\cos^2 x+b\sin x+c=0$, $a\neq 0$, если заменить $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$.

Аналогично уравнения вида

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0,\ a\neq 0,\quad a\sin^2 x+b\cos x+c=0,\ a\neq 0,$$

приводятся к квадратным уравнениям.

Задача 2. Решить уравнение $2\sin^2 x+\cos x-1=0$.

▷ Используя формулу $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ и полагая $\cos x=t$, получаем $2(1-t^2)+t-1=0$, или $2t^2-t-1=0$.

Это уравнение имеет корни $t_1=1$, $t_2=-\frac{1}{2}$.

Если $t=1$, т. е. $\cos x=1$, то $x=2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. Если $\cos x=-\frac{1}{2}$, то $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x=2\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. ◀

Задача 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x+1=0$.

▷ Так как $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то уравнение можно записать в виде

$\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0$. Умножая обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$, получаем $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Полагая $\operatorname{tg} x = t$, получаем уравнение $t^2 + t - 2 = 0$, имеющее корни $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.

Если $t = \operatorname{tg} x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а если $t = \operatorname{tg} x = -2$, то $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Так как $\operatorname{tg} x \neq 0$, то уравнение $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$ равносильно исходному.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Задача 4. Решить уравнение

$$3\cos^2 6x + 8\sin 3x \cos 3x - 4 = 0.$$

▷ Используя формулы $\sin^2 6x + \cos^2 6x = 1$, $\sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x$, преобразуем уравнение:

$$3(1 - \sin^2 6x) + 4\sin 6x - 4 = 0, \quad 3\sin^2 6x - 4\sin 6x + 1 = 0.$$

Обозначив $\sin 6x = t$, получим уравнение $3t^2 - 4t + 1 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Если $\sin 6x = 1$, то $6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. Если $\sin 6x = \frac{1}{3}$, то $6x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $x = \frac{(-1)^n}{6} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $x = \frac{(-1)^n}{6} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Задача 5. Решить уравнение $4\sin^3 x + 4\cos^2 x = 1 + 3\sin x$.

▷ Полагая $\sin x = t$, преобразуем уравнение к виду $4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 = 0$. Разложив левую часть полученного уравнения на множители, приходим к уравнению $(t-1)(4t^2 - 3) = 0$. Если $t = 1$, то $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Если $4t^2 = 3$, то $4\sin^2 x = 3$, $2(1 - \cos 2x) = 3$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

2. Однородные уравнения

Обратимся к уравнениям вида

$$a\sin x + b\cos x = 0, \tag{3}$$

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = 0, \tag{4}$$

предполагая, что в уравнении (3) хотя бы одно из чисел a, b не равно нулю, а в уравнении (4) хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля.

В каждом слагаемом левых частей этих уравнений сумма степеней синуса и косинуса одна и та же (в уравнении (3) она равна 1, а в уравнении (4) равна 2). Такие уравнения называют *однородными* относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Пусть в уравнении (3) $a \neq 0$, тогда значения x, при которых $\cos x = 0$, не удовлетворяют уравнению (3), так как если $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Поэтому в случае $a \neq 0$, разделив обе части уравнения (3) на $\cos x$, получим равносильное ему уравнение $a \operatorname{tg} x + b = 0$. Аналогично если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения (4) на $\cos^2 x$, получим равносильное ему уравнение $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$.

Задача 6. Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

▷ Разделив уравнение на $\cos x \neq 0$, получим $2\operatorname{tg} x - 3 = 0$, или $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$. Это уравнение равносильно исходному и имеет корни $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Задача 7. Решить уравнение $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

▷ Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное ему уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 2 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 2$, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$.

Исходное уравнение, равносильное совокупности уравнений $\operatorname{tg} x = 2$ и $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$, имеет две серии корней: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Замечание. К уравнению вида (4) сводится уравнение

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = d.$$

Для этого достаточно воспользоваться тождеством

$$d = d(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Задача 8. Решить уравнение $4\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

▷ Это уравнение равносильно каждому из следующих уравнений: $4\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$,

$$2\sin^2 x - \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0, \quad 2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Отсюда находим $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$, $\operatorname{tg} x = -1$.

Ответ. $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Рассмотрим уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = c, \quad a^2 + b^2 > 0. \qquad (5)$$

Будем считать, что $a \neq 0$, $b \neq 0$ (в противном случае получаем простейшее тригонометрическое уравнение вида $\sin x = \frac{c}{a}$ или $\cos x = \frac{c}{b}$).

Если $c=0$, то уравнение (5) является однородным и при $a\neq 0$ равносильно уравнению $a\,\mathrm{tg}\,x+b=0$.

Так как $a^2+b^2>0$, то, разделив обе части уравнения (5) на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим равносильное ему уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (6)$$

Заметим, что $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, откуда следует, что точка $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ лежит на единичной окружности.

Поэтому существует такой угол φ, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi. \qquad (7)$$

Следовательно, уравнение (6) можно записать в виде

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (8)$$

Уравнение (8), а вместе с ним и уравнение (5) имеет решение в том и только в том случае, когда

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1, \text{ или } c^2\leqslant a^2+b^2. \qquad (9)$$

Если условие (9) выполнено, то уравнение (5) имеет следующие решения: $x=-\varphi+(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, где φ определяется формулами (7).

Если условие (9) не выполнено, т. е. $|c|>\sqrt{a^2+b^2}$, или $c^2>a^2+b^2$, то уравнение (5) не имеет решений.

Изложенный метод преобразования линейного уравнения (5) к виду (8) называют *методом введения вспомогательного угла*.

Задача 9. Решить уравнение $4\sin x+3\cos x=5$.

▷ Разделив обе части данного уравнения на $\sqrt{4^2+3^2}=5$, получим равносильное данному уравнение $\frac{4}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x=1$.

Пусть φ — угол, такой, что $\cos\varphi=\frac{4}{5}$, $\sin\varphi=\frac{3}{5}$. В качестве φ можно взять угол $\arccos\frac{4}{5}$, а исходное уравнение записать в виде $\sin(x+\varphi)=1$, откуда $x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5}+$ $+2\pi n=\arcsin\frac{4}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, так как $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$.

Ответ. $x=\arcsin\frac{4}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. ◀

Упражнения

Решить уравнение (50—58).

50. 1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; 2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

3) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; 4) $2\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$.

51. 1) $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$; 2) $3\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;

3) $4\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$; 4) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

52. 1) $\operatorname{tg}^2 x = 2$; 2) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$;

3) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

---

53. 1) $1 + 7\cos^2 x = 3\sin 2x$; 2) $3 + \sin 2x = 4\sin^2 x$;

3) $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$;

4) $3\cos 2x + \sin^2 x + 5\sin x \cos x = 0$.

54. 1) $\cos x = \sin x$; 2) $2\sin x + \cos x = 0$;

3) $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$;

4) $3\sin^2 x - 14\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$.

55. 1) $\sin x + \cos x = 1$; 2) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$;

3) $10\sin^2 x + 5\sin x \cos x + \cos^2 x = 3$;

4) $6\sin^2 2x + 4\cos^2 2x - 8\sin 2x \cos 2x = 1$.

56. 1) $4\cos^3 x + 4\sin^2 x = 1 + 3\cos x$;

2) $8\sin^3 x + 4\cos^2 x = 1 + 6\sin x$;

3) $\frac{1}{\cos^2 x} = 3 + \operatorname{tg} x$; 4) $\frac{2}{\sin^2 2x} = \operatorname{ctg} 2x + 5$.

57. 1) $4\sin^4 x + \frac{1}{3}\cos^2 x = \frac{1}{2}$; 2) $16\cos^4 x + \sin^2 x = \frac{7}{4}$.

58. 1) $\sin^3 x + \sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x$;

2) $\sin^3 x - \sin^2 x \cos x + 2\cos^3 x = 0$.

59. Найти все значения a, при которых имеет решения уравнение:

1) $a\sin x + (1+a)\cos x = \sqrt{5}$; 2) $a\cos x + (1-a)\sin x = \sqrt{5}$.

60. Найти все значения a, при которых имеет корни уравнение $(a^2+2)\sin^2 x - 4a\sin x \cos x = a^2 + 3$.

§ 5. Методы замены неизвестного и разложения на множители. Метод оценки левой и правой частей тригонометрического уравнения

Одним из наиболее употребляемых методов решения тригонометрических уравнений является *метод разложения на множители*.

Задача 1. Решить уравнение

$$2\cos 2x \sin x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0.$$

▷ Вынося общий множитель $2\cos 2x$ первого и третьего слагаемых, запишем уравнение в виде

$$2\cos 2x(\sin x+1)-(\sin x+1)=0, \quad (\sin x+1)(2\cos 2x-1)=0.$$

Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\sin x=-1$, $\cos 2x=\frac{1}{2}$, имеющих корни $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ и $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. ◀

Задача 2. Решить уравнение $\sin 7x+\sin 3x=3\cos 2x$.

▷ Применяя формулу суммы синусов, запишем уравнение в виде $2\sin 5x\cos 2x=3\cos 2x$, откуда $\cos 2x\left(\sin 5x-\frac{3}{2}\right)=0$.

Уравнение $\cos 2x=0$ имеет корни $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$, а уравнение $\sin 5x=\frac{3}{2}$ не имеет корней.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. ◀

Задача 3. Решить уравнение $\cos 3x+\sin 5x=0$.

▷ Преобразуем уравнение, используя формулу $\sin t=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ и формулу суммы косинусов:

$$\cos 3x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0, \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Ответ. $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. ◀

Задача 4. Решить уравнение $\sin x\cos 5x=\sin 9x\cos 3x$.

▷ Преобразуя произведения тригонометрических функций в суммы (разности), запишем уравнение в виде

$\frac{1}{2}(\sin 6x-\sin 4x)=\frac{1}{2}(\sin 12x+\sin 6x)$, откуда $\sin 12x+\sin 4x=0$.

Применив формулу суммы синусов, разложим левую часть уравнения на множители, получим $\sin 8x\cos 4x=0$.

Так как $\sin 8x=2\sin 4x\cos 4x$, то исходное уравнение равносильно уравнению $\sin 8x=0$ (все корни уравнения $\cos 4x=0$ содержатся среди корней уравнения $\sin 8x=0$).

Ответ. $x=\frac{\pi n}{8}$, $n\in Z$. ◀

Задача 5. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\cos^2 2x=\sin^2 3x+\cos^2 4x.$$

▷ Используя формулы $\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$, $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$, преобразуем данное уравнение:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2},$$

откуда $\cos 2x-\cos 4x=\cos 6x-\cos 8x$.

Применяя формулу разности косинусов, получаем

$$2\sin x\sin 3x=2\sin 7x\sin x,\ \ \sin x(\sin 7x-\sin 3x)=0,$$
$$\sin x\sin 2x\cos 5x=0,\ \ \sin^2 x\cos x\cos 5x=0.$$

Так как каждый корень уравнения $\cos x=0$ является корнем уравнения $\cos 5x=0$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\sin x=0$, $\cos 5x=0$, которые не имеют общих корней.

Ответ. $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$. ◀

Задача 6. Решить уравнение $\sin^6 x+\cos^6 x=\cos 2x$.

▷ Выразим левую часть уравнения через $\cos 2x$, для чего воспользуемся формулой $a^3+b^3=(a+b)((a+b)^2-3ab)$. Полагая в этой формуле $a=\sin^2 x$, $b=\cos^2 x$, получаем

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{1+3\cos^2 2x}{4}.$$

Если $t=\cos 2x$, то исходное уравнение примет вид $3t^2-4t+1=0$, откуда $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{3}$, т. е. $\cos 2x=1$, $\cos 2x=\frac{1}{3}$.

Ответ. $x=\pi n$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. ◀

При решении уравнения вида $a(\sin x+\cos x)+b\sin 2x+c=0$ целесообразно ввести *новое неизвестное* $t=\sin x+\cos x$. Тогда $\sin 2x=t^2-1$ и уравнение сводится к квадратному относительно t.

Задача 7. Решить уравнение $2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0$.

▷ Полагая $\sin x+\cos x=t$ и учитывая, что $\sin 2x=t^2-1$, получаем квадратное уравнение $t^2+2t=0$, имеющее корни $t_1=0$, $t_2=-2$. Уравнение $\sin x+\cos x=-2$ не имеет корней, а уравнение $\sin x+\cos x=0$ имеет корни $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. ◀

Если уравнение имеет вид $a(\sin x-\cos x)+b\sin 2x+c=0$, то его можно свести к квадратному, полагая $\sin x-\cos x=t$.

Если левая часть тригонометрического уравнения $f(x)=0$ является рациональной функцией относительно $\sin x$ и $\cos x$, т. е. представляется в виде отношения многочленов от $\sin x$ и $\cos x$, то это уравнение сводится к алгебраическому относительно $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, так как при $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, т. е. $x\neq\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Задача 8. Решить уравнение $\sin x+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=2$.

▷ Значения $x=(2n+1)\pi$ не являются корнями уравнения, и поэтому можно воспользоваться подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

Так как $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{t}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, то исходное уравнение можно записать в виде $\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1}{t}=2$.

Преобразуем это уравнение:

$$2t^2+1+t^2=2t^3+2t,\ 2t^3-3t^2+2t-1=0,$$

$$2(t^3-t^2)-(t^2-t)+t-1=0,\ (t-1)(2t^2-t+1)=0.$$

Уравнение $2t^2-t+1=0$ не имеет действительных корней. Поэтому исходное уравнение сводится к уравнению $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. ◀

Замечание. Использование подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ при решении тригонометрических уравнений нередко приводит к трудной задаче нахождения корней многочлена. Поэтому такую подстановку, как правило, применяют лишь в том случае, когда нет других путей решения уравнения.

Заметим, что *предварительная оценка левой и правой частей уравнения* иногда позволяет найти его решения или установить, что уравнение не имеет решений.

В некоторых случаях можно воспользоваться неравенствами $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$.

Например, эти неравенства позволяют утверждать, что уравнение $3\sin^5 2x+4\cos^6 2x=7$ не имеет решений, так как равенства $\sin 2x=1$ и $|\cos 2x|=1$ не могут выполняться одновременно.

Задача 9. Решить уравнение $\sin x\sin 9x\sin 13x=1$.

▷ Уравнение может иметь решения только в двух случаях: $\sin x=1$, $\sin x=-1$. Если $\sin x=1$, то $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, откуда $\sin 9x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(2+9n)2\pi\right)=1$, $\sin 13x=1$. Следовательно, числа $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$, являются корнями исходного уравнения.

Если $\sin x=-1$, то $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\sin 9x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+(9n-2)2\pi\right)=-1$, $\sin 13x=-1$, $\sin x\sin 9x\sin 13x=-1$ и поэтому корни уравнения $\sin x=-1$ не являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. ◀

Задача 10. Решить уравнение $(\cos 2x-\cos 4x)^2=4+\cos^2 x$.

▷ Так как $|\cos 2x-\cos 4x|\leqslant 2$, то $(\cos 2x-\cos 4x)^2\leqslant 4$, причем равенство $(\cos 2x-\cos 4x)^2=4$ является верным лишь в следующих двух случаях:

1) $\cos 2x=1$ и $\cos 4x=-1$; 2) $\cos 2x=-1$ и $\cos 4x=1$.

Для правой части исходного уравнения справедливо неравенство $4+\cos^2 x\geqslant 4$, а если $\cos x=0$, то правая часть равна 4. Таким образом, исходное уравнение может иметь решение в двух случаях (при одновременном выполнении трех равенств):

1) $\cos 2x=1$, $\cos 4x=-1$, $\cos x=0$;
2) $\cos 2x=-1$, $\cos 4x=1$, $\cos x=0$.

Пусть $\cos 2x=1$, тогда $x=\pi n$, $\cos 4x=1$. В этом случае решений нет. Пусть $\cos 2x=-1$, тогда $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\cos 4x=\cos(2\pi+4\pi n)=$ $=1$, $\cos x=0$. Следовательно, числа $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, являются корнями исходного уравнения. ◀

Задача 11. Решить уравнение

$$\sin^6 x+\cos^8 x=1. \qquad (1)$$

▷ Заметим, что если $0\leqslant a\leqslant 1$, то $a^k\leqslant a$ для любого $k\in\boldsymbol{N}$, $k\geqslant 2$, причем равенство $a^k=a$ справедливо только при $a=0$ и $a=1$.

Полагая $a=\sin^2 x$, получаем неравенство

$$\sin^6 x\leqslant\sin^2 x, \qquad (2)$$

справедливое при всех $x\in\boldsymbol{R}$, причем равенство $\sin^6 x=\sin^2 x$ является верным только в случаях $\sin x=0$ и $|\sin x|=1$.

Аналогично для любого $x\in\boldsymbol{R}$ справедливо неравенство

$$\cos^8 x\leqslant\cos^2 x, \qquad (3)$$

причем равенство $\cos^8 x=\cos^2 x$ является верным только в случаях $\cos x=0$ и $|\cos x|=1$.

Складывая неравенства (2) и (3), получаем неравенство $\sin^6 x+\cos^8 x\leqslant 1$, справедливое при всех $x\in\boldsymbol{R}$, причем равенство (1) является верным только тогда, когда либо $\sin x=0$, либо $\cos x=0$, т. е. когда $\sin 2x=0$, откуда $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. ◀

Упражнения

Решить уравнение (61—73).

61. 1) $\cos x=\cos 3x$; 2) $\sin 5x=\sin x$;
3) $\sin 2x=\cos 3x$; 4) $\sin x+\cos 3x=0$.

62. 1) $\cos 3x-\cos 5x=\sin 4x$; 2) $\sin 7x-\sin x=\cos 4x$;
3) $\cos x+\cos 3x=4\cos 2x$; 4) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos 4x$.

---

63. 1) $\sqrt{3}\sin x\cos x=\sin^2 x$; 2) $2\sin x\cos x=\cos x$;
3) $\sin 4x+\sin^2 2x=0$; 4) $\sin 2x+2\cos^2 x=0$.

64. 1) $2\sin^2 x=1+\frac{1}{3}\sin 4x$; 2) $2\cos^2 2x-1=\sin 4x$;
3) $2\cos^2 2x+3\cos^2 x=2$; 4) $(\sin x+\cos x)^2=1+\cos x$.

65. 1) $2\sin 2x-3(\sin x+\cos x)+2=0$;
2) $\sin 2x+3=3\sin x+3\cos x$;
3) $\sin 2x+4(\sin x+\cos x)+4=0$;
4) $\sin 2x+5(\cos x+\sin x+1)=0$.

66. 1) $1-\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=0$;

2) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(\sin x+\cos x)^2$;

3) $1+\cos x=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; 4) $\sin x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$.

67. 1) $4\sin x\cos x\cos 2x=\sin^2 4x$; 2) $1+\cos^2 x=\sin^4 x$.

68. 1) $\cos 2x+4\sin^4 x=8\cos^6 x$; 2) $\cos^4 x+\sin^8 x=1$;

3) $2\sin^2 x+\frac{1}{4}\cos^3 2x=1$; 4) $\sin^2 2x+\cos^2 3x=1+4\sin x$.

69. 1) $\cos^2 x+\cos^2 2x=\cos^2 3x$; 2) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\frac{3}{2}$;

3) $\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=2$;

4) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$.

70. 1) $\cos 7x\cos 13x=\cos x\cos 19x$; 2) $\sin x\sin 5x=\sin 2x\sin 4x$;

3) $\cos x\cos 3x=\frac{1}{2}$; 4) $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}$.

71. 1) $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cos 2x=0$;

2) $6\cos 2x\sin x+7\sin 2x=0$;

3) $\sin x\sin 5x=1$; 4) $\sin x\cos 4x=-1$.

72. 1) $5\sin^4 x+3\cos^6 x=8$; 2) $\sin^3 x+2\cos^5 x=\sqrt{10}$;

3) $\sin x\sin 5x\sin 17x=1$; 4) $\cos x\cos 2x\cos 3x=1$.

73. 1) $\sin\left(\frac{3\pi}{5}+x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right)$; 2) $\sin x+\frac{1}{\sin x}=\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}$;

3) $\cos^2 2x+\frac{1}{\cos^2 2x}=\cos 2x+\frac{1}{\cos 2x}$.

74. Доказать, что уравнение $\sin 5x\sin 7x=1$ не имеет корней.

75. Найти все значения a, при которых имеет корни уравнение $\sin^6 x+\cos^6 x=a$.

§ 6. Системы тригонометрических уравнений

Задача 1. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{1}{2},\\ \cos x\sin y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

▷ Складывая уравнения данной системы и вычитая из второго уравнения первое, получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=0,\\ \cos x\sin y-\sin x\cos y=1,\end{cases}\quad \text{откуда}\quad \begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(y-x)=1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=\pi n,\\ y-x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ n\in\mathbf{Z},\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим

$$x=\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}-\pi k=\pi\left(\frac{n}{2}-k-\frac{1}{4}\right),\quad y=\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi k=\pi\left(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{4}\right).$$

Ответ. $\left(\pi\left(\frac{n}{2}-k-\frac{1}{4}\right);\ \pi\left(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{4}\right)\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$. ◄

Отметим, что в равенствах $\begin{cases} x+y=\pi n, \\ y-x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \end{cases}$

буквы n и k могут принимать различные целые значения независимо друг от друга. Если в обоих равенствах написать одну букву n, то будут потеряны решения.

<u>Задача 2.</u> Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cos x\cos y+7\sin x\sin y=4, \\ 5\cos x\cos y-3\sin x\sin y=3. \end{cases}$$

▷ Пусть $\cos x\cos y=u$, $\sin x\sin y=v$. Тогда система примет вид $\begin{cases} 3u+7v=4, \\ 5u-3v=3. \end{cases}$ Решая эту систему, находим $u=\frac{3}{4}$, $v=\frac{1}{4}$.

Исходная система равносильна системе $\begin{cases} \cos x\cos y=\frac{3}{4}, \\ \sin x\sin y=\frac{1}{4}. \end{cases}$ Складывая и вычитая уравнения этой системы, получаем систему $\begin{cases} \cos(x-y)=1, \\ \cos(x+y)=\frac{1}{2}, \end{cases}$ равносильную исходной, откуда $\begin{cases} x-y=2\pi n, \\ x+y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k. \end{cases}$

Ответ. $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi k+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi k-\pi n\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$. ◄

<u>Задача 3.</u> Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y=5\sin x, \\ 4\cos x+\cos y=3. \end{cases}$$

▷ Исключим из данной системы y. С этой целью запишем второе уравнение в виде

$$\cos y=3-4\cos x, \tag{1}$$

а затем возведем каждое уравнение системы в квадрат и сложим, получим уравнение $1=25(1-t^2)+9-24t+16t^2$,

$$3t^2+8t-11=0, \tag{2}$$

где $t=\cos x$. Уравнение (2) имеет корни $t_1=1$, $t_2=-\frac{11}{3}$.

Отбрасывая второй корень, получаем $t=1$, т. е. $\cos x=1$, откуда $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Тогда из уравнения (1) следует, что $\cos y=-1$, $y=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Если $\cos x=1$, $\cos y=-1$, то $\sin x=0$, $\sin y=0$, поэтому найденные значения x и y удовлетворяют первому уравнению системы.

Ответ. $(2\pi n;\ \pi+2\pi k)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$. ◄

Упражнения

Решить систему уравнений (76—78).

76. 1) $\begin{cases}\cos(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{1}{2},\\ \cos x\sin y=\frac{1}{2};\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sin x\cos y=\frac{1}{2},\\ \cos x\sin y=\frac{1}{2};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{\sqrt{3}}{4},\\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4}.\end{cases}$

77. 1) $\begin{cases}\sin x-\sin y=1,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x+\cos y=\frac{1}{2},\\ \sin^2 x+\sin^2 y=\frac{7}{4};\end{cases}$

3) $\begin{cases}\cos(x-y)=2\cos(x+y),\\ \cos x\cos y=\frac{3}{4};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2},\\ \cos x\cos y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

78. 1) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1,\\ \cos x\cos y=\frac{1}{\sqrt{2}};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=1,\\ \sin x\cos y+\operatorname{ctg} x\operatorname{tg} y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

§ 7. Тригонометрические неравенства

Задача 1. Решить неравенство $\cos x>\frac{1}{2}$.

▷ По определению $\cos x$ — это абсцисса точки единичной окружности. Чтобы решить неравенство $\cos x>\frac{1}{2}$, нужно выяснить, какие точки единичной окружности имеют абсциссу, большую $\frac{1}{2}$. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рис. 134).

Точка M_1 получается поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол $-\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n=\pm1,\ \pm2,\ \dots$. Точка M_2 получается поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n=\pm1,\ \pm2,\ \dots$.

Абсциссу, большую $\frac{1}{2}$, имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2. Таким образом, решениями неравенства $\cos x>\frac{1}{2}$ являются все числа x из промежутка $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$.

Все решения данного неравенства — множество интервалов $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. ◀

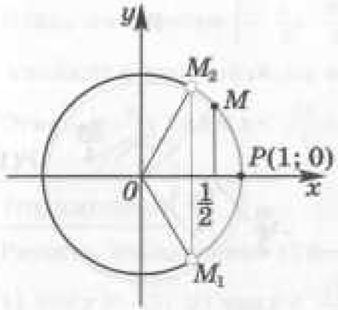


Рис. 134

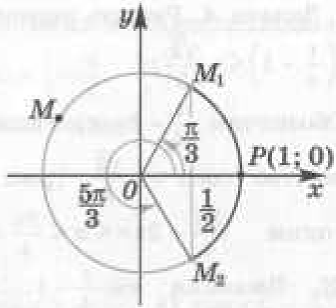


Рис. 135

<u>Задача 2.</u> Решить неравенство $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

▷ Абсциссу, не большую $\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 135). Поэтому решениями неравенства $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ являются числа x, которые принадлежат промежутку $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$. Все решения данного неравенства — множество отрезков $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

<u>Задача 3.</u> Решить неравенство $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$.

▷ Ординату, не меньшую $-\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 136). Поэтому решениями неравенства $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ являются числа x, принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$. Все решения данного неравенства — множество отрезков $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◀

Отметим, что все точки окружности, лежащие ниже прямой M_1M_2, имеют ординату, меньшую $-\frac{1}{2}$ (см. рис. 136). Поэтому все числа $x \in \left(-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{\pi}{6}\right)$ являются решениями неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$. Все решения этого неравенства — интервалы $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

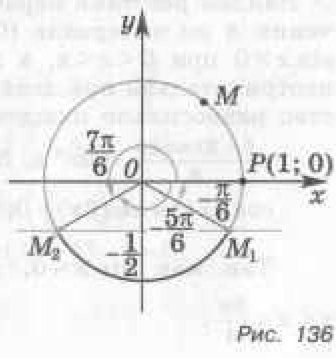


Рис. 136

Задача 4. Решить неравенство $\cos\left(\frac{t}{4}-1\right)\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

▷ Обозначим $\frac{t}{4}-1=x$. Решая неравенство $\cos x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 137), находим $\frac{3\pi}{4}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Заменяя $x=\frac{t}{4}-1$, получаем

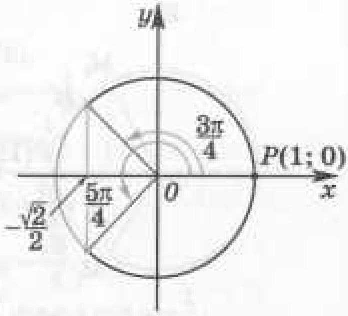


Рис. 137

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n\leqslant\frac{t}{4}-1\leqslant\frac{5\pi}{4}+2\pi n,$$

откуда

$$1+\frac{3\pi}{4}+2\pi n\leqslant\frac{t}{4}\leqslant1+\frac{5\pi}{4}+2\pi n,$$

$$4+3\pi+8\pi n\leqslant t\leqslant4+5\pi+8\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. ◀$$

Задача 5. Решить неравенство $4\cos^2x-12\cos x+5<0$.

▷ Полагая $\cos x=t$, получаем квадратное неравенство $4t^2-12t+5<0$, равносильное неравенству $\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{5}{2}\right)<0$. Поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\cos x-\frac{5}{2}\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)<0,\text{ откуда }\left(\frac{5}{2}-\cos x\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)>0.$$

Так как $\frac{5}{2}-\cos x>0$, то полученное неравенство равносильно неравенству $\cos x>\frac{1}{2}$, которое было решено в задаче 1.

Ответ. $-\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. ◀

Задача 6. Решить неравенство $\sqrt[4]{\frac{5+3\cos4x}{8}}>-\sin x$.

▷ Найдем решения неравенства на отрезке длиной 2π. Все значения x из интервала $(0;\ \pi)$ — решения неравенства, так как $\sin x>0$ при $0<x<\pi$, а левая часть неравенства определена и неотрицательна при всех x. Если $\sin x\leqslant0$, то исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\frac{5+3\cos4x}{8}>\sin^4x,\ 5+3\cos4x>2(1-2\cos2x+\cos^22x),$$

$$\cos2x(1+\cos2x)>0,\ \cos2x>0,\ \sin^2x<\frac{1}{2},\ |\sin x|<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Так как $\sin x\leqslant0$, то $-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin x\leqslant0$, откуда $-\frac{\pi}{4}<x\leqslant0$, $\pi\leqslant x<\frac{5\pi}{4}$.

Итак, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ решениями исходного неравенства являются все числа из интервала $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right)$.

Ответ. $-\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. ◄

Упражнения

Решить неравенство (79—86).

79. 1) $\cos x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

80. 1) $\cos x\leqslant\sqrt{3}$; 2) $\cos x<-2$; 3) $\cos x\geqslant 1$; 4) $\cos x\leqslant -1$.

81. 1) $\sin x>\frac{1}{2}$; 2) $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

82. 1) $\sin x\geqslant-\sqrt{2}$; 2) $\sin x>1$; 3) $\sin x\leqslant -1$; 4) $\sin x\geqslant 1$.

83. 1) $\sqrt{2}\cos 2x\leqslant 1$; 2) $2\sin 3x>-1$.

84. 1) $\cos\left(\frac{x}{3}+2\right)\geqslant\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4}-3\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

85. 1) $\sin^2 x+2\sin x>0$; 2) $\cos^2 x-\cos x<0$;
3) $2\sin^2 x-\sin x-3<0$; 4) $2\cos^2 x-3\cos x-2>0$.

86. 1) $\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{4}}{\sqrt{3}-(\sin x+\cos x)}>0$; 2) $\sqrt[4]{\dfrac{7-\cos 4x}{2}}>-2\cos x$;
3) $\sqrt[4]{\dfrac{7-\cos 4x}{2}}>-2\sin x$.

Упражнения к главе IX

87. Вычислить:
1) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}-4\arcsin 1$;
3) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\arccos(-1)-\arcsin(-1)$.

Решить уравнение (88—98).

88. 1) $\cos(4-2x)=-\frac{1}{2}$; 2) $\cos(6+3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-\sqrt{3}=0$.

89. 1) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$; 2) $1-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$;
3) $3+4\sin(2x+1)=0$; 4) $5\sin(2x-1)-2=0$.

90. 1) $(1+\sqrt{2}\cos x)(1-4\sin x\cos x)=0$;
2) $(1-\sqrt{2}\cos x)(1+2\sin 2x\cos 2x)=0$.

91. 1) $\mathrm{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$; 2) $\mathrm{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{3}-\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=0$; 4) $1-\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=0$.

92. 1) $2\sin^2 x+\sin x=0$; 2) $3\sin^2 x-5\sin x-2=0$;

3) $\cos^2 x-2\cos x=0$; 4) $6\cos^2 x+7\cos x-3=0$.

93. 1) $6\sin^2 x-\cos x+6=0$; 2) $8\cos^2 x-12\sin x+7=0$.

94. 1) $\mathrm{tg}^2 x+3\,\mathrm{tg}\,x=0$; 2) $2\,\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}\,x-3=0$;

3) $\mathrm{tg}\,x-12\,\mathrm{ctg}\,x+1=0$; 4) $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=2$.

---

95. 1) $2\sin 2x=3\cos 2x$; 2) $4\sin 3x+5\cos 3x=0$;

3) $5\sin x+\cos x=0$; 4) $4\sin x+3\cos x=0$.

96. 1) $3\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$;

2) $2\sin^2 x+3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

97. 1) $\sin 3x=\sin 5x$; 2) $\cos x=\cos 3x$.

98. 1) $\cos^2 3x-\cos 3x\cos 5x=0$; 2) $\sin x\sin 5x-\sin^2 5x=0$.

Вычислить (99—100).

99. 1) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 3) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

100. 1) $\sin(4\arcsin 1)$; 2) $\sin\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\cos(6\arcsin 1)$; 4) $\mathrm{tg}\left(4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение (101—107).

101. 1) $\sin 2x+2\cos 2x=1$; 2) $\cos 2x+3\sin 2x=3$.

102. 1) $1+2\sin x=\sin 2x+2\cos x$; 2) $1+3\cos x=\sin 2x+3\sin x$.

103. 1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1+\cos 2x$;

2) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x$.

104. 1) $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\frac{1}{4}$;

2) $\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x=\frac{1}{4}$.

105. 1) $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$; 2) $\sin^2 x+\cos^2 2x=1$;

3) $\sin 4x=6\cos^2 2x-4$; 4) $2\cos^2 3x+\sin 5x=1$.

106. 1) $\sin^2 x-\cos x\cos 3x=\frac{1}{4}$; 2) $\sin 3x=3\sin x$;

3) $3\cos 2x-7\sin x=4$; 4) $1+\cos x+\cos 2x=0$.

107. 1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$; 2) $\cos x-\cos 3x=\cos 2x-\cos 4x$.

Вычислить (108—109).

108. 1) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 2) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

109. 1) $\operatorname{tg}\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{5}{4}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}2\right)$.

Решить уравнение (110—118).

110. 1) $\frac{\sin 2x}{\sin x}=0$; 2) $\frac{\sin 3x}{\sin x}=0$; 3) $\frac{\cos 2x}{\cos x}=0$;

4) $\frac{\cos 3x}{\cos x}=0$; 5) $\frac{\sin x}{\sin 5x}=0$; 6) $\frac{\cos x}{\cos 7x}=0$.

111. 1) $\cos x\sin 5x=-1$; 2) $\sin x\cos 3x=-1$.

112. 1) $2\cos 3x=3\sin x+\cos x$; 2) $\cos 3x-\cos 2x=\sin 3x$.

113. 1) $\sin 2x+\cos 2x=2\operatorname{tg}x+1$; 2) $\sin 2x-\cos 2x=\operatorname{tg}x$.

114. 1) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\sin^2 2x$; 2) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}$;

3) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$;

4) $\cos^2 x+\cos^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$.

115. 1) $\sin 3x+|\sin x|=\sin 2x$; 2) $\cos 3x+|\cos x|=\sin 2x$.

116. 1) $\frac{2\cos x+\sin^2 x}{\operatorname{ctg}x-\sin 2x}=\operatorname{tg}2x$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}{\cos x+3\cos 2x}=\operatorname{ctg}2x$;

3) $\frac{\cos 3x-\sin x}{\cos 5x-\sin 3x}=1$; 4) $\frac{\cos 3x+\sin 5x}{\cos x+\sin 3x}=-1$.

117. 1) $\sqrt{2\cos x-\sin x}=\operatorname{ctg}x\sqrt{\sin x}$; 2) $\sqrt{6\sin x\cos 2x}=\sqrt{-7\sin 2x}$;

3) $\sqrt{5\operatorname{tg}x+10}=\frac{5}{2}\sin x+\frac{1}{\cos x}$;

4) $\sqrt{12-6\sqrt{2}\operatorname{tg}x}=3\sin x-\frac{\sqrt{2}}{\cos x}$.

118. 1) $\frac{(\sqrt{3}+1)\sin 3x+\sin 5x}{|\sin x|}=\sqrt{3}$; 2) $\frac{(\sqrt{3}+1)\cos 3x-\cos 5x}{|\cos x|}=\sqrt{3}$;

3) $\frac{2\sin 3x}{\sin x}=\frac{|\cos 6x|}{\cos 2x}$; 4) $\frac{\sin 6x}{|\sin 4x|}=\frac{\cos 3x}{\cos x}$.

Решить систему уравнений (119—122).

119. 1) $\begin{cases}\sin y\cos y=\frac{1}{2},\\ \sin 2x+\sin 2y=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x+\sin y=1,\\ \cos x-\cos y=\sqrt{3}.\end{cases}$

120. 1) $\begin{cases}\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{5}{3},\\ \frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1}{3};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y=\frac{1}{2},\\ \cos x\sin y=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

121. 1) $\begin{cases}\sin x+\cos y=1,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4\sin x-2\sin y=3,\\ 2\cos x-\cos y=0.\end{cases}$

122. 1) $\begin{cases}\operatorname{ctg}^4 2x+32\sin^2 y=55,\\ \frac{1}{\sin^2 2x}-4\cos y=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=1,\\ \sin 2y-\sqrt{2}\sin x=1;\end{cases}$

3) $\begin{cases} \cos 2x - 2\cos^2 y + 2 = 0, \\ \cos x \sqrt{\cos y} = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{1 + \sin x \sin y} = \cos y, \\ 2 \operatorname{ctg} x \sin y + \sqrt{3} = 0. \end{cases}$

Решить неравенство (123—125).

123. 1) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$; 2) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 > 0$.

124. 1) $\sin \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} > 0$; 2) $\cos 2x + \cos x \geqslant 0$.

125. 1) $\cos^2 x > \frac{3}{4}$; 2) $\sin^2 x < \frac{1}{2}$.

126. Найти все решения неравенства $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$ на интервале $(0;\ 2\pi)$.

127. Найти все решения неравенства $\sin x \sin 2x < \sin 3x \sin 4x$ на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

128. Найти все значения a, при которых уравнение

$$4\sin^2 x + 2(a-3)\cos x + 3a - 4 = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

129. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = a$$

не имеет корней.

130. При каких значениях a уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ имеет корни? Найти эти корни.

131. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = a$$

имеет корни.

132. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin 2x - 2a\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1 - 6a^2 = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

Вопросы к главе IX

1. Что называется арккосинусом числа a?
2. Что называется арксинусом числа a?
3. Что называется арктангенсом числа a?
4. Записать формулы для нахождения корней уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.
5. Записать равенства для вычисления $\arcsin(-a)$, $\arccos(-a)$, $\operatorname{arctg}(-a)$.
6. Какие уравнения называют однородными? Привести пример.
7. Привести пример уравнения, при решении которого можно использовать метод вспомогательного угла.
8. Привести пример уравнения, при решении которого можно использовать формулы замены синуса и косинуса тангенсом половинного аргумента.

Проверь себя

1. Найти значение выражения:

   1) $\arccos 1+\arcsin 0$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Решить уравнение:

   1) $\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x=1$; 2) $2\cos^2 x+5\cos x=3$;
   3) $\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg} x=0$; 4) $\sin 3x-\sin x=0$; 5) $2\sin x+\sin 2x=0$.

---

1. Вычислить: 1) $\cos(\pi-\arccos 0{,}2)$; 2) $\sin(\arccos 0{,}6)$.
2. Найти значения a, при которых имеет смысл выражение $\arcsin(1-3a)$.
3. Найти все решения уравнения $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0{,}5$, удовлетворяющие неравенству $x^2-4\pi^2<0$.
4. Решить уравнение:

   1) $\sin^2 x-6\cos^2 x-5\sin x\cos x=0$; 2) $\sin x+2\cos x=|\sin x|$;
   3) $\sin 2x-5\sin x+5\cos x+5=0$;
   4) $\sin 2x\cos 4x=\sin 6x\cos 8x$.

Историческая справка

Еще древнегреческие математики, используя элементы тригонометрии для решения прямоугольных треугольников, фактически составляли и решали простейшие тригонометрические уравнения типа $\sin x=a$, где $0<x<\frac{\pi}{2}$ и $|a|<1$.

Исторически учение о решении тригонометрических уравнений формировалось параллельно с развитием теории тригонометрических функций, а также черпало из алгебры общие методы их решения.

Начиная с XVIII в. основными прикладными задачами тригонометрии стали задачи, описывающие колебательные движения, законы прохождения звука, света, электромагнитных волн. Из физики, например, известно, что уравнения гармонических колебаний маятника, переменного электрического тока записываются в виде

$$y=A\sin(\omega t+\alpha).$$

Как мы уже убедились, часть тригонометрических уравнений непосредственно решается сведением их к простейшему виду, иногда с предварительным разложением левой части уравнения на множители, когда правая часть равна 0. В некоторых случаях удается произвести замену неизвестных таким образом, что тригонометрическое уравнение преобразуется в «удобное» для решения алгебраическое уравнение.

К сожалению, нельзя указать общего метода решения тригонометрических уравнений, почти каждое из них (кроме простейших) требует особого подхода.

Предметный указатель

Ответы

Глава I

1. 2) 1. **2.** 2) 0,027; −0,064. **3.** 2) $3x^8y^{17}z^7$; 4) $-\frac{1}{9}a^6b^5c^6$. **4.** 2) $10x^4y^2-$ $-3x^2y^2-14$. **5.** 2) $-6x^3+2x^3y+3x^2y$. **6.** 2) $2{,}5b-7ab-1{,}5a^2$. **7.** 2) $-x^3+x^2+$ $+9x-9$. **8.** 2) $0{,}16a^4-4a^2b+25b^2$; 4) $36k^2+6kn+0{,}25n^2$; 6) $0{,}008-0{,}12b+$ $+0{,}6b^2-b^3$; 8) $a^3-a^2+\frac{1}{3}a-\frac{1}{27}$. **9.** 2) $(5n-7p^2)(5n+7p^2)$; 4) $\left(0{,}09x^3-\right.$ $\left.-1\frac{1}{3}y^5\right)\left(0{,}09x^3+1\frac{1}{3}y^5\right)$. **10.** 2) $6ab^2(a-6b)^2$; 4) $(a+b)(a^2-3)$; 6) $(a-b)(a-b-3)$. **11.** 2) $\frac{a^3}{a-b}$; 4) $\frac{2n-m}{5}$; 6) $-\frac{4a^2+6a+9}{2a+3}$. **12.** 2) $\frac{b}{a-b}$; 4) $\frac{5a^2+a-5ab-3b}{a(a-b)}$; 6) $\frac{16}{9a^2-16}$; 8) $\frac{3c^2(3-a)}{2a^2(3+a)}$; 10) $\frac{15}{(a-b)(3b+2)}$; 12) $\frac{x-2}{2}$. **13.** 2) $\frac{1}{3}$. **14.** 2) b^{-2}; 4) например, $\left(cd^2\right)^{-5}$. **15.** 2) $7{,}4\cdot10^{-5}$; 4) $1{,}40112\cdot10^3$. **17.** 2) $26m^3n^3-8m^4n^2-15m^2n^4$. **18.** 2) $-\frac{1}{2b}$. **19.** 2) $x=1$; 4) $x=2{,}8$. **20.** 2) $x=0{,}92$. **21.** 2) $x=1{,}11$. **22.** 2 км/ч. **23.** 160 км. **24.** (2; 7). **25.** 2) (−2; −5). **26.** 2) $\left(2;\ \frac{3}{2}\right)$. **27.** 60 и 70 страниц в день. **28.** −10 и 18. **29.** 240 приборов. **30.** 80 и 120 слов. **31.** 2) $\left(x;\ \frac{4x-2}{3}\right)$, где x — любое число. **32.** 7 бригад по 6 человек и 1 бригада из 8 человек; 3 бригады по 6 человек и 4 бригады по 8 человек. **33.** 2) $\left(-\frac{6}{19};\ 1\frac{10}{19}\right)$; 4) (−0,5; −2,125); 6) (0,1; −0,3). **34.** 2) $x=\pm1{,}6$; 4) $x_1=-1$, $x_2=3$; 6) $x_1=-1$, $x_2=5$. **35.** 2) При $a\neq2$. **36.** 2) При $a=0{,}8$. **37.** 2) Такого значения a не существует. **38.** 2) При $a=-7$ x — любое число; при $a\neq-7$ корней нет; 4) при $a=0$ и $b=1$ x — любое число; при $a=0$ и $b\neq1$ корней нет, при $a\neq0$ $x=\frac{b-1}{2a}$; 6) при $a=0$, $b=0$ x — любое число; при $a=0$ и $b\neq0$ корней нет; при $a\neq0$ $x=\frac{5b-2a}{a}$; 8) при $a=\frac{3}{2}$ и $b=-4$ x — любое число; при $a=\frac{3}{2}$ и $b\neq-4$ корней нет; при $a\neq\frac{3}{2}$ $x=2b+8$. **39.** 2) При $a=3$. **40.** 2) $a=2$; $(3y+5;\ y)$, где y — любое число. **41.** 2) 53 двери в день. **42.** 2) 40 км. **43.** 2) 85 км/ч, 90 км/ч. **44.** 2) 39 лет, 13 лет. **45.** 2) 55 р. и 108 р. **46.** 2) $c<0$. **51.** 2) $x\geqslant2{,}2$. **52.** 2) $n=1$; 4) $n=-5$. **53.** $x=8$. **54.** 2) Решений нет; 4) $x\leqslant-5$. **58.** 2) $x=-9$. **59.** 2) $x\leqslant0$; 4) $-2\leqslant x<4$. **60.** −3; −2; −1; 0; 1. **61.** 2) $x<2{,}5$. **62.** 2) $x_1=-4$, $x_2=-8$; 4) нет корней; 6) $x_1=-2$, $x_2=3$. **63.** 2) $-1<x<5$; 4) $x\leqslant-3$; $x\geqslant5$. **64.** 2) Нет решений. **65.** 2) $-0{,}6\leqslant x<0{,}3$. **67.** −3; −13; −9. **68.** 2; $\frac{1}{2}$. **69.** 2) 0; 1. **71.** 2) $x\approx-2{,}5$ и $x\approx5{,}3$; 4) $y(-5)<y(-2)$; $y(-3)>y(7)$; $y(0)<y(2)$. **72.** 1) $y<0$ при $x<1$, $y>0$

при $x>1$; 2) $x>2$; 3) $x<2$. **74.** 2) (0; −3); (12; 0). **78.** 2) Одно. **79.** 2) $k=\frac{1}{3}$. **80.** 2) $b=-3$. **81.** 2) при $x<1$, при $x>-2$. **82.** 2) (2; 3). **83.** 2) $x>3$. **84.** 2) $x>-1$. **85.** 2) $x<-2$. **86.** 2) $x\leq 2$. **87.** 2) $x<-2$; $x>2$; 4) таких значений нет. **90.** 2) $x=0$. **91.** 2) $2b-\sqrt{7}$. **92.** $\frac{1}{3}>\sqrt{0,1}$. **93.** $19+6\sqrt{7}$. **94.** 2) $1\frac{4}{5}$; 4) $\frac{2}{7}$; 6) 64. **95.** 2) $5-\sqrt{23}$; 4) $a-b$; 5) $b-a$. **96.** 2) $\sqrt{15}$; 4) $2\sqrt{3}-2$; 6) $1,25+\sqrt{3}+0,75\sqrt{5}$. **97.** 2) $5\sqrt{2}>7$; 4) $3\sqrt{5}>2\sqrt{7}$. **98.** 2) При $a\geq -10$; 4) при $a\leq -\frac{1}{6}$. **99.** 2) $-\frac{b}{3}\sqrt{2}$; 4) $-0,4ab\sqrt{2b}$; 6) $-\frac{1}{3}a^2b^3\sqrt{a}$. **100.** 2) $-\sqrt{2x^2}$; 4) $-\sqrt{3a^2}$; 6) $\sqrt{-a^6b^3}$. **101.** 2) $\frac{2\sqrt{30}}{3}$; 4) $-\frac{7+\sqrt{33}}{4}$. **103.** 2) 3 и 1,8; 4) $\frac{109}{600}$ и $\frac{1}{10}$. Когда эти числа равны. **106.** 2) $1+\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{10}-1$. **107.** 2) Нет корней; 4) $x=\pm 3$; 6) $x=\pm\frac{1}{2}$; 8) $x_1=0$, $x_2=-\frac{3}{4}$; 10) $x_1=0$, $x_2=1,6$; 12) $x_1=-6$, $x_2=5$; 14) $x_1=-12$, $x_2=9$; 16) $x=4$; 18) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=4$; 20) нет корней. **108.** 2) Нет корней. **109.** 2) $x^2+4x=0$. **110.** $\frac{7}{3}$ и -1. **111.** 2) $x_1=4$, $x_2=-1$. **112.** 2) $(x+4)(x+5)$; 4) $(4x+3)(x-1)$; 6) $\frac{2}{3}(x+12)(x-6)$. **113.** $\frac{2x-1}{3x+1}$. **114.** 2) $x_1=-5$, $x_2=3$; 3) $x=4$; 4) $x=\frac{1}{3}$; 6) $x_1=7$, $x_2=3\frac{1}{3}$. **115.** 2) $x_{1,2}=\pm 1$; $x_{3,4}=\pm 3$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$. **116.** 2) (2; −3), $\left(\frac{10}{3}; -\frac{7}{3}\right)$. **117.** 1,5 и 8. **118.** 0,5 и 5,5. **119.** 5 и 12; −12 и 5. **120.** 12 км/ч, 18 км/ч. **121.** 8 км/ч. **122.** 20 дней, 30 дней. **123.** 12 ч и 18 ч. **124.** $p=-3$. **125.** $q=-25$. **126.** 2) $(a-2)(a+2)(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})$. **127.** 2) (1; 3), (−1; −3), (3; 1), (−3; −1). **128.** 1) $-\frac{3}{4}$; 2) 17; 3) 63. **129.** 1) $-\frac{3}{2}$; 2) $4\frac{1}{4}$. **130.** 2) $x=-1$. **131.** 2) $x_1=0$; при $a\neq 0$ $x_2=\frac{3}{a}$; 4) при $a>0$ корней нет, при $a\leq 0$ $x=\pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$. **132.** 1) При $a<4$; 2) при $a=4$; 3) при $a>4$. **133.** $a_1=0$, $a_2=\frac{1}{9}$. **134.** 2) При $m<1$. **135.** 2) Не принадлежит; 4) принадлежит. **136.** 2) $x_1=-3$, $x_2=2$; 4) $x_1=-\frac{1}{5}$, $x_2=1$; 6) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=2$. **137.** 2) (−2; 0); $\left(1\frac{2}{3}; 0\right)$; (0; 10). **138.** 2) (−2; −3); 4) (0; −7); 6) (−1; −10); 8) (−2; 7). **141.** 2) $y=-3$; 4) $y=4$. **142.** 2) $y=-1$; 4) $y=6$. **144.** 2) $y=-4$; 4) $y=8$. **145.** 2) Наименьшее значение $y(-3)=-12$; 4) наибольшее значение $y(-1)=6$; 6) наименьшее значение $y(-1,5)=-5,5$. **146.** 2) $p=4$, $q=4$; 4) $p=-2$, $q=-1$. **147.** 4+4. **148.** 7 см и 7 см. **149.** 3+3. **150.** $-3\leq x\leq 1$. **151.** $-2<x<\frac{3}{2}$. **153.** 2) $x<-2$, $x>4$; 4) $x\neq -3$; 6) нет решений. **154.** 2) $x=\frac{1}{2}$; 4) x — любое число; 6) $x<-3$; $x>\frac{1}{2}$. **155.** 2) $-3<x<3$; 4) $x\leq 0$, $x\geq 3$;

6) нет решений. **156.** 2) $-1\leqslant x\leqslant 4$; 4) $x<-6$, $x>10$; 6) $-2<x<0$, $x>3$; 8) $x\leqslant -\frac{1}{3}$, $0\leqslant x<2$. **157.** 2) При $-1\leqslant x\leqslant \frac{4}{3}$; 4) при всех x, кроме $x=-3$. **158.** 2) $x\leqslant -3$, $x\geqslant 2$; 4) $x=-3$, $-1\leqslant x<4$; 6) $-7\leqslant x<-3$, $x\geqslant 2$. **159.** 1) $-5<x<-2$, $x>4$; 2) $-3<x\leqslant 2$, $x>3$; 3) $-2<x<-1$, $2<x<3$. **160.** 2) $x\neq -2$, $x\neq \frac{1}{2}$; 4) $x\leqslant 2\frac{1}{3}$; 6) $x>-8$; 8) $x\geqslant 7$. **161.** $-3\leqslant x\leqslant 1$, $2<x\leqslant 4$. **162.** $x=-7$, $x=-3$, $x=\frac{1}{4}$, $x=7$, $x=25$. **166.** $-\sqrt{5}\leqslant x<-1$, $x\geqslant\sqrt{5}$. **168.** 1) $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$; 2) $x_1=-1$, $x_2=2$; 3) $x=1$; 4) $x_1=-1$, $x_2=1{,}6$. **170.** $a_5=26$, $a_7=50$; число 122 является членом последовательности; число 92 не является членом последовательности. **171.** $\frac{1}{9}$; $2\frac{1}{3}$; 9; 29. **172.** 2) 0,1; $-0{,}02$; 0,004; $-0{,}0008$; 0,00016. **173.** 1) 32; 2) -3. **174.** 1) $-0{,}001$; 2) 27. **175.** 1) -3; 2) 0,5. **176.** 1) -2; 2) $\pm 0{,}2$. **177.** 42. **178.** 125. **179.** 1) $a_{12}=10$, $a_1=43$; 2) $a_{12}=-10$, $a_1=-54$. **180.** 1) $b_5=\frac{1}{9}$, $b_1=\frac{1}{729}$; 2) $b_5=18$, $b_1=288$. **181.** 1) 364; 2) -306. **182.** 1) $-21\frac{5}{16}$; 2) $-1\frac{5}{16}$. **183.** 1) $a_1=14$, $d=1{,}2$; 2) $a_1=19$, $d=-1\frac{2}{3}$. **184.** 1) -8; 2) 6. **185.** 1) 7; 2) 6. **186.** При $n<59$. **187.** -66. **188.** 473. **189.** $-7\frac{3}{4}$. **190.** $b_1=3$, $q=2$ или $b_1=24$, $q=\frac{1}{2}$. **191.** 1 или $\frac{1}{3}$. **192.** 54. **193.** 272097 р. 79 к. **194.** 3583180 микробов. **195.** 40. **196.** 1) 11; 2) 5,5. **197.** $3\frac{7}{8}$. **198.** 1,3. **200.** 6 — мода, 6 — медиана, $6\frac{13}{29}$ — среднее, 7 — размах. **201.** Верными являются записи $3\in M$, $-2\notin M$. **202.** Верно, что $1\in A$ и $7\notin A$. **203.** 1) $\varnothing$, $\{6\}$, $\{7\}$, $\{6; 7\}$; 2) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$, $\{1; 2; 3\}$. **204.** 2) $\{-1; 0; 2; 3\}$; 4) $\{-4; 1\}$. **205.** 1) Окружность с центром в точке A и радиусом 2; 2) серединный перпендикуляр к отрезку AB. **206.** 2) $\{-2; 1; 2\}$. **207.** 2) $A\setminus B=\{2; 3\}$, $B\setminus A=\{-1; 0\}$; 4) $A\setminus B=\{5; 7\}$, $B\setminus A=\{-5{,}5; -6\}$. **208.** 2) Множество иррациональных чисел; 4) все действительные нецелые числа. **209.** 2) $A\cap B=\{c\}$, $A\cup B=\{a; b; c; d\}$; 4) $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{a; c; d; e\}$. **210.** 2) $A\cap B=\{1\}$, $A\cup B=\{-1; 0; 1; 2; 3\}$; 4) $A\cap B=\{5; 6\}$, $A\cup B=\{-5; 5; -6; 6; 7\}$. **211.** $[5; 7]$, $[1; 8]$. **212.** $\varnothing$; $[0; 3]\cup[5; 7]$. **213.** $\{1\}$; $\{1; 2; -10\}$. **214.** $(-\infty; 1]\cup[6; +\infty)$. **215.** $A=\{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$; $B=\{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$; $A\cap B=\{1; 3; 9\}$; 9 — наибольший общий делитель чисел 18 и 45. **216.** Элементы множества $C\cap D$ — общие кратные чисел 18 и 45. Наименьшее число, принадлежащее множеству $C\cap D$,— это наименьшее общее кратное чисел 18 и 45, равное 90. **217.** $\{1; 2; 3; 4\}$. **218.** $\{-1; 0; 1; 3\}$. **219.** 2) $A\cup B\cup C=\{x\colon -2\leqslant x\leqslant 1\}$; $A\cap B\cap C=\{-1; 0\}$. **220.** 2) Множество всех прямоугольников; 4) множество всех ромбов; 6) множество всех параллелограммов; 7) множество всех квадратов. **221.** 2) $x=1$. **222.** 2) $-\frac{2}{3}<x<4$. **223.** 1) $\left\{-2; -\frac{1}{2}; 1\right\}$; 2) $\{1; 2; 5\}$. **224.** 1) $-7<x<7$; 2) $x>2$. **225.** 1) $2\neq 2$; 2) $15<3$; 3) не любое натуральное число является целым числом; 4) у Земли не один естест-

венный спутник. **226.** 2) {1; 2; 5; 10}; 4) $x=1$; 6) $x=1$. **227.** 2) $x\in[4; 5]$; 4) $x\in(-\infty; +\infty)$. **228.** 1) Ложно, истинно; 2) истинно, истинно; 3) ложно, истинно; 4) истинно, истинно. **229.** 2) Ложно, истинно; 4) истинно, истинно. **230.** 2) Условие: a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, $n\in N$ — любые 3 последовательных члена арифметической прогрессии; заключение: $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$. Обратная теорема: «Если 3 члена последовательности a_n, a_{n+1}, a_{n+2} $(n\in N)$ таковы, что $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$, то данная последовательность является арифметической прогрессией». **231.** 1) «Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность». Утверждение истинно. 2) «Если при пересечении двух прямых третьей прямой образовавшиеся накрест лежащие углы равны, то данные две прямые параллельны». Утверждение истинно. 3) «Если около четырехугольника можно описать окружность, то он является прямоугольником». Утверждение ложно. **232.** 1) «Необходимо»; 2) «достаточно»; 3) «необходимо и достаточно»; 4) «необходимо». **233.** 1) Прямоугольник, не являющийся квадратом; 2) равносторонний треугольник; 3) $3+(-2)$; 4) равносторонний треугольник. **234.** 1) Утверждение ложно (контрпример: $2+3=5\neq 2k$, где $k\in Z$); 2) доказательство истинности утверждения: «$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$». **235.** 1) При любом k; 2) при $k=0$; 3) при $k=0$; 4) при любом k.

Глава II

3. $m=3$. **9.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 7. **10.** 1. **11.** 8. **14.** 1) 2; 2) 2. **17.** -1; 0; 1. **22.** 4. **27.** 1) 2; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **29.** 15 и 40 — не взаимно простые числа; 2) $x=2-3t$, $y=-1-4t$, $t\in Z$. **31.** 1) (5; 2), (5; −2), (−5; −2), (−5; 2), (11; 10), (11; −10), (−11; −10), (−11; 10); 2) (5; 0), (−5; −2), (1; 4), (−1; −6). **32.** 1) (6; −5), (4; 5), (−4; −3); 2) (−5; −8), (−3; 2), (5; −6); 3) (4; 27), (2; −17), (22, 423), (−16; 307); 4) (3; 29), (1; −17), (19; 397), (−15; 191). **33.** 1) (2; 1); 2) (3; 2). **42.** 1) $x=2+4t$, $y=3-3t$, $t\in Z$; 2) $x=2-7t$, $y=2-9t$, $t\in Z$. **45.** 1) 6; 2) 1. **46.** $m=13$. **49.** 1) −2; 0; 2; 4; 2) −1; 0; 1; 3) −2; 0; 2; 4) −3; 0; 1. **50.** 1) (2; −2), (−2; −2); 2) (−5; −8), (−3; 2), (5; −6); 3) (−6; −7), (−4; 3), (4; −5); 4) (−7; 5), (−5; −5), (3; 3).

Глава III

1. 1) $x-1$; 2) $x-2$; 3) $2x^2+3x-1$; 4) x^2-2x+3. **2.** 1) $5x-2$; 2) $3x^2-x-2$. **3.** 2) $P(x)=(4x-13)Q(x)+1$; 4) $P(x)=(x+4)Q(x)+x-3$. **4.** 1) $M(x)=2x^2-5$, $R(x)=x^2+13$; 2) $M(x)=x^4-1$, $R(x)=9$; 3) $M(x)=3$, $R(x)=x^3+9x^2+x$; 4) $M(x)=5x^3+2$, $R(x)=2x-1$. **5.** 1) $a=2$, $b=2$; 2) $a=-1$, $b=2$. **6.** 1) $a=-3$; 2) $a=2$; 3) $a=-1$; 4) $a=-1$. **7.** 1) $R(x)=-6x+6$; 2) $R(x)=21x-34$. **8.** 1) $10x+59$; 2) $11x$. **9.** $n=2$. **10.** $n=-3$, -1, 27, 89. **11.** $n=5-3k$, $k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$. **12.** 1) $P(x)=(x-2)(6x^2+x+2)+3$; 2) $P(x)=(x+2)(2x^3-5x^2+9x-15)+28$; 3) $P(x)=(x+1)(3x^4+x^2-x)-2$; 4) $P(x)=(3x+2)\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}\right)+\frac{8}{9}$. **13.** $a=1$. **14.** 1) Да; 2) да. **15.** 1) 8; 2) −2; **16.** 1) $\frac{29}{8}$; 2) -27. **17.** 1) 0, $\pm\frac{1}{2}$; 2) 1, ±4; 3) ±1, -2; 4) $\frac{1}{2}$, ±5. **18.** 1) -20; 2) -20. **19.** $x_1=3$, $x_{2,3}=-2$. **20.** $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $x_3=-\frac{2}{3}$. **21.** $a=-4$, $b=-1$, $c=4$. **22.** 1) Нет; 2) да. **23.** 1) $(x+1)(x^2+4x+7)$; 2) $(x+3)(3x^2+x+1)$; 3) $(x+5)(x+1)(x-2)$; 4) $(x-2)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$.

24. 1) $x_{2,3}=\pm 5$; 2) $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$. 25. $x+9$. 26. $-2x+4$. 27. x^2+3x+8. 28. $b=-1$, $c=-6$. 30. 1) $x_2=-3$, $x_3=-1$, $x_4=1$; 2) $x_2=-5$; 3) $x_{2,3}=-\sqrt{3}$, $x_{4,5}=\sqrt{3}$; 4) $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=-1$, $x_5=1$. 31. 1) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=3$; 2) $x=1$. 32. 1) $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=4$; 2) $x_1=-1$, $x_{2,3}=1$, $x_4=2$. 33. 1) $x=-3$; 2) $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$. 34. 1) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=-\frac{1}{2}$; 2) $x=2$. 35. $a=-12$, $b=0$, $x_3=0$. 37. 1) $x=\frac{1}{2}$; 2) $x_1=1$, $x_{2,3}=\pm\frac{1}{2}$; 3) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$; 4) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$. 38. 1) Да, $x_2=-3$, $x_3=2$, $x_4=4$; 2) да, $x_2=-2$. 42. 1) $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=2$; 2) $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{61}}{6}$. 43. $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2}$. 44. 1) $81x^4+54x^3+36x^2+24x+16$; 2) $a^3x^3+a^2bx^2+ab^2x+b^3$; 3) $x^{25}-x^{20}+x^{15}-x^{10}+x^5-1$; 4) $\frac{9}{4}a^4-3a^2b^4+4b^8$. 45. $n=2k+1$, $k\in\mathbf{Z}$. 46. $n=2k$, $k\in\mathbf{Z}$. 48. $7x^2+6x-1=0$. 49. $cx^2+bx+a=0$. 50. 1) $\pm p\sqrt{p^2-4q}$; 2) $3pq-p^3$, $\pm(p^2-q)\sqrt{p^2-4q}$. 51. 32. 52. 65. 53. $(x^2+y^2+xy)\times(x^2+y^2-xy)$. 54. $x^3+2x^2-x-2=0$. 55. $x^4-2x^3-16x^2+2x+15=0$. 56. $x_{1,2}=-\sqrt{2}\pm 1$, $x_3=-\sqrt{2}$. 57. 1) $(y-x)(y-z)(z-x)$; 2) $(x^2-xy+y^2)\times(x^2+xy+y^2)(x^2-y^2+1)$; 3) $(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4)$.

58. $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{3}{2}$. 60. 1) $P(x, y)=(3x-y)(5x-y)(x^2+2y^2)$; 2) $P(x, y)=(3x+y)(2x+y)(x-y)(x-2y)(2x-y)$. 62. 1) $a^6-12a^5b+60a^4b^2-160a^3b^3+240a^2b^4-192ab^5+64b^6$; 2) $29\sqrt{2}+41$; 3) $1+10x+40x^2+80x^3+80x^4+32x^5$; 4) $x^8+4x^6+7x^4+7x^2+\frac{35}{8}+\frac{7}{4x^2}+\frac{7}{16x^4}+\frac{1}{16x^6}+\frac{1}{256x^8}$. 63. 1) $C_{10}^4x^7$; 2) $C_{12}^4x^5$; 3) $4032x^2$. 64. $T_{10}=C_{18}^9$. 65. 1) 32; 2) 26. 67. 243. 68. $C_{12}^6x^{-1}$. 69. $C_{12}^4x^4a^{-4}$. 70. $495\frac{a^4}{x^2}$. 71. 1) (5; 7), (7; 5); 2) (6; 2); 3) (3; 1), (1; 3); 4) (7,5; 8,5), (−7,5; −8,5). 72. 1) (3; 5), (−3; −4); 2) (1; 3), (19; −3); 3) (3; 2), (2; 3); 4) (3; 0), (1; −2). 73. 1) (8; −5), (−5; 8); 2) (9; 2), (−9; −2). 74. 1) (5; 2), (−2; −5); 2) (4; 5), (5; 4). 75. 1) (2; 3), (3; 4), (−1; 0); 2) (−3; −5), (0,5; −1,5), (−2; −4); 3) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, (−0,5; −1,5), (1; 0); 4) (−5; −3), (0,5; 2,5), (0; 2), (−2; 0). 76. 1) (2; 1), $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{9+\sqrt{17}}{4}\right)$. 77. −9 и −15, 9 и 15. 78. 24 и 6, 1,5 и 19,5. 79. 4 см и 3 см. 80. 1) (4; 2), (−4; −2); 2) $\left(\frac{\sqrt{35}}{7}; \sqrt{35}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{35}}{7}; -\sqrt{35}\right)$. 81. (2; 1), (−2; −1); 2) $\left(\sqrt[4]{6}; \frac{\sqrt[4]{6^3}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt[4]{6}; -\frac{\sqrt[4]{6^3}}{3}\right)$. 82. 1) (3; −2). Указание. Выполнить почленное деление; 2) (0; 2), (0; −2), (1; −3), (−1; 3). 83. 1) (0; 0), (1; 1), $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}; \frac{1-\sqrt{5}}{6}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{6}; \frac{1+\sqrt{5}}{6}\right)$. Указание. Вы-

полнить почленное сложение; 2) (2; 1), $\left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. Указание. Выполнить почленное сложение. **84.** 24 м^3. **85.** 2 ч и 3 ч. **86.** 20 чел., 6 ч в день. **87.** 182. **88.** 20 км. **89.** 7 ч 42 мин. **90.** (2; −3). Указание. Сложить и дополнить до полных квадратов. **91.** (3; −3), (2; −4), (0; −2). Указание. Рассмотреть каждое уравнение как квадратное относительно x или y. **92.** 1) (3; 2), (−2; −3); 2) (0; 0), (1; 2), (2; 1). **93.** $\frac{1}{6t}\left(4S-3at+\sqrt{9a^2t^2+16S^2}\right)$. **94.** 1) $5x^2+2x$; 2) $3x^3+2$; 3) x^4-x^3+ $+x^2-x+1$; 4) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. **95.** 1) $M(x)=2x+\frac{1}{2}$, $R(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$; 2) $M(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, $R(x)=-\frac{5}{2}x+\frac{15}{2}$; 3) $M(x)=3x+1$, $R(x)=-12x^2+3x+7$; 4) $M(x)=2x^2+x-3$, $R(x)=x+3$. **96.** $x_{2,3}=3\pm\sqrt{2}$. **97.** $x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4}$. **98.** $x_{2,3}=\frac{-\sqrt{5}\pm 3}{2}$. **99.** $a=5$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{2}$. **100.** $a=-1$, $b=-4$, $x_3=-1$. **101.** 1) $x=-2$; 2) $x_1=2$, $x_2=-3$; 3) $x=-3$; 4) $x_{1,2}=2$, $x_3=-2$. **102.** $a=1$, $b=6$, $x_3=3$. **103.** $a=23$, $b=-15$, $x_3=3$. **104.** 1) $x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{3}$; 2) $x_1=2$, $x_2=-0{,}6$. **105.** 1) $x_1=1$, $x_2=-3$; 2) $x_1=-2$, $x_2=3$; 3) $x_1=1$, $x_2=$ $=-1$, $x_3=-2$, $x_4=-3$; 4) $x_{1,2}=\pm 2$; $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$; 5) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=4\pm$ $\pm\sqrt{15}$; 6) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$. **106.** 1) $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{2}$; 2) $x=\frac{1}{2}$; 3) $x=1$; 4) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$. **107.** 1) (0; 2), (0; −2), (1; 1); 2) (0; 0), (−2; 4), (2; 4); 3) (3; 1), (3; −1), (−3; −1); 4) (3; 2), (2; 3), (5; 1), (1; 5). **108.** 1) $b=-1$, $c=-6$; 2) $b=1$, $c=-20$. **109.** x^2+3x+8. **111.** 5 ч и 7,5 ч. **112.** 1) $x_1=-7$, $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=3$; 2) $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=3$. **113.** 1) $P(x)=(x-2)^3+(x-2)^2-2(x-2)-7$; 2) $P(x)=(x+2)^4-16(x+2)^3+$ $+55(x+2)^2-60(x+2)+7$. **114.** 1) $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 2) $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$, $x_3=2$, $x_4=-\frac{1}{2}$; 3) $x_1=-3$, $x_2=2$; 4) $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$. **115.** 1) (2; 1), (−2; −1), $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; 2) (2; 3), (−3; −2); 3) (4; 5), (−4; −5), $(3\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; 4) (1; 2), (−1; −2). **116.** (9; −14), (−2; −3). **117.** $\frac{q-r}{r-p}$. **118.** 9 ч и 6 ч.

Глава IV

2. 5,5 и 5,6. **3.** 2) Второе; 3) первое. **4.** 2) Иррациональное; 4) рациональное. **5.** 2) Иррациональное. **6.** 2) 10; 4) $\frac{2}{3}$. **7.** 2) $\sqrt{11}-\sqrt{2{,}1}>\sqrt{10}-\sqrt{3{,}1}$. **8.** 2) 3; 3) $2+\sqrt{3}$. **9.** 1,4143; 1,42; 1,41421; 1,73; 1,7320. **10.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **11.** Указание. Использовать метод доказательства «от противного». **13.** 2) Да. **14.** 2) 341. **16.** 2) Да; 4) да. **17.** 1) 0; 2) 0. **18.** 2) 1,5; 4) $-\frac{2}{3}$. **19.** 2) $-31\frac{1}{4}$. **20.** 2) $\frac{8}{9}$; 4) $\frac{23}{90}$. **21.** 2) Нет; 4) да. **22.** 2) $4\sqrt{3}+6$.

23. 2) $q=\frac{1}{3}$. **24.** 1) -1; 2) 9; 3) 1. **25.** $2a$. **26.** $R_n=\frac{1}{3^{n-1}}R_1$. **27.** $b_1=12$, $q=\frac{1}{2}$. **28.** $b_1=\frac{7}{3}$, $q=\frac{1}{2}$. **29.** $n=5$. **30.** $\frac{1}{3}$. **32.** 2) 2; 4) 15. **33.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **34.** 1) -1; 2) -4; 3) -8. **35.** 2) $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x_1=-2$, $x_2=2$. **36.** 1) 5; 2) -11; 3) $\frac{1}{30}$. **37.** 2) 48; 3) 20. **38.** 2) 33; 4) 7. **39.** 2) 0,2; 4) 2. **40.** 2) 50; 4) 16. **41.** 2) a^2b^3; 4) a^2b^3. **42.** 2) $3ab$; 4) $\frac{2}{b}$. **43.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$. **44.** 2) $\frac{2}{5}$; 4) 2; 6) 4. **45.** 2) $3x$; 4) $2\cdot\frac{b}{a}$. **46.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$. **47.** 2) 2; 4) 5. **48.** 2) y^2; 4) a^8b^9; 6) $3a$. **49.** 2) $x\geqslant -3$; 4) $\frac{2}{3}\leqslant x<2$. **50.** 2) 2. **51.** 2) 6; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 4. **52.** 2) ab^2c. **53.** 2) $3x$; 3) 0; 4) $a-1$. **54.** 1) 7; 2) 1. **55.** 1) $5\sqrt{2+\sqrt{3}}$; 2) $2\sqrt{3-\sqrt{5}}$; 3) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}}$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt{11(7+\sqrt{5})}$. **56.** 2) $(3-x)^3$ при $x\leqslant 3$, $(x-3)^3$ при $x>3$; 4) $-3x-5$. **57.** 1) $\sqrt[4]{b}$; 2) $2\sqrt[3]{ab}$; 3) 1. **58.** 2) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}<\sqrt{10}+\sqrt[3]{28}$. **60.** 1) 10; 2) 2.

61. 1) $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{30}}{3}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{15})$;

3) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt[4]{xy})(x+y-\sqrt{xy})}{x^2+y^2+xy}$, где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x^2+y^2\neq 0$;

4) $\frac{3(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt[4]{xy})(x+y-\sqrt{xy})}{x^2+y^2+xy}$, где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x^2+y^2\neq 0$. **62.** 1) $-\sqrt[4]{x}$, $0<x<3$; $\sqrt[4]{x}$, $x>3$; 2) $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, $a>2$; $\frac{2}{2-a}$, $1\leqslant a<2$; 3) a, $a>0$, $b>0$; 4) 0, если $x=0$, $y\neq 0$; $-2\sqrt{x}$, если $x>0$, $y\leqslant -1$; $-\frac{2\sqrt{x}}{y}$, если $x>0$, $-1\leqslant y<0$; $\frac{2\sqrt{x}}{y}$, если $x>0$, $0\leqslant y\leqslant 1$; 5) 0; 6) 1. **65.** 2) 9; 4) 16; 6) $\frac{1}{27}$. **66.** 2) 5; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}$. **67.** 2) 49; 4) 125. **68.** 2) 121; 4) 150. **69.** 2) 0,3; 4) 3,75. **70.** 2) b; 4) a. **71.** 2) $a^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)$; 4) $4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(3x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$. **72.** 2) $\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(y^{\frac{1}{3}}+1\right)$; 4) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$; 6) $\left(0{,}1m^{\frac{1}{12}}-n^{\frac{1}{12}}\right)\left(0{,}1m^{\frac{1}{12}}+n^{\frac{1}{12}}\right)$. **73.** 2) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y\right)$; 4) $\left(3a^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{6}}\right)\left(9a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{6}}+c^{\frac{1}{3}}\right)$. **74.** 1) $a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt{c}-1$; 4) $\frac{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$. **75.** $3c$. **76.** 2) 1; 4) $\frac{1}{16}$. **77.** 2) 5; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{2400}{2401}$. **78.** 1) 4; 2) 27. **79.** 1) 32; 2) 0,75. **80.** 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 4) $2^{\sqrt{3}}>2^{1,7}$. **81.** 2) $(0{,}013)^{-1}>1$; 4) $27^{1,5}>1$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}<1$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}>1$.

82. 2) a^2; 3) b^3. **83.** 2) $\sqrt[4]{5}<\sqrt[4]{7}$. **84.** 2) $5\frac{15}{16}$; 4) $10\frac{19}{27}$. **85.** 2) a^2b. **86.** 1) a; 2) 1; 3) $b^{-\frac{5}{3}}$; 4) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **87.** 2) 3. **88.** 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 3) $a+b$. **89.** 2) $\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **90.** 1) ≈ 7; 2) ≈ 2. **91.** 1,83 м^2; 1,31 м^2; 1,74 м^2. **92.** 1) $4a^{-1}-\frac{1}{9}b^{-2\sqrt{2}}$; 2) $m^{\frac{9}{2}}$; 4) a^{-2}. **93.** 2) $x=-\frac{3}{2}$; 4) $x=2$. **94.** 2) $x=\frac{3\sqrt{2}}{8}$; 4) $x=1$. **95.** 2) $\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{7}$; 4) $\sqrt[4]{13}>\sqrt[5]{23}$. **96.** 2) $2y$; 3) $\frac{2\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ **97.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. **98.** 8. **99.** 1) $\sqrt{x-a}$; 2) 1. **100.** 0. **101.** $\frac{m^2}{n^2}$. **102.** $\frac{1}{n}$. **103.** 5306 р. 4 к. **104.** 2158 р. 70 к. **105.** 2) 2. **106.** 2) $1\frac{29}{90}$; 4) $\frac{35}{99}$. **107.** 1) 1; 0,01; $\frac{5}{2}$; 8; $\frac{100}{169}$; $\frac{16}{81}$; 3) 2; 9; 10; 4; $\frac{1}{8}$; $\frac{9}{16}$. **108.** 2) 64; 4; 5; 2; 3) $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{9}$; 4. **109.** 2) 15; 4) 100 000; 6) $\frac{81}{256}$. **110.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 4. **111.** 2) 98^0; $32^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; 4) $\sqrt{1,6}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $(0,3)^{-3}$. **112.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}<(0,41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}>\left(\frac{12}{3}\right)^{-\sqrt{5}}$. **113.** 2) a^{-1}; 4) $a^{\frac{5}{7}}$. **114.** 2) a^2. **115.** 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}>\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$. **116.** 2) $x=3$; 4) $x=2$; 5) $x=-2$. **117.** 2) $a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{2}{5}}$. **118.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$. **119.** 1) $x\leqslant 0$, $x\geqslant 2$; 2) $x\in R$; 3) $x\leqslant -1$, $x\geqslant 4$; 4) $x\geqslant 0$. **121.** $b_9=12$, $S=162$. **123.** 2) $\frac{2681}{24\,750}$. **124.** $\frac{81}{2}$. **125.** 1) $\frac{3+2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}$; 2) $\frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$. **126.** 1) $q=\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{1}{3}$; 2) $q=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b_1=\frac{9(\sqrt{3}\pm 1)}{10\sqrt{3}}$. **127.** $\frac{1029}{38}$. **128.** $6\sqrt{7}$. **129.** $a=2-\sqrt{5}$, $a<0$. **130.** 1) $a<b$. **131.** 1) $x\geqslant 1$; 2) $x\leqslant 1-\sqrt{2}$; $x\geqslant 1+\sqrt{2}$; 3) $-1<x\leqslant -\frac{2}{3}$; 4) $x>-1$. **132.** 2) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$; 4) $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$; 6) $\frac{11(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{5}$; 8) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. **133.** 2) 7. **134.** 2) $2\sqrt[3]{xy}$; 4) $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$. **135.** 1) $2(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$; 2) $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x+1}$. **136.** 1) -1; 2) 0; 3) -3. **138.** 1) Верно; 2) верно. **139.** 1) Если $a>b$, то $-\frac{a}{b}$; если $a<b$, то $-\frac{b}{a}$.

Глава V

1. 1) $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$; 2) $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$; 4) $x \neq 0$, $y \neq 0$; 5) $x \neq 0$, $y > 0$. **2.** 1) Не является; 2) является; 3) не является. **3.** 1), 3) Ограничена снизу; 2) ограничена сверху. **4.** 1) Наименьшее значение $y=0$ при $x=0$, наибольшее значение $y=16$ при $x=2$; 2) наименьшее значение $y=-128$ при $x=-2$, наибольшее значение $y=2187$ при $x=3$; 4) наибольшее значение $y=1$ при $x=1$, наименьшее значение $y=\frac{1}{16}$ при $x=4$. **5.** 2) $(1{,}02)^4>1$; 4) $(0{,}75)^5<1$; 6) $(0{,}8)^{-1}>1$. **6.** 1) $(0{,}35)^8<(-5{,}4)^8$; 2) $\left(-\frac{11}{17}\right)^5<\left(-\frac{6}{13}\right)^5$; 4) $(\sqrt{3}+1)^{10}<(\sqrt{2}+2)^{10}$. **7.** 2) Область определения функции $y=x^2$ — множество всех действительных чисел $x \in \boldsymbol{R}$, множество значений функции $y=x^2$ — неотрицательные действительные числа $y \geqslant 0$; область определения функции $y=\sqrt{x}$ — неотрицательные действительные числа $x \geqslant 0$, так же как и множество значений $y \geqslant 0$. **8.** 2) Область определения — множество всех действительных чисел; множество значений — действительные числа $y \geqslant 2$; функция убывает при $x \leqslant -3$, возрастает при $x \geqslant -3$; не является ограниченной; наименьшее значение $y=2$ при $x=-3$. **9.** 2) $x \neq 0$, $y>0$; 4) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. **12.** 2) $0{,}2^{0{,}3}<1$; 4) $(\sqrt{3})^{0{,}2}>1$. **13.** 2) Выше при $x>1$, ниже при $0<x<1$. **14.** 2) Выше при $0<x<1$, ниже при $x>1$. **15.** 1) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2{,}3}<\left(\frac{12}{11}\right)^{2{,}3}$; 2) $2{,}5^{-8{,}1}>2{,}6^{-8{,}1}$; 3) $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$; 4) $\left(2\sqrt[3]{5}\right)^{-0{,}2}>\left(5\sqrt[3]{2}\right)^{-0{,}2}$. **16.** 1) $y=x^4$: область определения — все числа $x \in \boldsymbol{R}$, множество значений — все числа $y \geqslant 0$; $y=x^{\frac{1}{4}}$: область определения — все числа $x \geqslant 0$, множество значений — все числа $y \geqslant 0$; 2) $y=x^5$: область определения — $x \in \boldsymbol{R}$, множество значений — $y \in \boldsymbol{R}$; $y=x^{-5}$: область определения — $x \neq 0$, множество значений — $y \neq 0$. **17.** 2) Выше при $0<x<1$, ниже при $x>1$. **18.** 2) $x>-1$, $y>0$, убывает, не является ограниченной. **19.** 2) $x \in \boldsymbol{R}$, $y \leqslant 1$, возрастает при $x \leqslant 0$, убывает при $x \geqslant 0$, наибольшее значение 1; 4) $x \in \boldsymbol{R}$, $y \leqslant -2$, возрастает при $x \leqslant 0$, убывает при $x \geqslant 0$, не является ограниченной, наибольшее значение (-2); 6) $x \neq 0$, $y>2$, убывает при $x>0$, возрастает при $x<0$. **20.** 2) $(0; 0)$, $(1; 1)$. **21.** $m_0\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\approx 1{,}55m_0$. **23.** 2) $h \approx 2650$ км или $h=0{,}414\ R$. **25.** 1) $y=\frac{4-x}{5}$; 2) $y=\frac{2x+1}{3}$; 3) $y=\sqrt[3]{x+3}$. **26.** 2) Все действительные числа; 3) $x \neq 0$, $y \neq 4$. **28.** 2) $f(x)=\frac{1}{x^3+1}$; 4) $f(x)=(\sqrt{x}+1)^3$. **29.** 2) $\varphi(x)=x^3+3$, $f(\varphi)=\frac{1}{\varphi}$; 4) $\varphi(x)=x^5+3$, $f(\varphi)=\sqrt{\varphi}$. **30.** 2) Нет; 4) да. **31.** 2) $y=-\sqrt[3]{x^5}$; 4) $y=-x^3$. **32.** 2) $y=(x-1)^2$, $x \geqslant 1$, $y \geqslant 0$, $y=\sqrt{x}+1$: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$; 3) $y=(x-1)^3$: все действительные числа; $y=\sqrt[3]{x}+1$: все действительные числа; 4) $y=\sqrt{x}+1$: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$; $y=(x-1)^2$: $x \geqslant 1$, $y \geqslant 0$. **34.** 1) Область определения — $x \neq 0$; множество значений — $y \neq 0$; функция возрастает при $x<0$ и при $x>0$; 2) область определения — $x \neq -2$, множество значений — $y \neq 0$; функция убывает при $x<-2$, $x>-2$; 3) область определения — $x \neq 0$; множество значений — $y \neq 1$; функция возрастает при $x<0$, $x>0$. **35.** 2) $y=1-\frac{6}{x-1}$; 4) $y=5+\frac{3}{x-6}$. **36.** 2) $x=5$; $y=2$. **38.** 2) Нет корней; 4) нет корней. **39.** 2) Равносильны; 4) равносильны. **40.** 2) Равносильны; 4) не равносильны. **41.** 2) Равносильны; 4) не равносильны. **42.** 2) Второе. **43.** 2) Нет корней; 4) $x=4$. **44.** 2) $3{,}5<x<5$. **45.** 2) Равносильны. **46.** 1) Равносильны. **47.** 2) Оба. **48.** $x=3$. **49.** 2) $x=6$. **50.** 2) $-2<x<1$, $x>2$. **54.** 2) $x=27$; 3) $x=5$. **55.** 2) $x=-7$; 3) $x_1=3$, $x_2=-\frac{1}{3}$. **56.** 2) $x=5$; 4) $x_1=-3$, $x_2=4$. **57.** 2) $(25; 1)$; 4) $\left(\frac{7}{9}; \frac{11}{9}\right)$. **58.** 2) $x=4$; 4) $x=-1$. **59.** 2) $x=5$; 4) $x_1=-3$, $x_2=1$. **60.** 2) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. **61.** 2) $x=-3$; 4) $x=18$. **62.** 1) $x=-4$; 2) $x=5$. **63.** 2) $x=10$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{17}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$. **64.** 2) $x_1=-1$, $x_2=-3$. **65.** 2) Два; 4) один. **66.** 1) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2$; 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x_1=-6$, $x_2=1$. **67.** 2) $x_1=2$, $x_2=\frac{4}{3}$; 3) $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. **68.** 1) $(5; 7)$; 2) $(2; 3)$, $(-2; -3)$, $(-2; 3)$, $(2; -3)$. **69.** 2) $x=5$. **70.** $x=\frac{12}{5}$. **71.** 1) $(1; 8)$, $(7; -7)$, $\left(\frac{49}{64}; \frac{49}{8}\right)$; 2) $(4; 1)$, $\left(-9; -\frac{9}{4}\right)$. **72.** 1) $(16; 9)$; 2) $(4; -3)$, $(-4; 3)$, $(3; -4)$, $(-3; 4)$. **73.** 1) $x=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4a^2+9}\right)$ при $a\geqslant 0$, нет корней при $a<0$; 2) $x=-1+\sqrt{a^2-2a+2}$ при $a\geqslant 1$, нет корней при $a<1$. **74.** 1) $1\leqslant x\leqslant 1{,}5$; 3) $x<-5$. **75.** 2) $0\leqslant x<9$; 4) $x<13{,}5$. **76.** 2) $2\leqslant x<3$; 6) $-\frac{5}{4}\leqslant x\leqslant -\frac{19}{16}$. **77.** 2) $-1\leqslant x<0$, $0<x\leqslant 1$; 4) $-5\leqslant x<-3$, $3<x\leqslant 5$. **78.** 2) $-1\leqslant x\leqslant 2$; 4) $0\leqslant x\leqslant 4$. **79.** 2) $x\geqslant -1$; 4) $\frac{2}{3}\leqslant x<6$; 6) $2<x\leqslant 3$. **80.** 1) $x>\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $-3\leqslant x<6$. **81.** 2) $x>1$; 4) $x\geqslant 4$. **82.** 2) $0<x<4$; 4) $0\leqslant x\leqslant 1$. **83.** 1) $x<-\frac{7}{9}$; 2) $x<\frac{15-\sqrt{290}}{4}$; $x\geqslant 4$. **84.** 1) $-2\leqslant x<-1$, $0\leqslant x\leqslant 1$; 2) $-\frac{3}{2}\leqslant x<-1$, $1<x\leqslant 2$. **85.** 1) $1\leqslant x<a^2+1$ при $a>0$, нет решений при $a\leqslant 0$; 2) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})\leqslant x\leqslant 0$. **88.** 2) $x_1=-1$, $x_2=1$. **89.** 2) $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$; 4) $x\leqslant -1$, $x\geqslant 2$. **90.** 2) $y=\frac{2}{x}+3$; 4) $y=\sqrt[3]{x+1}$. **92.** 2) Являются; 3) являются. **93.** 2) $x=21$; 4) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$; 6) $x_{1,2}=\pm 8$. **95.** 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$, $(\sqrt{2})^{\pi}$, $(1{,}9)^{\pi}$, π^{π}; 4) $\pi^{-\frac{2}{3}}$, $(\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}$, $(1{,}3)^{-\frac{2}{3}}$, $(0{,}5)^{-\frac{2}{3}}$. **96.** 2) Являются; 4) не являются. **97.** 2) $y=x^2-4x$, $x\leqslant 2$, $y\geqslant -4$; 4) $y=6x-x^2-8$, $x\geqslant 3$, $y\leqslant 1$. **98.** 2) $x\leqslant -1$, $0\leqslant x\leqslant 3$; 4) $x<-1$, $x>0$; 6) $x>2$. **100.** 2) $x=1$; 4) $x=0$. **101.** 2) $x=259$; 4) $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$; 5) $2\leqslant x\leqslant 7$. **102.** 2) $x<0$; 4) $x\geqslant -\frac{1}{2}$. **103.** 1) $6<x\leqslant 8$; 2) $x<-4$, $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{8}{7}$; 3) $1<x<6$; 4) $-6<x\leqslant 3$. **104.** 1) $(2; 8)$, $(8; 2)$; 2) $(1; -1)$; $(2{,}5; 2)$. **105.** $(-2\sqrt{2}+\sqrt{3}; -2\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(2\sqrt{2}-\sqrt{3}; 2\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$. **106.** 1) Если $a\leqslant 2$, то решений нет; если $a>2$, то $6\leqslant x<\frac{a^4+16a^2+16}{4a^2}$; 2) $-\frac{|a|}{\sqrt{5}}<x<|a|$ при $a\neq 0$, нет решений при $a=0$.

Глава VI

5. 2) Больше 1; 4) больше 1. 6. 2) $x=-1$; 4) $x=-2$. 9. 2) $x>0$; 4) $x>-1$. 11. 2) $x\geqslant1$; 4) $x\neq\pm2$. 13. 4; $\frac{1}{2}$. 14. 2) 1; $\frac{1}{4}$. 16. $0{,}75^n$. 17. 88,4 г; 22,1 г. 18. $4{,}87\cdot10^5$ м^3. 19. $P=6\cdot10^9\cdot2^{\frac{x-2000}{35}}$; $8{,}9\cdot10^9$ человек. 21. 2) $x=\frac{2}{3}$; 4) $x=-\frac{2}{3}$. 22. 2) $x=-0{,}5$; 4) $x=4$. 23. 2) $x=2{,}5$; 4) $x=9$; 6) $x=0{,}4$. 24. 2) $x=1$; 4) $x=3$. 25. 2) $x=0$; 4) $x=0$. 26. 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x=1$. 27. 2) $x=2$. 28. 2) $x_1=2$, $x_2=5$; 4) $x=-\frac{1}{3}$. 29. 2) $x_1=1$, $x_2=-3$; 4) $x_1=0{,}5$, $x_2=-3$. 30. 2) $x=0{,}8$; 4) $x=-1$; 6) $x_1=0{,}5$; $x_2=-3$. 31. 2) $x_1=0{,}3$, $x_2=-0{,}2$; 4) $x=4$. 32. 2) $y=3$; 4) $x=2$. 33. 2) $x=3$; 4) $x=3$. 34. 2) $x=-1$; 4) $x=1$. 35. 2) $x=-3$; 4) $x=4$. 36. 2) $x=-1$; 4) $x_1=1$, $x_2=-1$; 6) $x=-1$. 37. 1) $x=-3$; 2) $x=2$; 3) $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$; 4) $x=3{,}25$. 38. 1) $x_1=0$, $x_2=2$; 2) $x_1=0$, $x_2=2$. 39. 2) $x=3$; 4) $x=\frac{1}{2}$. 40. 1) Нет корней; 2) нет корней. 41. 1) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=4$; 2) $x_{1,2}=\pm1$, $x_3=2$; 3) $x_1=-4$, $x_2=-3$, $x_3=-2$, $x_4=1$; 4) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=3$. 42. $-2<k\leqslant2$. 43. $x=4$. 45. 2) $x<2$; 4) $x<-0{,}5$; 6) $x\geqslant3$. 46. 2) $x>4$; 4) $-3<x<3$. 47. 2) $x=1$; 4) $x=2$. 48. 2) $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$; 4) $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. 49. 2) $x>1$; 4) $x\leqslant1$. 50. 2) $-3, -2, -1, 0, 1$; 4) $-2, -3$. 51. 2) Множество всех действительных чисел; 4) $x\neq0$; 6) $x\geqslant0$. 52. При $x<-2$. 55. 1) $-6\leqslant x<3$; 2) $5<x\leqslant30$. 56. 1) $x<-1$; 2) $-2<x<1$; 3) $x<0$, $x>1$; 4) $-\frac{4}{3}<x<2$. 57. $x\leqslant-8$, $x\geqslant4$. 58. $0<x<\frac{1}{2}$, $1<x<2$. 59. 2) $(0; -2)$, $(-1; -3)$; 4) $\left(3\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. 60. 2) $\left(\frac{2}{3}; -1\right)$. 61. 2) $(1; 1)$. 62. 2) $(3; -2)$; 4) $(0; 1)$. 63. 2) $(0; 2)$. 64. 1) $x=1\frac{2}{3}$; 2) $x=3{,}5$. 65. 1) $x=1$; 2) $x=-3$. 66. 1) $(7; 3)$; 2) $(1{,}5; 2)$. 67. $a=\frac{4}{3}$, $a=\frac{10}{3}$. 68. 2) $2^{\sqrt{3}}>2^{1{,}7}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}<\left(\frac{1}{9}\right)^{3{,}14}$. 69. 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}<1$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}>1$. 71. 2) $0{,}04\leqslant y\leqslant5$. 72. 2) $x=-2$; 4) $x_1=3$, $x_2=-1$. 73. 2) $x=0$; 4) $x=2$. 74. 2) $x=1$; 4) $x=3$. 75. 2) $x<-1$; 4) $-2<x<2$. 77. 1) Являются; 2) являются; 3) не являются; 4) не являются. 79. $0{,}01ap(1+0{,}01p)^{n-1}$ р. 81. 2) $x=24$. 82. 2) $x=9$; 4) $x=1$. 83. 2) $x=0$; 4) $x=-0{,}5$. 84. 2) $-3<x<1$; 4) $-1<x\leqslant1$. 85. 2) $(1; 1)$. 86. 1) Не равносильны; 2) равносильны; 3) не равносильны. 88. 2) $x=4$; 4) $x=1$. 89. 2) $x<-3$, $x>1$; 4) $x<-1\frac{1}{3}$, $x>4$. 90. $x=0$. 91. $0<b<\frac{3}{4}$, $b=1$. 92. $x=\pm2$. 93. $x=-2$, $x\geqslant0$.

Глава VII

1. 1; 2; 3; 4; 0; -1; -2; -5; $\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$. 2. 2) 6; 4) 0. 3. 2) -3; 4) $-\frac{1}{4}$. 4. 2) 4; 4) 0. 5. 2) -1; 4) $-\frac{1}{4}$. 6. 2) -2; 4) 1; 6) $-\frac{1}{3}$. 7. 2) 3; 4) -3. 8. 2) -3; 4) -2. 9. 2) 16; 4) 6. 10. 2) 64; 4) 3. 11. 2) 144; 4) 1.

12. 2) $x=625$; 4) 25; 6) -22. **13.** 2) $x<7$; 4) $x>\frac{1}{2}$; 6) $x<0$. **14.** 2) $-1{,}5$; 4) $-1\frac{2}{3}$. **15.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 5^{12}; 6) $1\frac{2}{7}$. **16.** 2) 1; 4) $\frac{1}{6}$; 6) 7. **17.** 2) $x<-3$, $x>2$; 6) $-\frac{1}{5}<x<4$. **18.** 2) $x>-2$; 4) $-2<x<0$, $x>1$. **19.** 2) $x=\log_{1,2}4$; 4) $x=\frac{1}{2}(1-\log_7 2)$. **20.** 2) $x=7$; 3) $x=\frac{1}{\sqrt[8]{5}}$; 4) $x=\sqrt[3]{5}$.

21. 2) $x=\log_3 4$; 4) $x_1=-1$, $x_2=\log_{\frac{1}{3}}2$. **22.** 1) $x_1=0$, $x_2=\log_{1,5}3$; 2) $x=\log_{0,6}2$. **23.** 2) $1<x<2$, $x>2$. **24.** Если $a>0$, то $x=\log_3 a^2$; если $a<0$ и $a\neq-1$, то $x_1=\log_3 a^2$, $x_2=\log_3(-a)$; если $a=0$, то корней нет; если $a=-1$, то $x=0$. **25.** 2) 3; 4) 2. **26.** 2) 2; 4) -3. **27.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{1}{6}$. **28.** 2) 1,5; 4) -4. **29.** 2) $\frac{1}{3}\log_3 a-2-2\log_3 b$; 4) $\frac{1}{6}\log_3 b-\frac{17}{12}\log_3 a$. **30.** 2) 11. **31.** 2) 1,5; 4) -3. **32.** 2) $1\frac{1}{3}$; 4) 0. **33.** 2) $x=\frac{a^2}{b^3}$; 4) $x=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[7]{b^4}$. **34.** 1) 3; 2) 19; 3) 475; 4) 22,5. **35.** 2) $-\log_2 7$; 4) $-2\log_2 3$. **36.** 2) $-\frac{4}{3}$; 4) $-\frac{3}{2}$. **37.** 2) 1. **39.** 2) $2\log_3 a$; 4) $-4\log_3 a$. **40.** 2) $x=\frac{2}{7}$; 4) $x=4{,}5$. **42.** 1) $2(a+b-1)$; 2) $2a+\frac{1}{2}$. **43.** 2) 0,845; 4) $-0{,}176$. **44.** 2) 0,693; 4) $-0{,}154$. **45.** 2) 1,29; 4) $-0{,}42$. **46.** 2) 1,3; 4) $-15{,}42$. **47.** 2) $\frac{\log_7 6}{\log_7 10}$; 4) $\frac{\log_7\frac{1}{3}}{\log_7 5}$; 6) $\frac{1}{\log_7 3}$. **48.** 2) 2,25; 4) 1,58; 6) -1. **49.** 1) 10; 2) $-\frac{1}{2}$. **50.** 2) $x=8$; 4) $x=3$; 6) $x=2$. **51.** $1+m$; $\frac{m}{3}$; $\frac{1+m}{3}$; $1+\frac{m}{2}$. **52.** $\frac{1}{2}+m$. **53.** $\frac{m+1}{m+n}$. **54.** $\frac{2+m}{1+2m}$. **55.** $1-\frac{2}{3}m$. **56.** $\frac{3(1-a)}{1+b}$. **57.** $\frac{3+a+ab}{2+a+2ab}$. **58.** $\frac{2mn+n+1}{mn+2n+1}$. **59.** 1) -2; 2) -3. **60.** 2) $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\sqrt{2}$; 4) $x_1=9$, $x_2=27$. **61.** 2) 1. **62.** 9 лет. **63.** 152 хода. **64.** 3052 качания. **65.** 1) На 2273 года; 2) на 97 лет, на 115 лет. Указание к ответу на вопрос 2. Нужно найти t, такое, что $5\cdot10^{12}=(2{,}2\cdot10^9)(1+1{,}05+\ldots+1{,}05^{t-1})$, т. е. $5\cdot10^{12}=2{,}2\cdot10^9\cdot\frac{1{,}05^t-1}{0{,}05}$. **66.** $0{,}0017=(0{,}9)^{\frac{d}{20}}$, откуда $d\approx12$ м. **67.** $T=d^{\frac{3}{2}}$. Указание. Рассмотреть соотношения между логарифмами чисел в строках таблицы. **68.** 2) 2,7182788; 4) 2,7182819. **69.** 2) $\log_{\frac{1}{3}}9>\log_{\frac{1}{3}}17$; 4) $\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}>\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$. **70.** 2) $\log_3 0{,}45<0$; 4) $\log_{0,5}9{,}6<0$.

71. 2) $x<1$; 3) $x>1$. **76.** 2) $x\geqslant\frac{1}{8}$; 4) $x>0{,}5$. **77.** 2) $0<x<0{,}16$; 4) $x\geqslant0{,}16$. **78.** 2) $x=8$; 4) $x=46$; 6) $x=-1{,}6$. **79.** 2) $x>-1$; 4) $-2<x<2$. **81.** 2) $\frac{\lg5+\lg\sqrt{7}}{2}<\lg\frac{5+\sqrt{7}}{2}$; 4) $\lg\lg\lg50<\lg^3 50$. **82.** 2) $-1<x<6$; 4) $x>4$; 6) $x>3$. **83.** 2) $x>-1$, $y\in\boldsymbol{R}$; 4) $x>0$, $y\in\boldsymbol{R}$; 5) $x>1$, $y\in\boldsymbol{R}$. **84.** 2) $x=2$; 4) $x\approx2$. **85.** 1) $x>0$, $y\geqslant0$; убывает при $0<x\leqslant1$, возрастает при $x\geqslant1$; 2) $x\neq0$, $y\in\boldsymbol{R}$, убывает при $x<0$, возрастает при $x>0$; 3) $x\neq3$,

$y \in \boldsymbol{R}$, убывает при $x<3$, возрастает при $x>3$; 4) $x>0$, $y \geqslant 0$, убывает при $0<x \leqslant 2$, возрастает при $x \geqslant 2$. **86.** 1) $x \neq 2$, $x \neq 3$; 2) $-1<x<\frac{1}{2}$. **87.** 2) Каждое из двух — следствие другого; 3) второе. **88.** 2) $x=3$; 4) $x=\sqrt{2}$. **89.** 2) Корней нет. **90.** 2) $x=5$. **91.** 2) Корней нет. **92.** 2) $x=1$; 4) $x_1=3$, $x_2=5$. **93.** 2) $(1; 9)$. **94.** 2) $x_{1,2}=\pm 8$; 4) $x=16$; 6) $x=3$. **95.** 2) $x=3$; 4) $x_1=4$, $x_2=-8$. **96.** 2) $x=9$; 4) $x_1=100$, $x_2=1000$. **97.** 2) Да. **98.** 2) $\left(8; \frac{1}{4}\right)$. **99.** 2) $x_1=4$, $x_2=\sqrt{2}$; 3) $x_1=3$, $x_2=9$; 4) $x_1=27$, $x_2=\frac{1}{9}$. **100.** 2) $x=\frac{2}{7}$. **101.** 2) $x=-4$. **102.** 1) $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=3$; 2) $x_1=\frac{4}{3}$, $x_2=2$. **103.** 1) $x=5^{\frac{1}{3}}$; 2) $x=4$. **104.** $x_1=-11$, $x_2=-1$, $x_3=5$. **105.** 1) $x_1=4$, $x_2=\sqrt{2}$; 2) $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. **106.** $x=0$. **107.** $x=\frac{1}{5}$. **108.** 2) $x_1=7$, $x_2=14$. **109.** $a>0$, $a \neq 1$, $a \neq 5^{-\frac{1}{3}}$. **110.** При $a=4$ и $a<0$. **111.** При $a=0$ и $a=-1$ уравнение не имеет корней; при $a<-1$ — один корень $x=a^2$; при $a>0$ — один корень $x=(a+1)^2$; при $a=-\frac{1}{2}$ — один корень $x=\frac{1}{4}$; при $-1<a<0$, $a \neq -\frac{1}{2}$,— два корня $x_1=a^2$ и $x_2=(a+1)^2$. **112.** 2) $x<\frac{7}{5}$; 4) $-2<x<2$. **113.** 2) $x \leqslant -30$; 4) $1<x \leqslant 10$; 6) $x<-0{,}05$. **114.** 2) $x>25$; 4) $\frac{5}{3}<x<3$. **115.** 2) $2<x \leqslant 3$, $11 \leqslant x<12$. **116.** 2) $-\frac{2}{3}<x<1$; 4) $x \geqslant \sqrt{2}$. **117.** 2) $x>7$; 4) решений нет. **118.** 2) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 4$; 4) $x<-0{,}5$, $x>3$. **119.** 2) $x<2$, $x>3$; 4) $-2 \leqslant x<-1$, $6<x \leqslant 7$. **120.** 2) $-\sqrt{2}<x<-\frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\frac{3}{2\sqrt{2}}<x<\sqrt{2}$. **121.** 2) $x>2$. **122.** 2) $0<x<0{,}1$, $x>10000$. **123.** 2) $\log_3 \frac{1}{2}<x<\log_3 \frac{2}{3}$, $x>\log_3 2$; 4) $x<\frac{\sqrt{6}-1}{2}$; $\frac{6}{5}<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$. **124.** $-\log_3 2 \leqslant x<0$, $\log_3 \sqrt{2}<x \leqslant 1$. **125.** $2-\log_4 5<x \leqslant 1$. **126.** 2) 4; 4) -3. **127.** 2) -4; 4) 6. **128.** 2) 1; 4) $\frac{2}{3}$. **129.** 2) $\frac{1}{4}$; 4) 4. **130.** 2) $-2{,}2$. **131.** 2) 2,26; 4) $-1{,}73$. **133.** 2) Возрастающая; 4) убывающая. **135.** 2) $x<0$, $x>2$. **136.** 1) $x=\frac{3}{8}$; 2) $x=2$. **137.** 2) $x_1=1$, $x_2=-\frac{3}{2}$; 4) $x_1=4$, $x_2=8$. **138.** 2) $x=-4$; 4) $x=2$. **139.** 2) $x<4$; 4) $x<-1$. **140.** 2) Решений нет. **141.** 2) $x<-8$, $x>1$. **142.** 2) $-4{,}5$; 4) 36; 6) 2. **143.** 2) $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9}>\sqrt{8}$. **144.** 1,223. **145.** 0,611. **146.** $0<x<1$. **148.** 2) $x=\frac{1}{3}\log_2 3$; 4) $x=\frac{1}{4}\times$ $\times(\log_{\frac{1}{3}} 1{,}5-5)$; 6) $x=\log_5 3$. **149.** 2) $x=27$; 4) $x_1=27$, $x_2=\frac{1}{27}$. **150.** 2) $x=-4$; 4) $x_1=14$, $x_2=6$. **151.** 2) Корней нет. **152.** 2) $x_1=2$, $x_2=5$; 4) корней нет. **153.** 2) $5<x \leqslant 6$; 4) $x>4$; 6) $-4<x<-3$. **154.** 2) $x=4{,}5$. **155.** 2) $x_1=23$, $x_2=-1{,}8$; 3) нет корней; 4) $x=2$. **156.** 2) $0<x<1$, $x=\sqrt{3}$; 3) $x>2$; 4) $-2<x \leqslant -1$, $x \geqslant 4$. **157.** 2) $0<x<\frac{1}{2}$, $1<x<2$, $3<x<6$. **158.** $-\frac{3}{2}<x<-1$, $-\frac{1}{2}<x<0$. **160.** 2, 10, 50 или 50, 10, 2. **162.** 2) $x_1=10$,

$x_2=0{,}1$. **163.** $x=3$. **164.** 2) $x\leqslant 0$, $\log_6 5\leqslant x<1$. **165.** 5. **166.** $\frac{1}{a}<x<\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a}<x<a$, если $a>1$; $\frac{1}{\sqrt{a}}<x<\frac{1}{a}$, $a<x<\sqrt{a}$, если $0<a<1$; решений нет при $a<0$ и $a=1$. **167.** 1) При $a<0$ и $a=1$ решений нет; если $a>1$, то $x>\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$, если $0<a<1$, то $0<x<\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$; 2) при $a<0$ и $a=1$ решений нет; если $0<a<1$, то $x<-\frac{1}{\sqrt{a}}$, $-\sqrt{a}<x<0$, $0<x<\sqrt{a}$, $x>\frac{1}{\sqrt{a}}$; если $a>1$, то $x<-\sqrt{a}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}<x<0$, $0<x<\frac{1}{\sqrt{a}}$, $x>\sqrt{a}$.

Глава VIII

1. 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{8\pi}{45}$; 6) $\frac{7\pi}{9}$. **2.** 2) $20°$; 3) $135°$; 5) $\left(\frac{540}{\pi}\right)^\circ$; 6) $\left(\frac{64{,}8}{\pi}\right)^\circ$. **4.** 0,4 м. **5.** 2 рад. **6.** $\frac{3\pi}{8}$ см^2. **7.** 2 рад. **10.** $\frac{19\pi}{15}$. **11.** 1) $120°=\frac{2\pi}{3}$ рад; 2) $150°=\frac{5\pi}{6}$ рад. **12.** $30°=\frac{\pi}{6}$ рад; $75°=\frac{5\pi}{12}$ рад. **13.** 1) $\frac{2}{9}d$, $\frac{2}{3}d$, $\frac{10}{9}d$; 2) $20°$, $60°$, $100°$; 3) $\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{9}$. **14.** 2) $(0;\ 1)$; 3) $(0;\ -1)$; 5) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **18.** 2) $(0;\ 1)$; 4) $(-1;\ 0)$; 6) $(0;\ 1)$. **19.** 2) $(0;\ 1)$; 4) $(0;\ -1)$. **20.** 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $(1;\ 0)$, $(-1;\ 0)$. **21.** 2) $\pi+2\pi k$, где k — любое целое число; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где k — любое целое число. **22.** 2) Вторая; 4) четвертая. **23.** 1) $x=1{,}8\pi$, $k=4$; 2) $x=\frac{4}{3}\pi$, $k=3$; 4) $x=\frac{5}{3}\pi$, $k=2$. **25.** 2) $(0;\ 1)$; 4) $(0;\ -1)$. **26.** 1) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 2) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **27.** 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{6}$. **28.** 1) $360°+90°$; 2) $360°\cdot 3+20°$; 3) $-360°\cdot 2+20°$; 4) $-360°+270°$; 5) $360°\cdot 4+0°$; 6) $-360°\cdot 5+40°$. **29.** k-е совпадение произойдет через $(15+30(k-1))$ мин. **30.** k-е совпадение через $(6+8(k-1))$ мин. **31.** 1) $11°15'$; 2) $\frac{\pi}{16}$. **32.** $15°$, $15'$, $15''$. **34.** 1) -1; 2) -1; 4) 1. **35.** 2) 0, 1; 4) 1, 0; 6) 0, -1. **36.** 2) 2; 4) -1. **37.** 2) 0; 4) -1. **38.** 2) -7; 4) $-\frac{1}{4}$. **39.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **40.** 2) Да; 4) нет. **41.** 1) $-\frac{5}{4}$; 2) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **42.** 1) $-0{,}25$; 2) $2{,}75$. **43.** 2) $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 6) $x=-\frac{4}{5}\pi+\frac{2\pi k}{5}$, $k\in\mathbf{Z}$. **44.** 2) Верно; 4) неверно. **45.** 1) 0,09; 2) 0,7; 3) $-0{,}22$; 4) 0,34. **46.** 1) $\sin 20°>\sin 20°\,\mathrm{tg}\,40°$; 2) $\cos 42°<\cos 42°\,\mathrm{tg}\,48°$. **48.** 1) Меньше нуля; 2) больше нуля. **49.** 1) Во второй; 2) в третьей; 3) во второй; 4) в четвертой. **50.** 2) В третьей; 3) во второй; 4) во второй. **51.** 1) $\sin\left(-\frac{33\pi}{7}\right)<0$; 2) $\sin(-0{,}1\pi)<0$; 3) $\sin 5{,}1<0$; 4) $\sin(-470°)<0$. **52.** 1) $\cos\frac{7}{6}\pi<0$; 2) $\cos 4{,}6<0$; 3) $\cos(-5{,}3)>0$; 4) $\cos(-150°)<0$.

53. 1) $\operatorname{tg}\frac{12}{5}\pi>0$; 2) $\operatorname{tg}3{,}7>0$; 3) $\operatorname{tg}(-1{,}3)<0$; 4) $\operatorname{tg}283°<0$. **54.** 2) $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$; 4) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$. **55.** 2) $\sin 3>0$, $\cos 3<0$, $\operatorname{tg}3<0$; 4) $\sin(-1{,}3)<0$, $\cos(-1{,}3)>0$, $\operatorname{tg}(-1{,}3)<0$. **56.** 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)<0$; 4) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)<0$; 6) $\sin(\pi-\alpha)>0$. **57.** 2) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha<0$. **58.** Знаки совпадают для $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и для $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, знаки различны для $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и для $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. **59.** 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}<0$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}>0$. **60.** 2) $\cos 1{,}3>\cos 2{,}3$. **61.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **62.** 2) Во второй. **63.** $\sin\alpha$ не может, $\cos\alpha$ может, если угол α тупой. **65.** 1) Больше нуля; 2) меньше нуля. **66.** Да; да; нет; да; нет; нет. **67.** 1) Не могут; 2) могут; 3) не могут; 4) не могут. **68.** 2) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$; $\frac{2\sqrt{21}}{21}$; $\frac{\sqrt{21}}{2}$. **69.** 2) $\cos\alpha=-0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$; 3) $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3}$, $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$; 4) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{12}{5}$; 6) $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$, $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}$. **70.** 2) $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$. **71.** 2) Не могут. **72.** $\cos\alpha=\frac{9}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{9}$. **73.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **74.** 2) $\frac{11}{16}$. **75.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $-\sin^2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $-\sin^2\alpha$; 5) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 6) $\frac{2}{\cos\alpha}$. **76.** 1) $\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\sqrt{2-p^2}$; 2) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{1}{2}+p^2-\frac{1}{2}p^4$. **77.** 1) m^2-2; 2) $\pm\sqrt{m^2-4}$; 3) $m(m^2-3)$. **79.** 2) 0; 4) $1+\sin\alpha$. **80.** 2) 4; 4) 2. **82.** 2) 0; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **85.** 1) $\cos^4\alpha$; 2) $\sin^4\alpha$. **86.** 7. **87.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **88.** 28. **89.** $\frac{8}{25}$. **90.** $\frac{37}{125}$. **92.** 2) $\frac{1}{3}$; 3) -3; 4) $\sqrt{2}$. **93.** 2) $2\cos\alpha$; 4) 2. **94.** 2) 0,5. **95.** 2) $-2\cos\alpha$. **97.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **99.** 1) Больше нуля; 2) меньше нуля. **100.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **101.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) -1. **102.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **103.** 2) $\cos 3\beta$; 4) -1. **104.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **105.** 2) $\frac{-\sqrt{14}-2}{6}$. **106.** 2) $-\cos\beta\sin\alpha$; 4) $\sin\alpha\cos\beta$. **107.** $\frac{84}{85}$, $\frac{36}{85}$. **108.** $-\frac{63}{65}$. **109.** $2\frac{5}{36}$. **110.** 2) $\frac{1}{2}\cos^2\alpha$; 4) $\sin\alpha\sin 3\alpha$. **112.** 2) 1; 4) $\sqrt{3}$. **113.** 2) $\frac{1}{7}$. **114.** $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$. **115.** 2) $\sin 2\beta$. **116.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $x=4\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **117.** 1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; 2) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; 5) 1; 6) -1. **118.** 1) 1; 2) 1; 4) 1.

122. 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\beta}{2}\right)$; 4) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 6) $\cos^2\frac{\alpha}{2}-$

$-\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **123.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. **124.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) -1. **125.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -2. **126.** 1) $-\frac{24}{25}$. **127.** 2) $\frac{7}{25}$. **128.** $\frac{4}{3}$. **129.** 2) $\sin 50°$; 4) $\cos^2 2\alpha$. **130.** 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **132.** 2) $\frac{8}{9}$. **135.** 2) $x=\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **136.** 1) 1; 2) 1. **139.** 2) $\frac{1+\cos\frac{1}{2}}{2}$; 4) $\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{2}$. **140.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **141.** 2) $\sqrt{0,8}$; 4) 2. **142.** 2) $\sqrt{0,1}$; 4) $\frac{1}{3}$. **147.** 1) 1; 2) 1. **149.** $\cos 4\alpha$. **150.** 2) $x=4\pi k,\ x=\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi k}{2},\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ k\in\boldsymbol{Z}$; 5) $x=-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 6) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}$. **151.** 1) Не существует; 2) не существует. **153.** 1) $\alpha=60°$; 2) $\alpha=40°$; 3) $\alpha=\frac{3\pi}{10}$; 4) $\alpha=\frac{\pi}{6}$. **154.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **155.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\frac{1}{2}$; 8) 1. **156.** 2) -1. **157.** 2) $\frac{1}{\cos\alpha}$. **158.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **159.** 2) $-\sqrt{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}-1$. **160.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -1. **166.** 0,6; 0,8; 0,75. **167.** 2) $x=\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 3) $x=\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 5) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in\boldsymbol{Z}$. **168.** 1. **170.** 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) $\sin 2\alpha$. **171.** 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **176.** 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{24}$. **177.** 2) 0. **179.** 1) $2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}2\alpha$; 3) $2\operatorname{tg}\pi\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\alpha}{2}\right)$; 4) $2\operatorname{ctg}(30°+2\alpha)\sin^2(30°-\alpha)$. **180.** 1) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. **182.** 1) $-4\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $4\cos\alpha\sin 7\alpha\cos 2\alpha$. **184.** 1) $\frac{1}{2}(\cos 10°-\cos 30°)$; 2) $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)$; 3) $\frac{1}{2}(\sin 60°-\sin 10°)$; 4) $\frac{1}{2}(\cos 10°+\cos 20°)$; 5) $\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2x)$; 6) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2x)$. **185.** 1) $1+\sin 2\alpha$; 2) $2\cos x-\cos 2x-1$; 3) $\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin 3\alpha$; 4) $\frac{3}{2}+2\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 4\alpha$. **186.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$. **187.** 1) $\sin 3\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1. **190.** $x=-\frac{7\pi}{32}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **191.** 0,75; $-0,25$. **192.** 1) $x=\frac{\pi}{3}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{8}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 3) $x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **194.** 2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; 4) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **195.** 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **196.** 2) 1; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **197.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **198.** 2) $2\sin\alpha$. **199.** 2) $-\operatorname{ctg}\alpha$. **201.** 2) $\frac{1}{4}$. **202.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **205.** $-4\sin 2\alpha$. **208.** -2. **209.** $1\frac{5}{6}$. **210.** $-\frac{4}{9}$. **213.** $\frac{10}{11}$.

Глава IX

1. 2) 0; 4) $\frac{\pi}{3}$; 6) $\frac{3\pi}{4}$. **2.** 2) 2π; 4) 8π. **3.** 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)<\arccos(-1)$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$. **4.** 2) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 3) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **5.** 2) $x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 3) $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **6.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{2}+6\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 6) $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \mathbf{Z}$. **7.** 1) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in \mathbf{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **8.** 2) Да; 4) нет; 6) да. **9.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 6) $x=2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 8) $x=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **10.** $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$. **11.** $x_1=-\frac{\pi}{16}$, $x_2=\frac{\pi}{16}$, $x_3=\frac{7\pi}{16}$. **12.** 1) $x=\frac{7}{4}$; 2) $x=-\frac{5}{2}$. **13.** 2) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$. **14.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 6; 3) $\frac{6\pi}{7}$; 4) $2\pi-4$. **15.** 1) 1; 2) $\frac{24}{25}$. **16.** 1) $2a^2-1$. **18.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{3}$. **19.** 2) 0; 4) $-\frac{\pi}{2}$. **20.** 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)>\arcsin(-1)$. **21.** 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **22.** 2) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **23.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 4) $x=(-1)^n\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 6) $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \mathbf{Z}$. **24.** 2) $x=\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **25.** 2) Да; 4) нет; 6) нет. **26.** 2) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \mathbf{Z}$; 4) $x=(-1)^n\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **27.** 2) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in \mathbf{Z}$. **28.** 1) $x=(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 2) $x=(-1)^n\frac{1}{3}\times\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in \mathbf{Z}$. **29.** $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$. **30.** $\frac{14\pi}{3}$. **31.** 2) $-\frac{1}{5}$; 4) $-\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$. **32.** 2) 2; 4) $5-2\pi$. **33.** 2) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **34.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **35.** 2) $\frac{7}{25}$. **36.** 1) $x=7$; 2) $x=\frac{6+\sqrt{2}}{4}$. **38.** 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. **39.** 1) 3π; 2) 0; 3) $-\frac{47}{12}\pi$. **40.** 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\arccos\frac{1}{2}$; 4) $\operatorname{arctg}(-5)<\operatorname{arctg}0$. **41.** 2) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 4) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 6) $x=-\operatorname{arctg}5+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **42.** 1) $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in \mathbf{Z}$; 2) $x=-\frac{3\pi}{4}+3\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 3) $x=-2\pi+6\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **43.** 2) $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 4) $x=\operatorname{arctg}(4{,}5)+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 6) $x=-\frac{3\pi}{2}+6\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **44.** $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$. **45.** 1) $x=\frac{2}{5}$; 2) $x=\frac{3+\sqrt{3}}{5}$. **46.** 1) 2,1; 2) −0,3; 3) −7; 4) −6. **47.** 1) 2; 2) $-\frac{\pi}{8}$; 3) $13-4\pi$. **48.** 1) $-\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$. **50.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \mathbf{Z}$; 3) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; 4) корней нет. **51.** 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{2}{3}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$;

4) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **52.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) корней нет. **53.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\operatorname{arctg}3+\pi n$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **54.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\operatorname{arctg}5+\pi n$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **55.** 1) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **56.** 1) $x=2\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $x=\operatorname{arctg}2+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **57.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **58.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **59.** 1) $a\leqslant-2$, $a\geqslant1$; 2) $a\leqslant-1$, $a\geqslant2$. **60.** $|a|\geqslant1$. **61.** 2) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **62.** 2) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. **63.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **64.** 2) $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **65.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\pi+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **66.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **67.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **68.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **69.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$. **70.** 1) $x=\frac{\pi n}{12}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **71.** 2) $x=\pi n$, $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$; 4) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **72.** 1) Нет корней; 2) нет корней; 3) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **73.** 1) $x=\frac{2\pi}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) πn, $n\in\mathbf{Z}$. **75.** $\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant1$. **76.** 1) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-\pi k\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+\pi k\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{4}+\pi n-\frac{\pi k}{2}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{6}-\pi n+\frac{\pi k}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{3}-\pi n+\frac{\pi k}{2}\right)$,

$n\in Z,\quad k\in Z.$ **77.** 1) $\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\quad (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right),\quad n\in Z,\quad k\in Z;$ 2) $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ \left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in Z,\ k\in Z;$ 3) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n+\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi k-\pi n\right),\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n+\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+\pi k-\pi n\right),\ n\in Z,\ k\in Z;$ 4) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),$ $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\quad \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\quad n\in Z,\quad k\in Z.$ **78.** 1) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n-\pi k;\quad \pi k\right),$ $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n-\pi k\right),\ n\in Z,\ k\in Z;$ 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{5\pi}{4}-\frac{\pi n}{2}+2\pi k\right),\ n\in Z,\ k\in Z.$
79. 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{11\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z;$ 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$
80. 2) Решений нет; 4) $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z.$ **81.** 2) $-\frac{5\pi}{4}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+2\pi n,$ $n\in Z;$ 4) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$ **82.** 2) Решений нет; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z.$ **83.** 2) $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3},\quad n\in Z.$
84. 2) $12-3\pi+8\pi n<x<12-\pi+8\pi n,\ n\in Z.$ **85.** 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ $n\in Z;$ 3) при всех x, кроме $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$ 4) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<\frac{4\pi}{3}+2\pi n,$ $n\in Z.$ **86.** 1) $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z;$ 2) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,$ $n\in Z;$ 3) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z.$ **87.** 2) $-\frac{7\pi}{4};$ 4) $\frac{3\pi}{2}.$
88. 2) $x=-2\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z;$ 4) $x=\frac{\pi}{9}\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z.$ **89.** 2) $x=-\frac{\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z;$ 4) $x=\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{5}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$ **90.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,$ $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$ **91.** 2) $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z;$ 4) $x=\frac{3\pi}{28}+\pi n,\ n\in Z.$
92. 2) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\quad n\in Z;$ 4) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$
93. 2) $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{39}-3}{4}+\pi n,\ n\in Z.$ **94.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\operatorname{arctg}1{,}5+\pi n,$ $n\in Z;$ 4) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$ **95.** 2) $x=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{5}{4}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z;$ 4) $x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n,$ $n\in Z.$ **96.** 2) $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ x=-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in Z.$ **97.** 2) $x=\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$
98. 2) $x=\frac{\pi n}{5},\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z.$ **99.** 1) $\frac{1}{2};$ 3) 1. **100.** 2) 0; 3) -1; 4) 0.
101. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\quad n\in Z.$ **102.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z.$
103. 2) $x=\pi n,\quad x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z.$ **104.** 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z.$
105. 2) $x=\pi n,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z;$ 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\frac{3\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11},\ n\in Z.$
106. 2) $x=\pi n,\ n\in Z;$ 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$ **107.** 1) $x=\frac{\pi n}{2},$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in Z$. **108.** 2) $-\frac{2}{3}$. **109.** 1) $\frac{5}{4}$; 2) 2. **110.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 6) корней нет. **111.** 2) Корней нет. **112.** 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **113.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **114.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 3) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in Z$. **115.** 1) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **116.** 1) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+\pi+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\arccos\frac{5}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **117.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $x=\pi n$, $x=-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $x=-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+\pi(2n+1)$, $x=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n$, $x=\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+2\pi n$, $n\in Z$. **118.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $x=-\frac{7\pi}{12}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{6}}{2}+\pi n$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n$, $n\in Z$. **119.** 2) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **120.** 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k+\frac{\pi n}{2};\ -\frac{\pi}{4}-\pi k+\frac{\pi n}{2}\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$. **121.** 1) $\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$; 2) $\left((-1)^n\arcsin\frac{7}{8}+\pi n;\ (-1)^k\arcsin\frac{1}{4}+\pi k\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$. **122.** 1) $\left(\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{\pi n}{2};\ \pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$; 2) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$; 3) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$; 4) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. **123.** 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **124.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi n}{3}$, $n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$. **125.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **126.** $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}<x<2\pi$. **127.** $0<x<\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}<x<\frac{\pi}{2}$. **128.** $|a|<2$.

$x=\pm\arccos\frac{a}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. **129.** $a<-\frac{1+\sqrt{10}}{2},\ a>\frac{\sqrt{10}-1}{2}$. **130.** $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$, $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. **131.** $\frac{1}{16}\leqslant a\leqslant 1$.

Ответы к заданиям «Проверь себя!»

Глава I. **1.** a^{19}. **2.** $3{,}8\cdot10^{-4}$. **3.** $x=2,\ y=-1$. **4.** $-0{,}6<x<8$. **5.** $-3xy^2\sqrt{xy}$. **6.** $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=3$. **8.** 2; −3; −8; −63; −3968. **9.** 5; 5; $5\frac{1}{3}$. **10.** Например, при $n=2$ число $\frac{n+5}{2}$ не является целым.

1. $\frac{2}{b}$. 2. $x_1=-1,\ x_2=4$. 3. $x\leqslant-2$. 4. $2-a$. 6. 207. 7. $A\cap B=(3;\ 5)$, $A\cup B=\{1;\ 2\}\cup[3;\ 5]$. 8. Ложным; истинным. 9. «Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, равен половине третьей стороны этого треугольника». Прямая теорема не верна, а обратная — верна.

Глава II. 1. 1. 2. 2. 3. 5. 4. Делится. 5. Делится.

Глава III. **1.** Частное x^3+x^2-5x, остаток $6x^2+2x$. **2.** Делится. **3.** $x_1=-1$, $x_2=-3$, $x_3=2$. **4.** $32a^5-16a^4+3{,}2a^3-0{,}32a^2+0{,}016a-0{,}00032$. **5.** (17; 10), (4; −3). **6.** $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$.

1. $(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$. 2. 0; $\frac{2\pm\sqrt{73}}{3}$. 3. $a=-2,\ b=0,\ x_3=0$. 4. $120x^2$. 5. $(-10;\ 5)$, $\left(\frac{-7+\sqrt{249}}{20};\ \frac{-7+\sqrt{249}}{10}\right)$, $\left(\frac{-7-\sqrt{249}}{20};\ \frac{-7-\sqrt{249}}{10}\right)$. 6. 30 дней, 40 дней.

Глава IV. **1.** 1) 108; 2) $4\frac{11}{12}$; 3) $4\frac{1}{2}$. **2.** 1) $\frac{a^2b}{c}$; 2) $\frac{1}{a}$. **3.** $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{7}(a^{\frac{1}{4}}-3)$; $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$. **4.** $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{4}\right)^3}<\sqrt[5]{\left(\frac{11}{12}\right)^3}$. **5.** $(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})^2$. **6.** 2,5.

1. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 1. 2. $\frac{12}{55}$; $3\frac{499}{3300}$. 3. 1) $-b^{-\frac{1}{3}}$; 2) $a^{\frac{4}{1-\sqrt{2}}}$. 4. $(0{,}011)^{-2}>1$, $3{,}1^{0{,}5}>1$. 5. Нет.

Глава V. **1.** 1) $x\neq1$; 2) $x\leqslant-1,\ x\geqslant4$. **2.** 1) $x\in R,\ x>-1$; 2) $x\neq0,\ x\neq0$; 3) $x\in R,\ x\neq0$. **3.** 1) $x=628$; 2) $x=1$. 1. $x\geqslant1$. 3. 1) $x=1$; 2) $x=626$. 4. $x\leqslant-\frac{1}{2}$, $x>4$. 5. (0; 1,75).

Глава VI. **2.** 1) $\left(\frac{1}{6}\right)^{0,2}>\left(\frac{1}{6}\right)^{1,2}$; 2) $8^{-0,2}>8^{-1,2}$. **3.** 1) $x=2$; 2) $x_1=-5$, $x_2=1$; 3) $x=1$; 4) $x_1=0,\ x_2=-2$. **4.** 1) $x>4$; 2) $-4\leqslant x\leqslant4$.

2. 16; 1. 3. 1) Корней нет; 2) $x_1=0,\ x_2=2$; 3) $x=4$; 4) $x=1$. 4. $x>3$. 5. $x=1,\ y=2$.

Глава VII. 1. 1) 3; 2) -2; 3) 6; 4) 25; 5) 2. 3. 1) $\log_{0,2} 8 < \log_{0,2} 7,5$; 2) $\log_5 0,8 < \log_5 1,3$. 4. 1) $x=5$; 2) $x=1$; 3) $x_1=0$, $x_2=9$. 5. (10; 2). 6. 1) $1<x\leqslant 9$; 2) $-3<x<2$.

1. 1) При $m>1$; 2) при $m>-1$ и $m\neq 0$; 3) при $m>1$. 3. 39. 4. 1) $x=-\sqrt{17}-4$; 2) $x_1=2$, $x_2=4$; 3) $x=4$. 5. (2; 6). 6. 1) $-1\leqslant x<1-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{3}<x\leqslant 3$; 2) $1<x<\sqrt[3]{5}$.

Глава VIII. 1. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$; $\cos 2\alpha=\frac{7}{25}$. 2. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. 1) $\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\cos(\alpha-\beta)$.

1. $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$; $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$. 2. 1) 2; 2) $1-\sqrt{3}$. 3. Меньше нуля. 4. -2. 6. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

Глава IX. 1. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$. 2. 1) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 5) $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

1. 1) $-0,2$; 2) 0,8. 2. $0\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$. 3. $-\frac{5}{6}\pi$; $-\frac{3}{2}\pi$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7}{6}\pi$. 4. 1) $x=\operatorname{arctg} 6+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{10}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Оглавление

Учебное издание

Колягин Юрий Михайлович
Ткачева Мария Владимировна
Федорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

Алгебра и начала математического анализа

10 класс

Учебник
для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художник *В. А. Андрианов*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика: *Г. М. Дмитриев*
Технические редакторы *Л. В. Марухно, С. Н. Терехова*
Корректоры *И. Б. Окунева, Н. А. Смирнова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 17.05.11. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 22,69 + форз. 0,43. Доп. тираж 40 000 экз. Заказ № 31718.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

$\cos x = a \qquad x = \pm\arccos a + 2\pi n$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

$\cos x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\cos x = 1 \qquad x = 2\pi n$

$\cos x = -1 \qquad x = \pi + 2\pi n$

$\sin x = a \qquad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

$\sin x = 0 \qquad x = \pi n$

$\sin x = 1 \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\sin x = -1 \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\operatorname{tg} x = a \qquad x = \operatorname{arctg} x + \pi n$

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$

$\operatorname{tg} x = 0 \qquad x = \pi n$

БАЗОВЫЙ • ПРОФИЛЬНЫЙ
УРОВНИ

Учебник соответствует Федеральным компонентам государственного стандарта общего образования

В учебно-методический комплект по алгебре и началам математического анализа для 10–11 классов под редакцией А. Б. Жижченко входят:

- **Учебники для 10 и 11 классов** (*авторы Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин*)
- **Дидактические материалы для 10 и 11 классов** (*авторы М. И. Шабунин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, О. Н. Доброва*)
- **Изучение алгебры и начал математического анализа в 10 и 11 классах.** Книги для учителя (*авторы Н. Е. Федорова, М. В. Ткачева*)

ISBN 978-5-09-025401-4
9 785090 254014

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО